УДК 512.548

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

POLYADIC GROUPS OF SPACEMATRIX

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье изучаются полиадические группы пространственных матриц.

Ключевые слова: *матрица, вектор-матрица, пространственная матрица, группа, кольцо, l-арная группа.*

The polyadic groups of spacematrix are studied in this paper.

Keywords: *matrix, vector-matrix, spacematrix, group, ring , l-ary group.*

Введение

Данное исследование базируется на результатах работы [1], в которой изучались свойства пространственных матриц с квадратными сечениями фиксированной ориентации (r), где $r \in \{i, j, k\}$. В частности, для таких пространственных матриц над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей было введено понятие определителя ориентации (r), который, согласно определению 5.1 из [1], равен произведению определителей всех сечений ориентации (r) данной пространственной матрицы. Для кубической матрицы помимо определителей ориентаций (i), (j) и (k) было введено также понятие полного определителя, который, согласно определению 5.1 из [1], равен произведению определителей ориентаций (i), (j) и (k) этой кубической матрицы.

В настоящей работе используются те же обозначения, что и в [1]. В частности, $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$ – множество всех пространственных матриц размера $m \times n \times p$ над P. Доказано, что во множествах $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ имеются подмножества, являющиеся l-арными группами относительно l-арных операций, которые были определены в [2] и которые аналогичны l-арной операции на множестве вектор-матриц [3], а также полиадической операции Э. Поста на множестве полиадических матриц [4]. Для элементов указанных l-арных групп установлена связь между операциями транспонирования и взятия обратного элемента. Получены формулы для нахождения определителя косой пространственной матрицы.

1 Используемые результаты

Во множестве $\mathbf{M}_n(k, P)$ всех k-компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, выделим подмножество $\mathbf{GL}_n(k, P)$ всех вектор-матриц, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что обратимость компонент в $\mathbf{M}_n(P)$ можно заменить обратимостью определителей этих компонент в P.

***Теорема* 1.1** [5, теорема 4.2, замечание 4.1]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа, которая при $n > 1$ является неполуабелевой. Если σ – нетождественная подстановка, то в этой l-арной группе нет единиц.*

Во множестве $\mathbf{GL}_n(k, P)$ выделим подмножество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ всех k-компонентных вектор-матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице кольца P.

***Предложение* 1.1** [6, предложение 1.2]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной группой.*

***Теорема* 1.2** [7, теорема 4.1]**.** *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\beta: \mathbf{A} \to \det\mathbf{A}$ является гомоморфизмом l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ на l-арную группу $< P^*, [\ ]_l >$, производную от группы P^*.*

Символом P^*, как обычно, обозначается группа всех обратимых элементов кольца P.

2 l-Арные группы пространственных матриц

Далее, P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Выделим во множестве $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ множество $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ всех пространственных матриц, у которых все сечения ориентации (i) являются обратимыми матрицами в $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что множество $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ совпадает с множеством всех пространственных матриц, у которых определители всех сечений ориентации (i) являются обратимыми в P. Так как в ассоциативном коммутативном кольце с единицей обратимость элементов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ равносильна обратимости их произведения $a_1 a_2 \ldots a_s$, то множество $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ совпадает с множеством всех пространственных матриц А из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, у которых определитель $\det^{(i)}A$ обратим в P.

Таким образом,

$$\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P) = \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P) \mid (a_{1jk}), \ldots$$
$$\ldots, (a_{mjk}) \in \mathbf{M}^*_n(P) = \mathbf{GL}_n(P)\},$$
$$\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P) = \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P) \mid \det(a_{1jk}), \ldots$$
$$\ldots, \det(a_{mjk}) \in P^*\},$$
$$\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P) = \{A \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P) \mid \det{}^{(i)}A \in P^*\}.$$

Если $(a_{ijk})_1, \ldots, (a_{ijk})_l$ – произвольные пространственные матрицы из $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$,

$$[(a_{ijk})_1 \ldots (a_{ijk})_l\,]^{(i)}_{l,\sigma,m} = (a_{ijk}),$$

то, согласно равенству (4.3) определения операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ из [1], все сечения ориентации (i) пространственной матрицы (a_{ijk}), являясь произведением соответствующих сечений ориентации (i) пространственных матриц-сомножителей, имеют определители, обратимые в P. Следовательно, множество $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$.

Если $\varphi_{(i)}$ – изоморфизм из леммы 4.1 [1], то его сужение на $\mathbf{GL}_n(m, P)$ является изоморфизмом универсальной алгебры $<\mathbf{GL}_n(m, P), [\ ]_{l,\sigma,m}>$ на универсальную алгебру $<\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$. А так как, согласно теореме 1.1, для подстановки $\sigma \in S_m$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, универсальная алгебра $<\mathbf{GL}_n(m, P), [\ ]_{l,\sigma,m}>$ является l-арной группой, которая при $n > 1$ является неполуабелевой и в которой в случае нетождественности подстановки σ нет единиц, то имеет место

Предложение 2.1. *Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальная алгебра $<\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$ является l-арной группой, изоморфной l-арной группе $<\mathbf{GL}_n(m, P), [\ ]_{l,\sigma,m}>$. При $n > 1$ указанные l-арные группы являются неполуабелевыми. Если σ – нетождественная подстановка, то в этих l-арных группах нет единиц.*

Аналогично множеству $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ определяются множества $\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P)$, для которых справедливы аналоги предложения 2.1. Все три утверждения можно объединить одной теоремой.

