

# Основные свойства нелинейной фокусировки

В. В. ВЕЧЕСЛАВОВ, Ю. Ф. ОРЛОВ

УДК 621.384.60

На простом примере нелинейной фокусировки в симметричном магнитном поле пятой степени проведен анализ основных свойств фокусировки такого типа. Определены размеры первой области устойчивости с учетом нелинейных малых  $z$ -колебаний. Исследовано влияние  $r - z$ -резонансов, сохранение устойчивости при учете адиабатического затухания с помощью внешней или взаимной для  $r$  и  $z$  автофазировки. Установлено, что взаимная автофазировка возникает в области  $r - z$ -резонанса.

Проведено численное и частично аналитическое исследование этих эффектов.

В настоящей работе рассматривается простая модель нелинейной фокусировки, которая не имеет особого практического значения, но благодаря своей простоте позволяет провести достаточно полный анализ всех основных свойств нелинейной фокусировки. Имеется в виду не просто расчет количественных характеристик, которые довольно сильно зависят от выбора формы магнитного поля, а подтверждение основных качественных представлений и доказательство существования главных эффектов.

Прежде всего это подтверждение существования устойчивого движения с учетом всех нелинейных по  $z$  членов в уравнениях движения, а также подтверждение оценки, согласно которой области допустимых значений  $z$  и допустимых разбросов  $\Delta r$  амплитуд  $r$ -колебаний, вообще говоря, одного порядка:  $z \sim \Delta r$  [1].

Важно было рассмотреть такую простейшую модель, которая уже в первом приближении теории возмущений имеет хотя бы один  $r - z$ -резонанс в середине области устойчивости. Это и определило выбор нелинейного  $H_z$ -поля пятой степени.

Устойчивость движения исследовалась в основном численно на ЭВМ Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР. Однако в области главного резонанса на связи  $r - z$ -колебаний (при равенстве частот  $\nu_r$  и  $\nu_z$ ) получено также и аналитическое устойчивое решение.

Во-вторых, это подтверждение существования эффекта внешней автофазировки при наложении возмущений типа  $\Delta H_z = h \cos \omega \varphi$ , где частота  $\omega$  совпадает с каким-либо значением частоты  $r$ -колебаний внутри области устойчивости. Этот эффект неоднократно рассматривался теоретически [1-3].

При помощи численных расчетов на модели нужно было показать, что автофазировка действительно приводит к сохранению устойчивости движения при учете адиабатического затухания и что малые  $z$ -колебания не устраняют этот эффект.

И наконец, подтверждение существования взаимной автофазировки  $r - z$ -колебаний, возникающей и в отсутствие внешнего возмущения в области резонанса  $r - z$ -колебаний [3]. Этот интересный эффект также приводит к сохранению устойчивости движения при наличии затухания. Простота модели позволила кроме численных расчетов дать строгое аналитическое доказательство существования эффекта, что, по-видимому, невозможно в более сложных случаях.

## Первая область устойчивости

Зависимость магнитного поля  $H_z(r)$  в плоскости  $z = 0$  в области нелинейных  $r$ -колебаний показана на рис. 1. Здесь  $H_0$  — равновесное

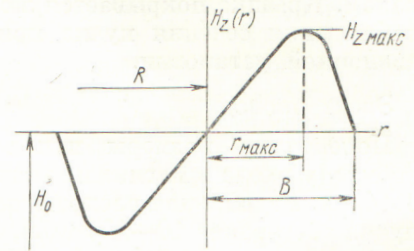


Рис. 1. Магнитное поле  $H_z(r)$  при  $z=0$ .

поле, относительно которого поле  $H_z - H_0$  обладает симметрией;  $R$  — равновесный радиус. так что  $cr = eH_0R$ .

