

ить суперпозицией двух гауссовых кривых; причем приведенное выше рассмотрение условий равномерного облучения нетрудно обобщить на этот случай.

Для того чтобы центры пятен образовали на поверхности прямоугольную решетку (см. рис. 1), пучок должен двигаться относительно объекта по принципу строчной развертки. Для этого достаточно перед пучком соответствующим образом перемещать сам облучаемый объект: он пересекает пучок со скоростью v и за его пределом смещается на величину δ (расстояние между строками). Приняв во внимание, что в выражении (7) $\epsilon = \delta$, а $\epsilon = \frac{v}{f}$, и учитывая, что $S = aeft$, получим формулу для вычисления средней поглощенной дозы:

$$D = 0,1 \frac{\left(\frac{dE}{dz}\right) I_0}{\delta v} \text{ Мрад.} \quad (9)$$

На практике проще пользоваться другим вариантом облучения. Облучаемые объекты располагаются по поверхности цилиндрического барабана достаточно большого радиуса, который вращается перед пучком, одновременно перемещаясь вдоль своей оси на величину δ за оборот. Приняв во внимание, что в данном случае в формуле (9) $v = 2\pi nR$, где n — число оборотов барабана в 1 сек, а R — радиус вращения поверхности объекта, для средней поверхностной дозы получим

$$D = \frac{0,1}{2\pi} I_0 \frac{dE}{dz} \cdot \frac{1}{R\delta n} \text{ Мрад.} \quad (10)$$

Другой практически важный вариант заключается в однократной протяжке перед пучком со скоростью v ленты шириной H . Если пучок не развернут, то, используя приведенную выше теорию, можно записать

$$\epsilon = \frac{D_{\min}}{D_{\max}} = q_1 \sin^{1/2} \alpha_2 = q_1 \frac{\vartheta_2(q_2)}{\vartheta_3(q_2)}, \quad (11)$$

$$q_1 = e^{-H^2/8\sigma^2}; \quad q_2 = e^{-b^2/2\sigma^2}.$$

Доза будет минимальной на краю объекта в точке, отстоящей на равном расстоянии от центров пятен. При достаточно больших значениях σ можно добиться удовлетворительной равномерности облучения и в дан-

ном варианте. Найдем среднюю поглощенную дозу при облучении ленты, длина которой много больше σ . Для этого в формуле (7) достаточно заменить полный ток пучка I_0 на ток I_1 части пучка, попадающего на ленту. Заметив, что в (1) $I_{\max} = \frac{I_0}{2\pi\sigma^2}$ и $r^2 = x^2 + y^2$, найдем

$$I_1 = I_{\max} \int_{-H/2}^{H/2} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy = I_0 \Phi\left(\frac{H}{2\sigma}\right), \quad (12)$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2/2} dt$$

интеграл вероятностей, значения которого берутся из таблиц. Подставив в (7) значения I_1 и $\frac{S}{t} = Hv$, получим

$$D = 0,1 \left(\frac{dE}{dz}\right) I_0 \frac{\Phi\left(\frac{H}{2\sigma}\right)}{Hv} \text{ Мрад.} \quad (13)$$

В заключение авторы пользуются возможностью поблагодарить А. Х. Брегера за участие в обсуждении работы.

Поступило в Редакцию 26/VIII 1964 г.
В окончательной редакции 20/VII 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Х. Брегер. Источники ядерных излучений и их применение в радиационно-химических процессах. М., Изд-во ВИНТИ, 1960.
2. K. W r i g h t. Introduction Electron Beam Technology, J. Willy. N.Y.—London, 1962.
3. Е. Я н к е, Ф. Э м д е. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
4. Радиационная дозиметрия. Под ред. Дж. Хайна и Г. Браунелла. М., Изд-во иностр. лит., 1958.

УДК 621.039.56

Об оптимальном управлении тепловыми процессами ядерного реактора

И. М. Курбатов, М. П. Леончук, А. С. Трофимов

В работе [1] рассматривалась задача оптимального управления на быстродействие переходным тепловым процессом ядерного реактора, причем управление осуществлялось изменением расхода теплоносителя G (τ) при линейном законе изменения мощности реактора, часто являющемся определяющим условием переходного режима:

$$q(\tau) = \begin{cases} \frac{q^*}{\tau^*} \tau, & 0 \leq \tau \leq \tau^*; \\ q^*, & \tau > \tau^*. \end{cases} \quad (1)$$

В настоящей работе продолжают исследования динамических свойств тепловой модели ядерного реактора как элемента системы регулирования. При этом, как и в работе [1], влияние других элементов энергетической установки (теплообменников, циркуляционного насоса, системы регулирования мощности и др.) на переходные процессы в реакторе не учитывается.