Теорема 2.1. *Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальные алгебры $<\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$, $<\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P), [\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}>$* и $<\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P), [\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}>$ *являются изоморфными неполуабелевыми l-арными группами. Если σ – нетождественная подстановка, то в этих l-арных группах нет единиц.*

Теорема 2.2. *Отображения*

$$\beta_{(i)}: A \to \det{}^{(i)}A,\ A \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P),$$
$$\beta_{(j)}: A \to \det{}^{(j)}A,\ A \in \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P),$$
$$\beta_{(k)}: A \to \det{}^{(k)}A,\ A \in \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$$

являются соответственно гомоморфизмами l-арных групп

$$<\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>,$$
$$<\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P), [\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}>,$$
$$<\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P), [\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}>$$

на l-арную группу $<P^*, [\ ]_l>$, производную от группы P^*.

Доказательство. Определим отображение

$$\psi_{(i)}: \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P) \to \mathbf{GL}_n(m, P)$$

по правилу

$$\psi_{(i)}: (a_{ijk}) \to ((a_{1jk}), \ldots, (a_{mjk})).$$

Так как $\psi_{(i)} = \varphi_{(i)}^{-1}$, то $\psi_{(i)}$ – изоморфизм l-арной группы $<\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$ на l-арную группу $<\mathbf{GL}_n(m, P), [\ ]_{l,\sigma,m}>$. Этот изоморфизм можно установить и непосредственно, проведя соответствующие вычисления.

Ясно, что $\beta_{(i)}$ является композицией изоморфизма $\psi_{(i)}$ и гомоморфизма β из теоремы 1.2: $\beta_{(i)} = \psi_{(i)}\beta$. Поэтому $\beta_{(i)}$ – искомый гомоморфизм.

Для отображений $\beta_{(j)}$ и $\beta_{(k)}$ доказательство проводится аналогично. При этом аналогично отображению $\psi_{(i)}$ определяются отображения:

$$\psi_{(j)}: \mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P) \to \mathbf{GL}_n(m, P),$$
$$\psi_{(j)}: (a_{ijk}) \to ((a_{i1k}), \ldots, (a_{imk})),$$
$$\psi_{(k)}: \mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P) \to \mathbf{GL}_n(m, P),$$
$$\psi_{(k)}: (a_{ijk}) \to ((a_{ij1}), \ldots, (a_{ijm})).$$

Теорема доказана.

3 Случай кубической матрицы

Выделим во множестве $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ множество $\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P)$ всех кубических матриц, у которых все сечения ориентаций (i), (j) и (k) являются обратимыми матрицами в $\mathbf{M}_n(P)$, то есть являются элементами множества $\mathbf{GL}_n(P)$. Ясно, что множество $\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P)$ совпадает с множеством всех кубических матриц, у которых определители всех сечений ориентаций (i), (j) и (k) обратимы в P, а также с множеством всех кубических матриц, у которых полный определитель обратим в P.

Таким образом,

$$\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P) = \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) \mid (a_{rjk}), (a_{irk}),$$
$$(a_{ijr}) \in \mathbf{GL}_n(P), r = 1, \ldots, n\},$$
$$\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P) = \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) \mid \det(a_{rjk}),$$
$$\det(a_{irk}), \det(a_{ijr}) \in P^*, r = 1, \ldots, n\},$$
$$\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P) = \{A \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) \mid \det A \in P^*\}.$$

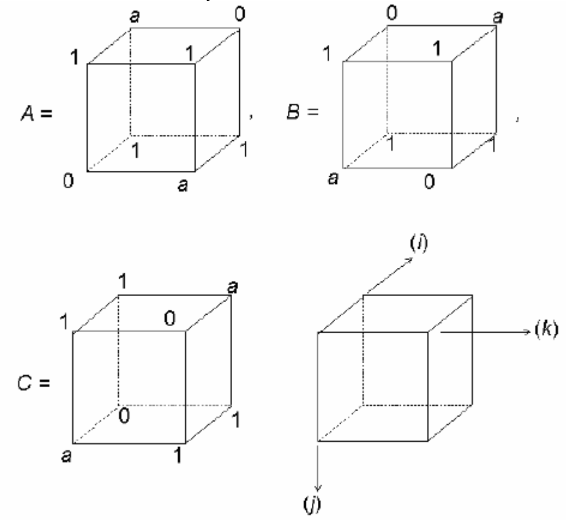
Ясно, что

$$\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P) =$$
$$= \mathbf{GL}^{(i)}_{n\times n\times n}(P) \bigcap \mathbf{GL}^{(j)}_{n\times n\times n}(P) \bigcap \mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times n}(P).$$

Возникает вопрос: *будет ли множество* $\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P)$ *замкнутым относительно l-арных операций* $[\;]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\;]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\;]^{(k)}_{l,\sigma,m}$?