Введем обозначения

$$\varrho = \frac{r}{B}; \quad \xi = \frac{z}{B}; \quad H_\varrho = \frac{H_r}{H_e}; \quad H_\xi = \frac{H_z - H_0}{H_e}; \quad (1)$$

$$H_e = \frac{5^{5/4}}{4} (H_{z\text{макс}} - H_0); \quad \theta = \varphi \sqrt{\frac{R}{B} \cdot \frac{H_e}{H_0}}; \quad r' = \frac{dr}{d\theta}; \quad (2)$$

$\varphi$  — азимутальная переменная, равная  $2\pi$  на одном обороте. В этих обозначениях компоненты выбранного нами поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} H_\xi(\varrho, \xi) &= \varrho - 5\varrho\xi^4 + 10\varrho^3\xi^2 - \varrho^5, \\ H_\varrho(\varrho, \xi) &= \xi - 5\varrho^4\xi + 10\varrho^2\xi^3 - \xi^5. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения движения в том же приближении, что и в работе [1], можно записать в виде

$$q'' + \alpha q' + q - q^5 = 5q\xi^4 - 10q^3\xi^2, \quad (4)$$

$$\xi'' + \alpha\xi' + (5q^4 - 1)\xi = 10q^2\xi^3 - \xi^5, \quad (5)$$

в нашем случае  $\alpha = p'/p$  полностью описывает адиабатическое затухание. При  $\alpha = 0$  система (4), (5) имеет сохраняющийся гамильтониан

$$G = \frac{q'^2 + \xi'^2}{2} + \frac{q^2 - \xi^2}{2} - \frac{q^6 - \xi^6}{6} + \frac{5}{2} q^2 \xi^2 (q^2 - \xi^2). \quad (6)$$

Если отбросить в выражениях (4) и (5) правые части (линейное приближение по  $\xi$ ), то решение оставшихся уравнений легко получить аналитически (мы не выписываем соответствующих рядов, чтобы не загромождать изложение). В этом приближении все значения  $\xi$  оказываются разрешенными, если амплитуды  $q$ -колебаний лежат в пределах  $0,7987 \leq q_{\max} \leq 0,8323$  — первая область устойчивости (другие области не исследовались),  $q$ -колебания строго периодичны (период  $\Phi_p$ ), а  $\xi$  записывается в виде

$$\xi = C f(2\nu\theta) \exp(2i\mu\nu\theta) + \text{к. с.}, \quad (7)$$

где  $C$  — произвольная постоянная;  $\nu = \pi/\Phi_p$ ;  $\mu$  — число  $\xi$ -колебаний на одном полуцикла  $q$ -колебаний.

При  $\mu$ , равном 0 и 1/2, в левой части уравнения (5) возникают параметрические резонансы; это соответствует левой и правой границам линейной области устойчивости (рис. 2).

В линейном по  $\xi$  приближении  $\xi$ -движение описывается частотами  $\nu$  и  $\mu$ , а  $q$ -движение — только  $\nu$ .

В точном решении полной системы (4), (5) границы резонансов зависят от начальных условий для  $\xi$ ; кроме того, возникают дополнительные комбинационные резонансы. Движение по  $q$  теряет строгую периодичность, что сказывается на устойчивости  $\xi$ -колебаний. В результате этих эффектов только ограниченный фазовый объем  $\xi$ -колебаний захватывается в режим устойчивого движения.

Это видно из рис. 2, а, б, которые различаются тем, что на рис. 2, а взяты начальные условия, содержащие  $\xi_0 \neq 0$ ,  $q_0 = 0$ , а на рис. 2, б  $\xi_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$  (всегда можно выбрать  $q' = 0$  при  $\theta = 0$ ). Точками и точками в кружках помечены такие начальные условия, для которых частицы при своем движении остаются в границах  $-0,3 \leq \xi \leq 0,3$  в течение 100 и 800 периодов  $q$ -колебаний соответственно; крестиками показаны начальные условия, при которых частицы выходят из этих границ за число периодов  $q$ -колебаний, указанное возле значка;  $l$  — размер области устойчивости в линейном приближении. Контроль счета осуществлялся при помощи проверки постоянства гамильтониана  $G$  с точностью  $\frac{\Delta G}{G} \leq 5 \cdot 10^{-6}$ .

Аналитическое решение уравнений (4) и (5) проведено лишь для области резонанса  $\mu = 1/2$  (см. ниже). Существование устойчивых колебаний в этой области доказано.