В работе ставятся две задачи. Первая состоит в том, что при заданном линейном законе изменения q (τ) определяется расход G (τ), обеспечивающий при переходном процессе наименьшее отклонение от линейно-

го закона температуры на выходе $\theta(\tau, 1)$:

$$\theta^*(\tau) = \begin{cases} \frac{\bar{\theta}}{\tau^*} \tau, & 0 \leq \tau \leq \tau^*; \\ \bar{\theta}, & \tau > \tau^*, \end{cases}$$

т. е. требуется получить минимум функционала

$$\psi = \int_0^{\infty} \frac{N}{2} [\theta(\tau, 1) - \theta^*(\tau)]^2 d\tau. \quad (2)$$

Это условие позволяет выбрать оптимальные скорости перевода установки с одной мощности на другую.

Вторая задача предполагает, что закон изменения $q(\tau)$ принимается произвольным. Регулирующие параметры [функции $G(\tau)$, $q(\tau)$] находят из условия минимума времени переходного процесса. Такая постановка задачи будет, пожалуй, наиболее полной в смысле проверки потенциальных возможностей динамики реактора.

1. Предположим, что тепловые процессы в канале реактора описываются системой уравнений в частных производных [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + G(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial z} &= Ku + (1-G) \eta(z), & 0 \leq z \leq 1; \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \xi \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + K\psi u &= \psi \eta(z) q(\tau), & 0 \leq \tau \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

при следующих граничных условиях:

$$\tau=0; \quad \theta=u=0; \quad z=0; \quad \theta=\theta_+(\tau); \quad [\theta_+(\tau)=0].$$

При этом необходимо, чтобы управляющие функции в переходном процессе удовлетворяли ограничениям

$$\left. \begin{aligned} 0 < G_{\min} \leq G(\tau) \leq G_{\max}; \\ q_{\min} \leq q(\tau) \leq q_{\max}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

а решение системы удовлетворяло ограничениям

$$\theta_{\min} \leq \theta(\tau, 1) \leq \theta_{\max}, \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial \theta(\tau, 1)}{\partial \tau} \right| \leq \beta. \quad (6)$$

Необходимо также, чтобы параметры приходили в новое стационарное состояние, соответствующее статическим характеристикам реактора:

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}(T) \bar{\theta}(T, z) &= [1 - \bar{G}(T) + q^*] \int_0^z \eta(z) dz; \\ \bar{\theta}(T, 1) &= \bar{\theta} = \text{const}; \\ K\bar{u}(T, z) &= q^* \eta(z) \text{ при } T \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(Для конечного T условия (7) должны выполняться с заданной точностью. В выражениях (4)–(7) $G_{\min}$, $G_{\max}$, $q_{\min}$, $q_{\max}$, $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$, β и $\bar{\theta}$ — константы, определяемые параметрами и условиями работы реактора.) Распределение энерговыделения по высоте реактора $\eta(z)$ в расчетах принималось в виде

$$\eta(z) = 1,21 \cos \frac{2}{3} \pi (z - 0,5).$$

Для решения использовалась методика, изложенная в работе [3].

II. Приведем алгоритм решения второй задачи.

1. Аппроксимируя уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений (метод прямых), приходим к задаче оптимального управления, связанной с решением обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{d\tau} = f(y, G, q, \tau), \quad (8)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$ — значения θ , u на прямых, причем $y(0) = y_0$; $y(T) = y_T$ (y_0, y_T — заданы).

2. Для учета ограничений (6) используем метод штрафных функций [1] и присоединим к системе (8) уравнение

$$\frac{dy_{n+1}}{d\tau} = \begin{cases} \frac{N_0}{2} \left[\frac{dy_n}{d\tau} \pm \beta \right]^2, & \text{если } \left| \frac{\partial \theta(\tau, 1)}{\partial \tau} \right| \geq \beta; \\ 0, & \text{если } \left| \frac{\partial \theta(\tau, 1)}{\partial \tau} \right| \leq \beta, \end{cases} \quad (8')$$

причем $y_{n+1}(0) = y_{n+1}(T) = 0$; $\theta(\tau, 1) = y_n$.