Покажем, что ответ на поставленный вопрос является отрицательным. Для этого нам понадобится следующая

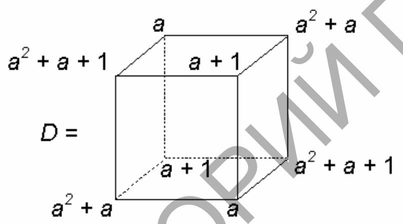
***Лемма* 3.1.** *Пусть*



кубические матрицы из $\mathbf{M}_{2\times 2\times 2}(P)$, *где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей* 1. *Тогда*

1) *A, B, C* $\in \mathbf{GL}_{2\times 2\times 2}(P) \Leftrightarrow a \in P^*$;

2) $[ABC]^{(i)}_{3,(12),2} = D = (d_{ijk})$, *где*



3) $\det(d_{1jk}) = \det(d_{2jk}) = -a^2$, $\det^{(i)}D = a^4$,
$\det(d_{i1k}) = \det(d_{i2k}) = a^2(a+1)^2$, $\det^{(j)}D = a^4(a+1)^4$,
$\det(d_{ij1}) = \det(d_{ij2}) = (a+1)^2$, $\det^{(k)}D = (a+1)^4$;

4) $D \in \mathbf{GL}^{(i)}_{2\times 2\times 2}(P) \Leftrightarrow a \in P^*$,

$D \in \mathbf{GL}^{(j)}_{2\times 2\times 2}(P) \Leftrightarrow a,\ a+1 \in P^*$,

$D \in \mathbf{GL}^{(k)}_{2\times 2\times 2}(P) \Leftrightarrow a+1 \in P^*$;

5) $\det D = a^8(a+1)^8$,

$D \in \mathbf{GL}_{2\times 2\times 2}(P) \Leftrightarrow a,\ a+1 \in P^*$.

Доказательство. 1) Полагаем

$$A = (a_{ijk}),\ B = (b_{ijk}),\ C = (c_{ijk}).$$

Выпишем определители всех сечений ориентаций (*i*), (*j*) и (*k*) кубической матрицы *A*:

$$\det(a_{1jk}) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix} = a,$$

$$\det(a_{2jk}) = \det\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = a \qquad (3.1)$$

– определители сечений ориентации (*i*);

$$\det(a_{i1k}) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & 0\end{pmatrix} = -a,$$

$$\det(a_{i2k}) = \det\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -a \qquad (3.2)$$

– определители сечений ориентации (*j*);

$$\det(a_{ij1}) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(a_{ij2}) = \det\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \qquad (3.3)$$

– определители сечений ориентации (*k*).

Если $A \in \mathbf{GL}_{2\times 2\times 2}(P)$, то из (3.1) вытекает обратимость элемента *a* в *P*. Если же *a* обратим в *P*, то элемент $-a$ также обратим в *P*. Тогда из (3.1)–(3.3) следует $A \in \mathbf{GL}_{2\times 2\times 2}(P)$.

Выпишем определители всех сечений ориентаций (*i*), (*j*) и (*k*) кубической матрицы *B*:

$$\det(b_{1jk}) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & 0\end{pmatrix} = -a,$$

$$\det(b_{2jk}) = \det\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -a,$$

$$\det(b_{i1k}) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix} = a,$$

$$\det(b_{i2k}) = \det\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = a,$$

$$\det(b_{ij1}) = \det\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(b_{ij2}) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix} = 1.$$

Следовательно, $B \in \mathbf{GL}_{2\times 2\times 2}(P)$ тогда и только тогда, когда элемент *a* обратим в *P*.

Выпишем определители всех сечений ориентаций (*i*), (*j*) и (*k*) кубической матрицы *C*:

$$\det(c_{1jk}) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(c_{2jk}) = \det\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(c_{i1k}) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & a\end{pmatrix} = a,$$

$$\det(c_{i2k}) = \det\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = a,$$

$$\det(c_{ij1}) = \det\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -a,$$

$$\det(c_{ij2}) = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & 1\end{pmatrix} = -a.$$

Следовательно, $C \in \mathbf{GL}_{2\times 2\times 2}(P)$ тогда и только тогда, когда элемент *a* обратим в *P*.

2) Так как

$$(d_{1jk}) = (a_{1jk})(b_{2jk})(c_{1jk}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+a+1 & a+1 \\ a^2+a & a \end{pmatrix},$$
$$(d_{2jk}) = (a_{2jk})(b_{1jk})(c_{2jk}) =$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & a \\ a+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a^2+a \\ a+1 & a^2+a+1 \end{pmatrix},$$

то верно равенство из 2).