Из рис. 2, а следует, что нелинейность может играть и положительную роль; частицы с малыми начальными значениями  $\xi_0$ , лежащими правее линейной области устойчивости, все же остаются в режиме устойчивого движения (чис-

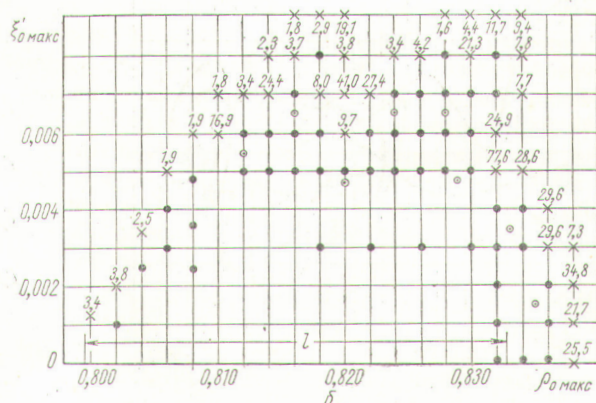
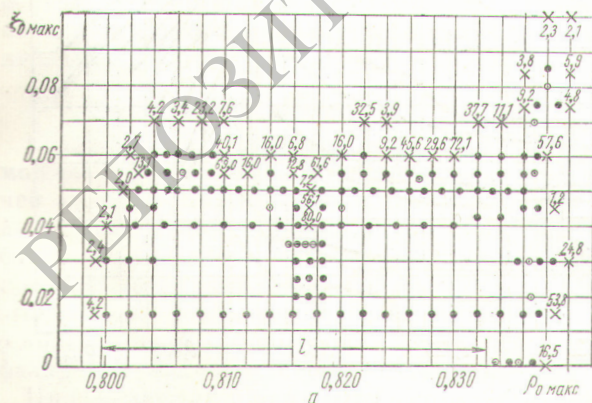


Рис. 2. Первая область устойчивости.

ленные расчеты для этих же точек по линейной теории дали весьма быстрый выброс этих частиц за указанные выше пределы).

На рис. 3 даны границы распределения точек  $\xi_0$ ,  $\xi'_0$ , соответствующих устойчивым начальным значениям для различных значений  $q_0$  и  $q'_0 = 0$ .

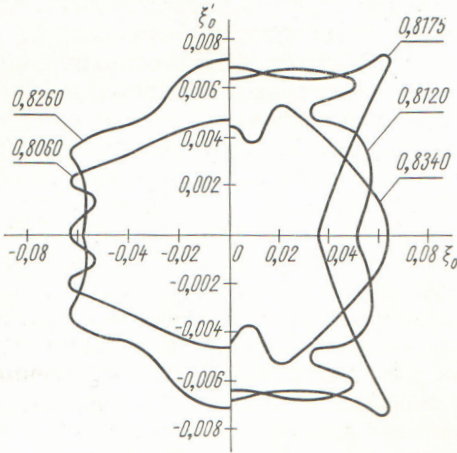


Рис. 3. Предельные фазовые диаграммы.

В заключение этого раздела приведем соображение, которое показывает, что, вообще говоря, допустимый разброс  $\xi_0$  не должен сильно отличаться от допустимого разброса  $\Delta q_0$ . Рассмотрим движение с  $\xi = 0$  и с некоторой амплитудой  $q_0$  ( $q'_0 = 0$ ), лежащей в центре области устойчивости, в качестве нулевого приближения. Обозначим его через  $\eta = \eta(\theta)$ . Тогда для малых отклонений  $\Delta q$  от  $\eta$  из системы (4), (5) при  $\alpha = 0$  получим

$$\Delta q'' + (1 - 5\eta^4) \Delta q = 10\eta^3 (\Delta q^2 - \xi^2) + 10\eta^2 (\Delta q^3 - 3\Delta q \xi^2) + 5\eta (\Delta q^4 + \xi^4 - 6\Delta q^2 \xi^2) + \Delta q^5 + 5\Delta q \xi^4 - 10\Delta q^3 \xi^2, \quad (8)$$

$$\xi'' + (5\eta^4 - 1) \xi = -20\eta^3 \Delta q \xi + \dots \quad (9)$$

В общем случае малые отклонения  $\Delta q$  могут обладать различной степенью устойчивости и даже быть неустойчивыми (при наличии устойчивого движения по  $q$  и  $\xi$ ). Выберем, однако, поле таким, что частоты малых  $\Delta q$ - и  $\xi$ -колебаний одного порядка. Тогда уравнения (8) и (9) формально представляют собой пример обычной знакопеременной фокусировки с сильной нелинейностью различных порядков. Большое число нелинейных членов в правых частях уравнений (8) и (9) приведет к возникновению разностных резонансов не очень высокого порядка, связывающих  $\Delta q$ - и  $\xi$ -колебания. Поэтому амплитуды  $\Delta q$ - и  $\xi$ -колебаний могут отличаться в несколько раз, однако нужны специальные условия, чтобы они отличались на несколько порядков.