Таким образом, приходим к задаче на быстродействие с условиями (8), (8') при $\tau = T$.

3. Для решения задачи используем принцип максимума Понтрягина [4]. Для этого составим функцию Гамильтона $H = \dot{p}r$, где

$$\dot{p} = - \frac{\partial f}{\partial y} p. \quad (9)$$

Согласно принципу максимума оптимальные управляющие функции определяются из условия максимума H при

$$(G, q) \in \bar{Q}. \quad (10)$$

Область $\bar{Q}$ определяется в работе [4].

4. Задаем некоторое значение $T = T_0$, для которого методом последовательных приближений решаем задачу на минимум функционала

$$I(G, q) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{N_i}{2} [y_i(T_0) - y_i T]^2; \quad (11)$$

а) задаем $[G^0(\tau), q^0(\tau)] \in \bar{Q}$, решаем задачу Коши от 0 до T_0 и определяем из (11) $\partial I / \partial y$ при $\tau = T_0^*$;

б) используя $\partial I / \partial y$ в качестве граничных условий для сопряженной системы (9) при $\tau = T_0$ и решая (9) от T_0 к 0, находим вдоль решения (8), (8'), (9)

$$\frac{\partial H}{\partial G}, \frac{\partial H}{\partial q}, \quad 0 \leq \tau \leq T_0 \quad \left| \frac{\partial H}{\partial G} \right| \text{ и } \left| \frac{\partial H}{\partial q} \right|; \quad \text{макс}$$

в) исходя из условия (10), строим метод последовательных приближений с использованием градиента функции H :

$$\begin{aligned} G^{(k+1)} &= G^{(k)} + \frac{\lambda_1}{\text{макс } |\partial H^{(k)} / \partial G|} \cdot \frac{\partial H^{(k)}}{\partial G}; \\ q^{(k+1)} &= q^{(k)} + \frac{\lambda_2}{\text{макс } |\partial H^{(k)} / \partial q|} \cdot \frac{\partial H^{(k)}}{\partial q}, \end{aligned}$$

* Величина T_0 может быть определена при решении системы (8), (8'), в которой нарушается ограничение (5) для заданных $G^0(\tau)$, $q^0(\tau)$.

$\vartheta(\tau), G(\tau), u, \theta(\tau, 1)$
1,0 1,3 0,015

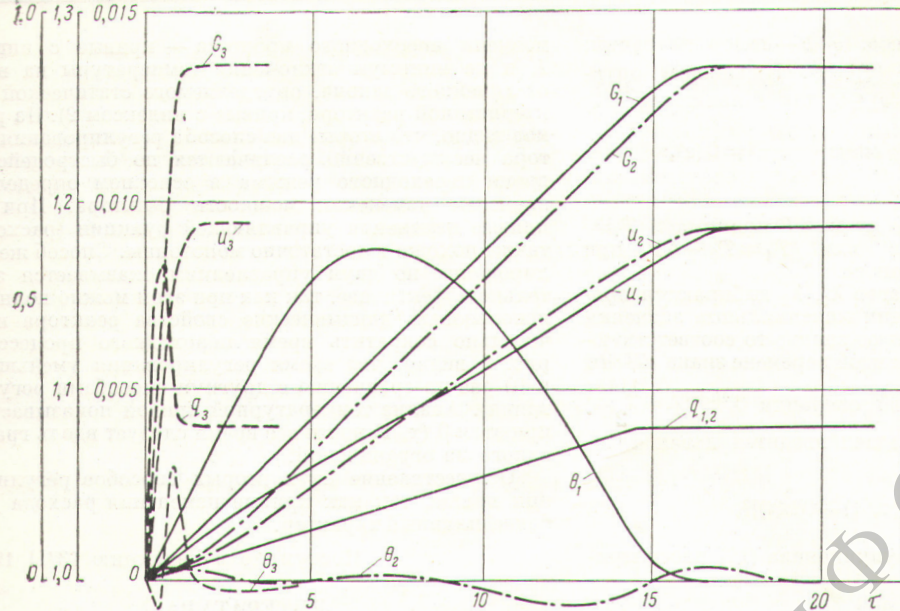


Рис. 1. Подъем мощности реактора при $q^* = 0,277$; $\bar{\theta} = 0$.