3) Имеем

$$\det(d_{1jk}) = \begin{vmatrix} a^2+a+1 & a+1 \\ a^2+a & a \end{vmatrix} = -a^2,$$
$$\det(d_{2jk}) = \begin{vmatrix} a & a^2+a \\ a+1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} = -a^2,$$

откуда следует $\det^{(i)}D = a^4$.

Имеем

$$\det(d_{i1k}) = \begin{vmatrix} a^2+a+1 & a+1 \\ a & a^2+a \end{vmatrix} = a^2(a+1)^2,$$
$$\det(d_{i2k}) = \begin{vmatrix} a^2+a & a \\ a+1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+1)^2,$$

откуда следует $\det^{(j)}D = a^4(a+1)^4$.

Имеем

$$\det(d_{ij1}) = \begin{vmatrix} a^2+a+1 & a^2+a \\ a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2,$$
$$\det(d_{ij2}) = \begin{vmatrix} a+1 & a \\ a^2+a & a^2+a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2,$$

откуда следует $\det^{(k)}D = (a+1)^4$.

4) Если $D \in \mathbf{GL}^{(i)}_{2\times2\times2}(P)$, то из первого равенства в 3) следует обратимость в P элемента a.

Если же элемент a обратим в P, то элемент a^2 также обратим в P. Следовательно, $D \in \mathbf{GL}^{(i)}_{2\times2\times2}(P)$. Оставшиеся два соотношения доказываются аналогично.

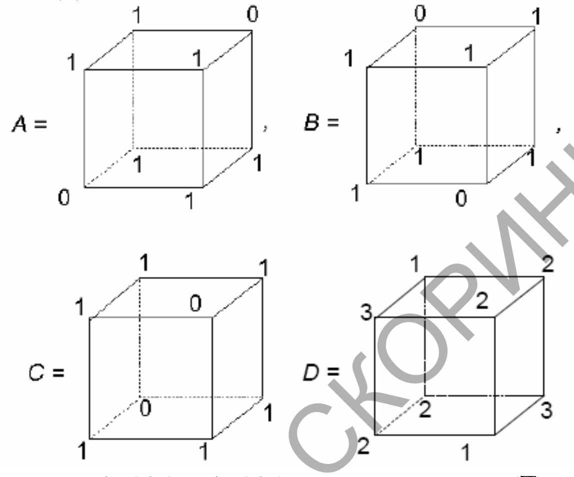
5) Следует из 3) и 4). Лемма доказана.

***Пример* 3.1**. Положим в лемме 3.1 P – кольцо всех целых чисел. Тогда, согласно 1), $A, B, C \in \mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда $a = 1$ или $a = -1$.

Если $a = 1$, то элемент $a + 1 = 2$ необратим в $\mathbb{Z}$; если же $a = -1$, то элемент $a + 1 = 0$ также необратим в $\mathbb{Z}$. Таким образом, при $a = 1$ или $a = -1$ пространственные матрицы A, B, C принадлежат множеству $\mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z})$, а пространственная матрица $[ABC]^{(i)}_{3,(12),2} = D$, согласно 5), не принадлежит этому множеству. Следовательно, множество $\mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z})$ не является замкнутым относительно операции $[\ ]^{(i)}_{3,(12),2}$.

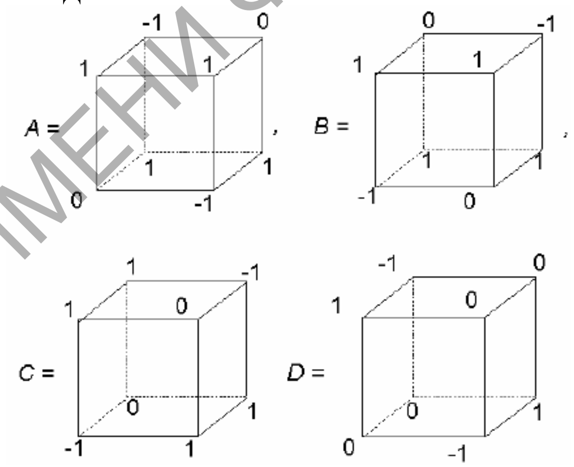
В этом можно убедиться непосредственно, если выписать явный вид пространственных матриц A, B, C и D.

Для $a = 1$ имеем



Так как $\det(d_{ij1}) = \det(d_{ij2}) = 4$, то $D \notin \mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z})$.

Для $a = -1$ имеем



Так как $\det(d_{ij1}) = \det(d_{ij2}) = 0$, то $D \notin \mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{Z})$.

***Пример* 3.2**. Положим в лемме 3.1 P – кольцо всех действительных чисел. Тогда, согласно 1), $A, B, C \in \mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $a \neq 0$, а согласно 5), $D \notin \mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ или $a = -1$. Поэтому, например, при $a = -1$ имеем $A, B, C \in \mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{R})$, но

$$[ABC]^{(i)}_{3,(12),2} = D \notin \mathbf{GL}_{2\times2\times2}(\mathbb{R}).$$

Явный вид кубических матриц A, B, C и D тот же, что и в примере 3.1 при $a = -1$.