### Внешняя автофазировка

Включение затухания колебаний ( $\alpha \neq 0$ ) приводит к потере устойчивости за «время»  $\Delta \theta \sim \Delta q / \alpha$ , где  $\Delta q$  — ширина области устойчивости по  $q$ ,  $q \sim 1$ .

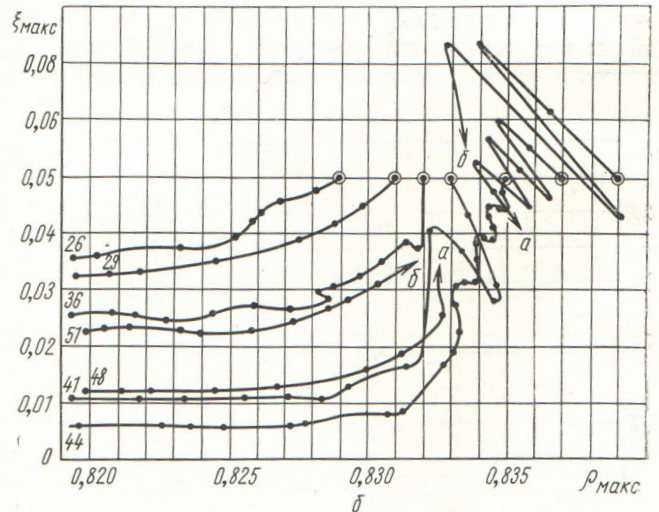
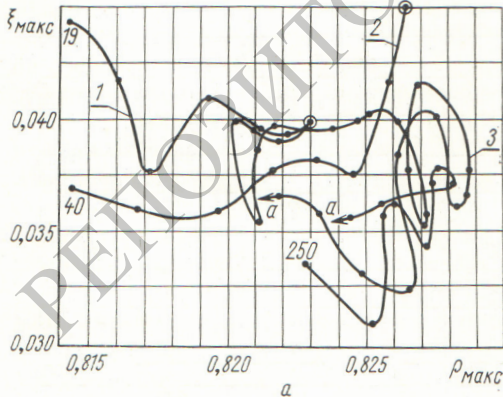


Рис. 4. Движение в области внешней (а) и взаимной (б) автофазировки.

Кривые 1 и 2 на рис. 4, а показывают движение точек с координатами  $\xi' = \rho' = 0$  на плоскости  $\rho_{\max}$ ,  $\xi_{\max}$  при  $\alpha = 10^{-4}$ .

Выход амплитуды  $\rho$  из области устойчивости при затухании можно ликвидировать с помощью внешнего гармонического возмущения типа  $\Delta H_{\xi} = h \cos(\omega\theta + \beta)$ . Это создает резонанс для такого  $\rho_1$ -колебания, частота которого  $\nu = \omega/k$ , где  $k$  — целое число.

Резонанс имеет область захвата, зависящую от величины  $h$  и  $\alpha$ , так что частицы с начальными условиями, достаточно близкими к резонансным, испытывают фазовые колебания около резонанса, а средние по времени значения амплитуд и частот равны соответствующим резонансным значениям. Таким образом, амплитуда  $\rho_1$ -колебаний не затухает; их форма и период остаются прежними (затухает фазовый объем около резонансных значений). Этот эффект хорошо исследован для одномерного движения при  $\xi = 0$  [1—3].

В случае  $\xi \neq 0$   $\rho$ -колебания перестают быть строго периодическими и точный резонанс нарушается. Поэтому необходимо рассмотреть режим автофазировки с учетом нелинейных  $\xi$ -членов. Чтобы получить эффект в чистом виде, при расчете внешней автофазировки были выбраны начальные условия, лежащие вдали от основных резонансов связи.

Кривая 3 на рис. 4, а показывает движение с начальными значениями  $\rho_0 = 0,823$  и  $\xi_0 = 0,04$  при  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $h = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\omega = 0,836$ ,  $\beta = \pi$ . Это — типичная картина фазовых колебаний около равновесных значений, соответствующих  $\nu_{\text{эфф}} = \omega$ , где  $\nu_{\text{эфф}}$  — частота  $\rho$ -колебаний с учетом влияния  $\xi \neq 0$ . Ход кривой 3 между точками  $a$  —  $a$  не нанесен на график. Расчет проведен до 250  $\rho$ -колебаний. На рис. 4, а нанесены лишь точки, для которых  $\rho' = \xi' = 0$ ; цифра в конце кривой показывает пройденное частицей число периодов  $\rho$ -колебаний.