$\bar{\theta}(\tau, 1), G(\tau), u(\tau, 1)$
 $q(\tau)$

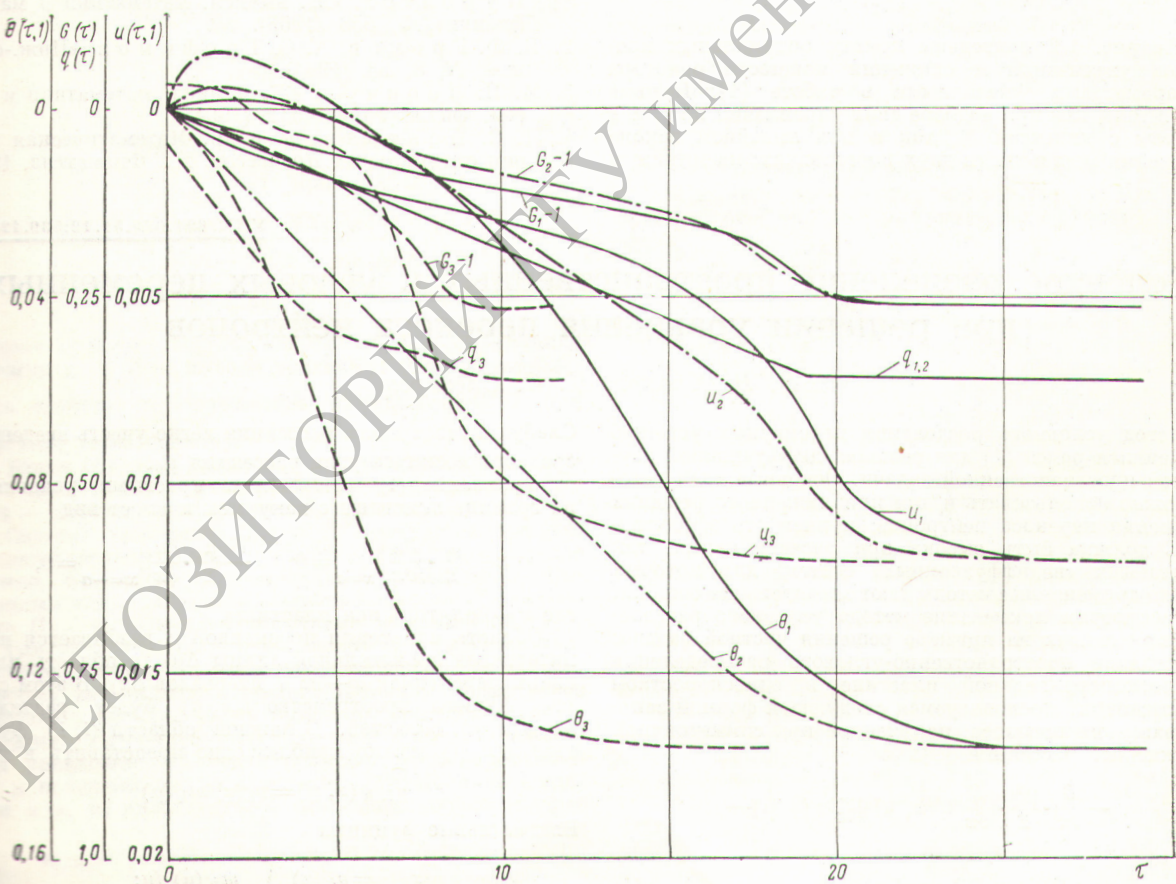


Рис. 2. Снижение мощности реактора при $q^* = -0,361$; $\bar{\theta} = -0,137$.

где λ_1, λ_2 — величины шагов, а k — номер итерации; при этом $[G^{(k+1)}(\tau), q^{(k+1)}(\tau)] \in \bar{Q}$. Признаком оптимальности управления $(G, q) \in \bar{Q}$ для I являются

$$\max_{\tau} \left| \frac{\partial H}{\partial G} \right| = 0(\varepsilon) \text{ и } \max_{\tau} \left| \frac{\partial H}{\partial q} \right| = 0(\varepsilon),$$

где ε — заданная точность.

5. Далее, в зависимости от мин I принимаем $T_1 = T_0 + \Delta T$ при мин $I \geq \varepsilon$ или $T_1 = T_0 - \Delta T$ при мин $I < \varepsilon$ и повторяем процесс.