Примеры 3.1 и 3.2 показывают, что множество $\mathbf{GL}_{n\times n\times n}(P)$ может быть незамкнутым относительно операций $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$. Таким образом, ответ на поставленный перед леммой 3.1 вопрос является отрицательным.

4 Транспонирование косых пространственных матриц

Для любого элемента a n-арной группы $< A, [\ ] >$ решение уравнения $[x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = a$

обозначают символом $\overline{a}$ и называют косым элементом для a.

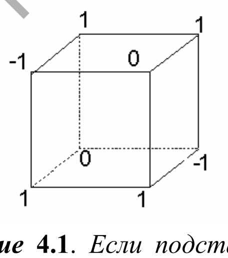
Таким образом, для каждой пространственной вектор-матрицы A l-арной группы $< \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P),\ [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$ существует косой элемент, который естественно называть косой пространственной матрицей для A. Для обозначения косой пространственной матрицы для A будем использовать символ A^{-}, так как символ $\overline{A}$ уже используется для обозначения комплексно-сопряженной пространственной матрицы для A.

Подчеркнем, что косые пространственные матрицы определяются для пространственных матриц из $< \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P),\ [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$, у которых, согласно определению, все сечения ориентации (i) являются обратимыми квадратными матрицами одного и того же порядка n, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$.

Вообще говоря, в обозначении косого элемента должен присутствовать символ полиадической операции, который, как правило, не указывают, чтобы не загромождать записи. Однако, в некоторых случаях, присутствие символа полиадической операции в обозначении косого элемента желательно. В таких случаях для обозначения косого элемента a n-арной группы $< A,\ [\ ]_{l,\sigma,k} >$ будем использовать символ $A^{\overline{[\,]}}$. В частности, $A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}}$ – косая пространственная матрица для пространственной матрицы A из $< \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P),\ [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$. Отметим, что такое обозначение косой пространственной матрицы, на наш взгляд, является более удобным, чем обозначение косой вектор-матрицы, используемое в [5].

***Пример* 4.1.** Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что в тернарной группе $< \mathbf{GL}^{(i)}_{2\times 2\times 2}(P),\ [\ ]^{(i)}_{3,(12),2} >$ косой пространственной матрицей для матрицы A из примера 3.1 (случай $a = -1$) является пространственная матрица

$A^{\overline{[\,]^{(i)}_{3,(12),2}}} =$



***Предложение* 4.1**. *Если подстановка* σ *из* S_m *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A} = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P),$$

то существует косая пространственная матрица $A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} = (b_{ijk})$, *у которой все сечения ориентации* (i) *имеют следующий вид*

$$(b_{rjk}) = (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1} \ldots (a_{\sigma(r)jk})^{-1},\ r = 1, \ldots, m. \quad (4.1)$$

Доказательство. Так как пространственная матрица A является элементом l-арной группы $< \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P),\ [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$, то существует косая пространственная матрица $A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} = (b_{ijk})$, для которой

$$[\, A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} \underbrace{A \ldots A}_{l-1} \,]^{(i)}_{l,\sigma,m} = A,$$

то есть

$$[(b_{ijk}) \underbrace{(a_{ijk}) \ldots (a_{ijk})}_{l-1}\,]^{(i)}_{l,\sigma,m} = (a_{ijk}),$$

откуда, используя определение операции $[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ и условие $\sigma^l = \sigma$, получаем

$$(b_{rjk})(a_{\sigma(r)jk}) \ldots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})(a_{rjk}) = (a_{rjk}).$$

Из последнего равенства вытекает (4.1). Предложение доказано.

Аналогично доказываются следующие два предложения.

***Предложение* 4.2**. *Если подстановка* σ *из* S_m *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A} = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P),$$

то существует косая пространственная матрица $A^{\overline{[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}}} = (b_{ijk})$, *у которой все сечения ориентации* (j) *имеют следующий вид:*

$$(b_{irk}) = (a_{i\sigma^{l-2}(r)k})^{-1} \ldots (a_{i\sigma(r)k})^{-1},\ r = 1, \ldots, m.$$

***Предложение* 4.3**. *Если подстановка* σ *из* S_m *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A} = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P),$$

то существует косая пространственная матрица $A^{\overline{[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}}} = (b_{ijk})$, *у которой все сечения ориентации* (k) *имеют следующий вид:*

$$(b_{ijr}) = (a_{ij\sigma^{l-2}(r)})^{-1} \ldots (a_{ij\sigma(r)})^{-1},\ r = 1, \ldots, m.$$

Следующая теорема устанавливает связь между операциями транспонирования и взятия косого элемента для пространственных матриц.