### Взаимная автофазировка

Сохранение устойчивости при затухании возможно и без включения гармонической внешней силы. Если, например,  $\mu = 1/2$  (частоты  $\xi$ - и  $\rho$ -колебаний совпадают), то сами  $\xi$ -колебания играют роль той гармонической силы, которая автофазировывает  $\rho$ -колебания [3]. При этом весьма существенно и обратное влияние  $\rho$ -колебаний на  $\xi$ -колебания, так что автофазировка является строго взаимной.

При включении адиабатического затухания амплитуда  $\rho$ -колебаний, как и амплитуда  $\xi$ -ко-

лебаний, не затухает; они колеблются около таких значений  $\rho_1$  и  $\xi_1$ , которые соответствуют точному резонансу  $\mu = 1/2$ . Эти (фазовые) колебания, конечно, испытывают затухание.

Что касается равновесных значений  $\rho_1$  и  $\xi_1$ , то они являются функциями от общего интеграла движения  $G$ . Так как адиабатическое затухание изменяет  $G$ , то смещается и точка равновесия ( $\rho_1$ ,  $\xi_1$ ). Особенно резко может измениться  $\xi_1$  (но, очевидно, не по простому закону адиабатического затухания).

При достаточном малом  $\xi_1$  взаимная автофазировка становится невозможной и в дальнейшем происходит обычное затухание  $\rho$  и  $\xi$ . Все это видно на рис. 4, б, где показано движение точек  $\rho' = \xi' = 0$  при  $\alpha = 10^{-4}$  и при различных начальных значениях. Здесь же для наглядности приведена одна из кривых рис. 4, а; цифры возле кривых соответствуют пройденному частицей числу периодов  $\rho$ -колебаний. При  $\rho_0 = 0,830$ ,  $\xi_0 = 0,05$  устанавливается нормальный режим адиабатического затухания.

Начальные условия  $\rho_0 = 0,835$ ,  $\xi = 0,05$  оказались достаточно близки к равновесным условиям для резонанса  $\mu = 1/2$ , так что  $\rho$  и  $\xi$  на этой кривой испытывают фазовые колебания с малой амплитудой, а при  $\xi \approx 0,015$  резонансная связь разрывается и  $\rho$  начинает затухать обычным образом (движение влево).

Резонанс  $\mu = 1/2$  обеспечивают члены  $10\rho^3\xi^2$  в (4) и  $10\rho^2\xi^3$  в (5). Члены  $5\rho\xi^4$  в (4) и  $\xi^5$  в (5) должны давать резонанс при  $\mu = 1/4$ . Однако эта резонансная область настолько узка и резонанс настолько слаб, что автофазировку обнаружить не удалось. Не исключено, что при малых  $\xi$  внутри области устойчивости автофазировка для  $\mu = 1/4$  не возникает.

Заметим, что в реальных, более сложных полях  $H_z$  и при обычно несимметричной зависимости разности  $H_z - H_0$  от  $r$  члены, содержащие  $z^2$  в правой части уравнения для  $r$ , не дают резонанса в первой области устойчивости. Члены  $z^4$  дают резонанс лишь на правой границе этой области (нарушение симметрии отсекает область устойчивости таким образом, что ее середина становится правой границей первой области). Следовательно, в середине области могут существовать резонансы лишь от членов  $z^6$ ,  $z^8$  и выше, т. е., по-видимому, очень слабые резонансы с очень слабой  $r - z$  связью.

Для возникновения взаимной автофазировки внутри первой области устойчивости в несимметричном поле необходимо, чтобы

в магнитном поле присутствовали сильные члены с  $z^{2k}$  ( $k \geq 3$ ).

Эффект взаимной автофазировки в нелинейной фокусировке был рассмотрен в работе [3] полуквадратно. В нашей простой модели можно строго рассчитать этот эффект. Поскольку получаемое при этом в области  $r - z$  резонанса решение оказывается устойчивым, то тем самым одновременно доказывается устойчивость нелинейной фокусировки в этой области.