6. Вначале величины шагов λ_1, λ_2 выбираются произвольно. Если при итерации максимальные значения $\partial H / \partial G$ или $\partial H / \partial q$ не изменяют знака, то соответствующие λ удваиваются, а при каждой перемене знака dH/dG или dH/dq для следующей операции $\lambda^{(k+1)} = \frac{\lambda^{(k)}}{2}$.

Для решения первой задачи вводится новая фазовая координата

$$\frac{dy_{n+2}}{d\tau} = \frac{N}{2} [\theta(\tau, 1) - \theta^*(\tau)]^2, \quad (8'')$$

где $y_{n+2}(0) = 0$, и вместо функционала (11) рассматривается

$$I_1 = \frac{N_{n+2}}{2} y_{n+2}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{N_i}{2} (y_i - y_{iT})^2. \quad (11')$$

На рис. 1, 2 приведены кривые оптимальных процессов увеличения и снижения мощности реактора с параметрами, указанными в работе [1]. Кривые рассчитаны как при подборе двух управлений по G и q (кривые с индексом 3), так и при линейном законе изменения мощности (в двух постановках: на минимум

времени переходного процесса — кривые с индексом 1, и на минимум отклонения температуры на выходе от линейного закона, определяемого статической характеристикой реактора, кривые с индексом 2). Из рисунков видно, что вторые два способа регулирования реактора несущественно различаются по быстродействию: время переходного режима в основном определяется временем изменения мощности реактора. При этом кривые изменения управляющей функции (расхода G) также похожи и достаточно монотонны. Способ же регулирования по двум управлениям оказывается значительно эффективнее, так как при этом можно полностью использовать динамические свойства реактора и значительно сократить время переходного процесса (на рис. 1 видно, что время регулирования уменьшилось в 10 раз по сравнению с другими способами регулирования). Анализ температурной кривой показывает, что при этом $\theta(\tau, 1)$ почти все время следует вдоль границы одного из ограничений.

Осуществление двух вторых способов регулирования проще, так как кривые изменения расхода носят более плавный характер.

Поступило в Редакцию 13/II 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Леончук, А. С. Трофимов, И. М. Курбатов. «Ж. вычисл. математики и матем. физики», 5, 558 (1965).
2. Б. Ф. Громов, А. С. Трофимов. «Инж.-физ. ж.», № 8, 31 (1964).
3. М. П. Леончук. «Ж. вычисл. математики и матем. физ.», № 4, 1112 (1964).
4. Л. С. Понтрягин и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1964.

УДК 621.039.51.12:539.125.52

Условное разделение пространственных и угловых переменных при решении уравнения переноса нейтронов

В. В. Хромов, И. С. Слесарев

Метод условного разделения переменных успешно применялся ранее [1] для решения диффузионной двумерной пространственной задачи. Основные идеи метода можно использовать и для приближенного решения уравнения переноса нейтронов, причем его эффективность должна быть высока при расчете малых, так называемых «недиффузионных» систем, для которых обычно применяемые методы дают значительные ошибки.

Рассмотрим применение метода условного разделения переменных на примере решения частной задачи: определение пространственно-углового распределения в плоскопараллельной пластине в односкоростном приближении. Воспользуемся следующей формой записи уравнения переноса, полученной при симметричной индикатрисе рассеяния [2]:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\mu^2}{\Sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x, \mu) + \Sigma u(x, \mu) - (\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f) \int_0^1 u(x, \mu) d\mu = 0. \quad (1)$$

Слабую анизотропию рассеяния легко учесть введением среднего косинуса угла рассеяния μ_0 .

Уравнение (1) решается с крайними условиями на границе пластины с вакуумом и имеет вид

$$u + \frac{\mu}{\Sigma} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0; \quad u - \frac{\mu}{\Sigma} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-a} = 0, \quad (2)$$

где a — полутолщина пластины.

Область изменения переменной μ разбивается на K интервалов произвольной длины $\Delta\mu_k$, а область изменения переменной x — на I интервалов Δx_i . В этом случае фазовое пространство (x, μ) будет разделено на $u(x, \mu)$ областей. В каждой области (i, k) функцию $u(x, \mu)$ можно приближенно представить в виде

$$u_{i,k}(x, \mu) = v_i(x) m_k(\mu). \quad (3)$$

Введем новые функции

$$x_{i,k} = v_i(x) \int_{\Delta\mu_k} m_k(\mu) d\mu; \quad (4)$$