***Теорема* 4.1**. *Если подстановка* $\sigma \in S_m$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, *то*

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma^{-1},m}}}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Положим

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}})^{(',i)} = (d_{ijk}),\ (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma^{-1},m}}} = (c_{ijk}).$$

Так как по предложению 4.1 $A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} = (b_{ijk})$, где

$$(b_{rjk}) = (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1} \ldots (a_{\sigma(r)jk})^{-1}$$

для любого $r = 1, \ldots, m$, то, используя соответствующий бинарный результат (результат транспонирования произведения матриц равен произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке), получим

$$(d_{rjk}) = (b_{rjk})' = ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1} \ldots (a_{\sigma(r)jk})^{-1})' =$$

$$= ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \ldots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})',$$

то есть

$$(d_{rjk}) = ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \ldots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})', \quad (4.3)$$

$$r = 1, \ldots, m.$$

С другой стороны, так как r-ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы A' совпадает с матрицей $(a_{rjk})'$, то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$ и используя равенства

$$\tau = \sigma^{l-2},\ \tau^2 = \sigma^{l-3},\ \ldots,\ \tau^{l-2} = \sigma,$$

предложение 4.1 и соответствующий бинарный результат (операции транспонирования и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$(c_{rjk}) = ((a_{\tau^{l-2}(r)jk})')^{-1} \ldots ((a_{\tau(r)jk})')^{-1} =$$

$$= ((a_{\sigma(r)jk})')^{-1} \ldots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})')^{-1} =$$

$$= ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \ldots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})',$$

то есть

$$(c_{rjk}) = ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \ldots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})', \quad (4.4)$$

$$r = 1, \ldots, m.$$

Из (4.3) и (4.4) вытекает (4.2). Теорема доказана.

Если σ – цикл длины t из S_m, $s \geq 1$, $l = st + 1$, то $\sigma^l = \sigma$. Поэтому имеет место

***Следствие* 4.1**. *Если σ – цикл длины t из S_m, $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, то*

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{st+1,\sigma,m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{st+1,\sigma^{-1},m}}}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{t+1,\sigma,m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{t+1,\sigma^{-1},m}}}.$$

Полагая в следствии 4.1 $t = m$, получим

***Следствие* 4.2**. *Если σ – цикл длины m из S_m, $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, то*

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{sm+1,\sigma,m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{sm+1,\sigma^{-1},m}}}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{m+1,\sigma,m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{m+1,\sigma^{-1},m}}}.$$

Полагая в следствии 4.2 $\sigma = (12 \ldots m)$, получим

***Следствие* 4.3**. *Если $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, то* $(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{sm+1,(12\ldots m),m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{sm+1,(m\ldots 21),m}}}$.

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{m+1,(12\ldots m),m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{m+1,(m\ldots 21),m}}}.$$

Так как для любой транспозиции $\sigma \in S_m$ верно $\sigma = \sigma^{-1}$, $\sigma^{2m+1} = \sigma$, то, полагая в следствии 4.1 $t = 2$, получим

***Следствие* 4.4**. *Если σ – транспозиция из S_m, $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, то*

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{2s+1,\sigma,m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{2s+1,\sigma,m}}}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{3,\sigma,m}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{3,\sigma,m}}}.$$

Если в следствии 4.4 положить $m = 2$, то $\sigma = (12)$ и верно

***Следствие* 4.5**. *Если* $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{2\times n\times n}(P)$, *то* $(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{3,(12),2}}})^{(',i)} = (A^{(',i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{3,(12),2}}}$.

***Замечание* 4.1.** В каждом из следствий 4.4 и 4.5 косые элементы в левой и правой частях равенств, в отличие от теоремы 4.1 и следствий 4.1–4.3, рассматриваются в одной и той же полиадической группе, поэтому равенства в этих следствиях могут быть записаны проще, без указания полиадической операции. Как, например, в обычных группах:

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

***Замечание* 4.2.** Все равенства из теоремы 4.1 и её следствий 4.1–4.5 останутся верными, если в них заменить пространственные матрицы из $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}$), а ориентацию (i) – на ориентацию (j) (соответственно на ориентацию (k)).

5 *Определитель косой пространственной матрицы*

***Теорема* 5.1.** *Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,* то

$$\det{}^{(i)} A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{l-2}, \quad (5.1)$$

где в левой части присутствует косой элемент для $A = (a_{ijk}) \in \langle \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}\rangle$, а в правой части присутствует обратный элемент для элемента $\det^{(i)}A$ группы P^*.

Доказательство. Применяя предложение 4.1 и используя определение определителя пространственной матрицы, получим

$$\det{}^{(i)} A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} = \det((a_{\sigma^{l-2}(1)jk})^{-1} \ldots (a_{\sigma(1)jk})^{-1}) \ldots$$

$$\ldots \det((a_{\sigma^{l-2}(m)jk})^{-1} \ldots (a_{\sigma(m)jk})^{-1}),$$

откуда, используя соответствующие бинарные результаты, коммутативность кольца P и совпадение множеств

$$\{1, \ldots, m\},\ \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \{\sigma^{l-2}(1), \ldots, \sigma^{l-2}(m)\},$$