Найдем вначале точное частное решение  $q_1(\theta)$  и  $\xi_1(\theta)$  уравнений (4), (5), в котором частоты  $q_1$ - и  $\xi_1$ -колебаний совпадают:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_{2k+1} \exp [i(2k+1)v\theta], \\ \xi_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} b_{2k+1} \exp [i(2k+1)v\theta]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Начальная фаза  $\theta$  выбирается так, чтобы  $a_n = a_{-n}$  были вещественны.

Подставив (10) в (4), (5), после несколько громоздких вычислений получим рекуррентные формулы для  $a_{2k+1}$ ,  $b_{2k+1}$ , причем  $b_n = b_{-n}$  также оказываются вещественными. Приближенно выражения для них имеют вид

$$a_1 \approx a_{10} + \Delta a; \quad a_3 \approx a_{30}; \quad a_5 \approx a_{50}, \quad (11)$$

где  $a_{10}$ ,  $a_{30}$ ,  $a_{50}$  — значения коэффициентов  $a_{2k+1}$  при  $\xi \rightarrow 0$  для  $\mu = 1/2$  ( $a_{10} \approx 0,42833$ ;  $a_{30} \approx -0,01179$ ;  $a_{50} \approx -0,00038$  и т. п.). Далее имеем

$$v^2 = v_0^2 + \Delta v^2, \quad (12)$$

где  $v_0$  — значение частоты  $q$ -колебаний при  $\xi \rightarrow 0$  и  $\mu = 1/2$ ;  $v_0^2 \approx 0,68370$ ;

$$b_1^2 \approx \frac{243 \cdot a_{10} + 375 \cdot a_{30}}{200 \cdot a_{10} + 250 \cdot a_{30}} a_{10} \Delta a \approx 0,51 \cdot \Delta a; \quad (13)$$

$$b_3 \approx \frac{25 \cdot a_{10}^3 + 120 \cdot a_{30}^3}{1 + 9v_0^2 - 30a_{10}^2} a_{10} \Delta a \approx 0,085 \sqrt{\Delta a}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta v^2 &\approx -(40 \cdot a_{10}^3 + 75 \cdot a_{10}^2 a_{30}) \Delta a + \\ &+ 100b_1^2 \left( a_{10}^2 + \frac{3}{2} a_{10} a_{30} \right) \approx 6 \cdot \Delta a. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, все величины в выражении (10) определяются через единственный параметр  $\Delta a \ll a_{10}$ ; при  $\Delta a = 0$   $\xi = 0$ ,  $\mu = 1/2$ .

Рассмотрим теперь малые отклонения от этого частного решения, приняв

$$q = q_1 + x, \quad \xi = \xi_1 + y. \quad (16)$$

В линейном приближении по  $x$  и  $y$  получим

$$\left. \begin{aligned} x'' - (5q_1^4 - 1 - 30q_1^2 \xi_1^2) x &= -20q_1^3 \xi_1 y, \\ y'' + (5q_1^4 - 1 - 30q_1^2 \xi_1^2) y &= -20q_1^3 \xi_1 x. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здесь отброшены малые члены, содержащие  $\xi_1^3$  и  $\xi_1^4$ .

Вначале получим точное решение уравнений (17) без учета членов, стоящих в правых частях, влияние которых исследуем затем по теории возмущений:

$$x'' - (5q_1^4 - 1 - 30q_1^2 \xi_1^2) x = 0, \quad (18)$$

$$y'' + (5q_1^4 - 1 - 30q_1^2 \xi_1^2) y = 0. \quad (19)$$

Введем для уравнений (18) и (19) характеристические показатели  $\mu_x$  и  $\mu_y$  и представим их решения (в пределах соответствующих областей устойчивости) в форме Флоке

$$\left. \begin{aligned} x &= C_x f_x(2v\theta) \exp(2i\mu_x v\theta) + \text{к. с.}, \\ y &= C_y f_y(2v\theta) \exp(2i\mu_y v\theta) + \text{к. с.} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Все величины в (20), кроме произвольных постоянных  $C_x$  и  $C_y$ , являются, очевидно, функциями параметра  $\Delta a$ , через который определяются  $q_1(\theta)$  и  $\xi_1(\theta)$ . В частности,  $\mu_x = \mu_x(\Delta a)$  и  $\mu_y = \mu_y(\Delta a)$ . Нами было проведено аналитическое вычисление этих зависимостей, результаты которого сводятся к следующему.