получим

$$\det{}^{(i)} A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} = \det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk})^{-1} \ldots \det(a_{\sigma(1)jk})^{-1} \ldots$$

$$\ldots \det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk})^{-1} \ldots \det(a_{\sigma(m)jk})^{-1} =$$

$$= (\det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk}))^{-1} \ldots (\det(a_{\sigma(1)jk}))^{-1} \ldots$$

$$\ldots (\det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk}))^{-1} \ldots (\det(a_{\sigma(m)jk}))^{-1} =$$

$$= (\det((a_{\sigma(m)jk}) \ldots \det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk}) \ldots \det(a_{\sigma(1)jk}) \ldots$$

$$\ldots \det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk}))^{-1} =$$

$$= (\det(a_{\sigma(1)jk}) \ldots \det(a_{\sigma(m)jk}) \ldots$$

$$\ldots \det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk}) \ldots \det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk}))^{-1} =$$

$$= (\underbrace{\det(a_{1jk})\ldots\det(a_{mjk})\ldots\det(a_{1jk})\ldots\det(a_{mjk})}_{l-2})^{-1} =$$

$$= ((\det{}^{(i)}\mathrm{A})^{l-2})^{-1} = ((\det{}^{(i)}\mathrm{A})^{-1})^{l-2}.$$

Следовательно, верно (5.1). Теорема доказана.

***Следствие* 5.1**. *Если* σ *– цикл длины* t *из* S_m, $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, *то*

$$\det{}^{(i)} A^{\overline{[\,]^{(i)}_{st+1,\sigma,m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{st-1}.$$

В частности, если $s = 1$, *то*

$$\det{}^{(i)} A^{\overline{[\,]^{(i)}_{t+1,\sigma,m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{t-1}.$$

***Следствие* 5.2**. *Если* σ *– цикл длины* m *из* S_m, $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, *то*

$$\det{}^{(i)} A^{\overline{[\,]^{(i)}_{sm+1,\sigma,m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{sm-1}.$$

В частности, *если* $s = 1$, *то*

$$\det{}^{(i)} A^{\overline{[\,]^{(i)}_{m+1,\sigma,m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{m-1}.$$

***Следствие* 5.3**. *Если* $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, *то*

$$\det A^{\overline{[\,]^{(i)}_{sm+1,(12\ldots m),m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{sm-1}.$$

В частности, *если* $s = 1$, *то*

$$\det A^{\overline{[\,]^{(i)}_{m+1,(12\ldots m),m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{m-1}.$$

***Следствие* 5.4**. *Если* σ *– транспозиция из* S_m, $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, *то*

$$\det A^{\overline{[\,]^{(i)}_{2s+1,\sigma,m}}} = ((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{2s-1}.$$

В частности, *если* $s = 1$, *то*

$$\det A^{\overline{[\,]^{(i)}_{3,\sigma,m}}} = (\det{}^{(i)}A)^{-1}.$$

***Следствие* 5.5**. *Если* $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{2\times n\times n}(P)$, *то* $\det A^{\overline{[\,]^{(i)}_{3,(12),2}}} = (\det{}^{(i)}A)^{-1}$.

***Замечание* 5.1.** Все равенства из теоремы 5.1 и её следствий 5.1–5.5 останутся верными, если в них заменить пространственные матрицы из $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}$), а ориентацию (i) – на ориентацию (j) (соответственно на ориентацию (k)).

6 *Определитель полиадической степени пространственной матрицы*

Для всякого элемента a l-арной полугруппы $< A, [\,] >$ естественным образом определяются натуральные степени

$$a^{[0]} = a,\ a^{[1]} = [\underbrace{a \ldots a}_{l}],$$

$$a^{[2]} = [\underbrace{a \ldots a}_{2l-1}],\ \ldots,\ a^{[s]} = [\underbrace{a\ \ldots\ a}_{s(l-1)+1}],\ \ldots$$

В частности, для ориентации (i), всякого натурального s и любой пространственной матрицы A l-арной полугруппы $< \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), [\,]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$ определяется s-ая степень ориентации (i):

$$A^{[0,(i)]} = A,\ A^{[s,(i)]} = [\underbrace{A\ \ldots\ A}_{s(l-1)+1}]^{(i)}_{l,\sigma,m}.$$

Аналогично, для ориентации (j), всякого натурального s и любой пространственной матрицы A l-арной полугруппы $< \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), [\,]^{(j)}_{l,\sigma,m} >$ определяется s-ая степень ориентации (j):

$$A^{[0,(j)]} = A,\ A^{[s,(j)]} = [\underbrace{A\ \ldots\ A}_{s(l-1)+1}]^{(j)}_{l,\sigma,m}.$$

Для ориентации (k), всякого натурального s и любой пространственной матрицы A l-арной полугруппы $< \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), [\,]^{(k)}_{l,\sigma,m} >$ определяется s-ая степень ориентации (k):

$$A^{[0,(k)]} = A,\ A^{[s,(k)]} = [\underbrace{A\ \ldots\ A}_{s(l-1)+1}]^{(k)}_{l,\sigma,m}.$$

Теорема 6.1 [1] позволяет сформулировать

***Предложение* 6.1.** *Для любого целого* $s \geq 0$, *любой подстановки* $\sigma \in S_m$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$, *и любой пространственной матрицы* A l*-арной полугруппы* $< \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), [\,]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$ *верно равенство*

$$\det{}^{(i)}A^{[s,(i)]} = (\det{}^{(i)}A)^{s(l-1)+1}. \qquad (6.1)$$

***Замечание* 6.1.** В правой части равенства (6.1) присутствует обычная степень элемента полугруппы P.

Для всякого элемента a l-арной группы $< A, [\,] >$ помимо положительных степеней определяются [4], [8] и отрицательные степени: для любого целого $s < 0$ степень $a^{[s]}$ есть решение уравнения

$$[x \underbrace{a\ \ldots\ a}_{-s(l-1)}] = a.$$

Отрицательную степень можно определить [9] с помощью косого элемента:

$$a^{[s]} = [\underbrace{\bar{a} \ldots \bar{a}}_{-2s}\ \underbrace{a\ \ldots\ a}_{-s(l-3)+1}],\ s < 0.$$

Так как при $s = -1$

$$a^{[-1]} = [\bar{a}\bar{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{l-2}] = \bar{a},$$

то $\bar{a} = a^{[-1]}$.

Таким образом, $A^{[-1,(i)]} = A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}}$,

$$A^{[s,(i)]} = [\underbrace{A^{[-1,(i)]} \ldots A^{[-1,(i)]}}_{-2s}\ \underbrace{A\ \ldots\ A}_{-s(l-3)+1}] \qquad (6.2)$$

для всякого целого $s < 0$ и любой пространственной матрицы A l-арной группы

$$< \mathbf{GL}_{m\times n\times n}(P), [\,]^{(i)}_{l,\sigma,m} >.$$

***Теорема* 6.1.** *Для любого целого* s, *любой подстановки* $\sigma \in S_m$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$, *и любой пространственной матрицы* A l*-арной группы* $< \mathbf{GL}_{m\times n\times n}(P), [\,]^{(i)}_{l,\sigma,m} >$ *верно равенство* (6.1).

Доказательство. Если $s \geq 0$, то применяется предложение 6.1.

Для $s < 0$, используя теоремы 6.1 [1] и 5.1, а также (6.2), получим

$$\det{}^{(i)}A^{[s,\,(i)]} = \det{}^{(i)}[\,\underbrace{A^{[-1,\,(i)]}\ldots A^{[-1,\,(i)]}}_{-2s}\ \underbrace{A\ \ldots\ A}_{-s(l-3)+1}\,] =$$

$$= \underbrace{\det{}^{(i)} A^{[-1,\,(i)]}\ldots\det{}^{(i)} A^{[-1,\,(i)]}}_{-2s}\ \underbrace{\det{}^{(i)} A\ \ldots\ \det{}^{(i)} A}_{-s(l-3)+1} =$$

$$= (((\det{}^{(i)}A)^{-1})^{l-2})^{-2s}(\det{}^{(i)}A)^{-s(l-3)+1} =$$

$$= (\det{}^{(i)}A)^{2s(l-2)}(\det{}^{(i)}A)^{-s(l-3)+1} = (\det{}^{(i)}A)^{s(l-1)+1},$$

то есть верно (6.1). Теорема доказана.

***Замечание* 6.2.** Теорема 6.1 остается верной, если в ней заменить пространственные матрицы из $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}$), а ориентацию (i) – на ориентацию (j) (соответственно на ориентацию (k)).

***Замечание* 6.3.** Теорема 5.1 получается из теоремы 6.1 при $s = -1$.

***Замечание* 6.4.** Теорема 6.1 может быть получена из теоремы 6.1 [7] с использованием приведенной ниже леммы. С помощью этой же леммы можно перейти от теоремы 6.1 [7] к теореме 6.1.

***Лемма* 6.1.** *Для любой вектор-матрицы* $\mathbf{A}$ *из* $\mathbf{GL}_n(m, P)$ *и любой пространственной матрицы* A *из* $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ *справедливы равенства*

$$\det\mathbf{A} = \det{}^{(i)}(\varphi_{(i)}(\mathbf{A})),$$

$$\det{}^{(i)}A = \det(\psi_{(i)}(A)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* О вектор-матрицах и пространственных матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – №1 (10). – С. 75–86.

2. *Гальмак, А.М.* Полиадические операции на множестве пространственных матриц / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2011. – №2(62). – С. 15–21.

3. *Гальмак, А.М.* Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – №1 (37), серия В. – С. 30 – 37.

4. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208–350.

5. *Гальмак, А.М.* Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №1 (6). – С. 52–56.

6. *Гальмак, А.М.* О σ-согласованных вектор-матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №4 (9). – С. 92–97.

7. *Гальмак, А.М.* Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №2 (7). – С. 1–5.

8. *Русаков С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

9. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА – 002).

Поступила в редакцию 22.12.11.