При возрастании  $\Delta a$  от нуля до  $\Delta a_{\text{макс}} \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$  величина  $\mu_y(\Delta a)$  уменьшается от  $\mu(0) = 1/2$  до нуля, для  $\Delta a > \Delta a_{\text{макс}}$  значения  $\mu_y$  становятся мнимыми. При  $\Delta a = 0$   $\mu_x$  — комплексная величина. По мере увеличения  $\Delta a$  мнимая часть  $\mu_x$  стремится к нулю и при  $\Delta a = \Delta a_{\text{мин}} \approx 1,1 \cdot 10^{-4}$   $\mu_x = 1/2$ ; при дальнейшем увеличении  $\Delta a$  величина  $\mu_x$ , продолжая оставаться вещественной, убывает, но гораздо медленнее, чем  $\mu_y$ . Для  $\Delta a \sim \Delta a_{\text{мин}}$  ( $\mu_x - \mu_y \ll 1$ ). Таким образом, совместная устойчивость колебаний, описываемых выражениями (18) и (19), возможна лишь для  $\Delta a_{\text{мин}} \leq \Delta a \leq \Delta a_{\text{макс}}$ . Следует отметить, что учет правых частей (17) в первом порядке теории возмущений не дает поправок к значениям  $\mu_x$  и  $\mu_y$ .

Определим по  $\Delta a_{\text{мин}}$ ,  $\Delta a_{\text{макс}}$  с помощью выражений (13) и (14) соответствующие значения  $\xi_{1\text{макс}}$ . Тогда на основании сказанного в начале этого раздела можно сделать вывод, что отрезок  $0,015 \leq \xi_{1\text{макс}} \leq 0,18$  связан с эффектом взаимной автофазировки.

Для определения частоты  $\Omega$  фазовых колебаний около  $\varrho_1$ ,  $\xi_1$  необходимо учитывать также и правые части в уравнении (17). Путем вариации постоянных  $C_x = |C_x| \exp \psi_x$  и  $C_y = |C_y| \exp \psi_y$  после усреднения по  $\theta$  для тех значений  $\Delta a \sim \Delta a_{\min}$ , при которых  $(\mu_x - \mu_y) \ll 1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d|C_x|^2}{d\theta} &= 2\Phi(\Delta a) |C_x| \sqrt{K_0 - |C_x|^2} \sin \gamma = \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma}; \\ \frac{d\gamma}{d\theta} &= 2(\mu_x - \mu_y) \nu + \Phi(\Delta a) \times \\ &\times \frac{K_0 - 2|C_x|^2}{|C_x| \sqrt{K_0 - |C_x|^2}} \cos \gamma = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial |C_x|^2}; \\ \mathcal{H} &= 2(\mu_x - \mu_y) \nu |C_x|^2 + 2\Phi(\Delta a) |C_x| \times \\ &\times \sqrt{K_0 - |C_x|^2} \cos \gamma. \end{aligned} \right\} (21)$$

Здесь  $\Phi(\Delta a) = 10 \langle \varrho_1^3 \xi_1 f_x^* f_y \rangle = 10 \langle \varrho_1^3 \xi_1 f_x f_y^* \rangle$ , усреднение проведено по  $\theta$ , нормировка функции Флоке в выражениях (20) определяется равенством

$$f(f^{*'} - 2i\nu f^*) - \text{к. с.} = -2i,$$

$K_0 = |C_x|^2 + |C_y|^2$  — один из первых интегралов системы (21),

$$\gamma = 2(\mu_x - \mu_y) \nu \theta + \psi_x - \psi_y.$$

Из (21) получим

$$\frac{d^2 |C_x|^2}{d\theta^2} + 4\Phi^2(\Delta a) |C_x|^2 - 2\Phi^2(\Delta a) K_0 = = 4 \cdot \Phi(\Delta a) (\mu_x - \mu_y) \nu |C_x| \sqrt{K_0 - |C_x|^2}, (22)$$

откуда следует оценка для частоты колебаний величины  $|C_x|$ , которая и является, согласно работе [3], искомой частотой фазовых колебаний  $\Omega$ :

$$\Omega \sim \Phi(\Delta a). (23)$$

При  $\xi_{1\max} \ll 0,05$  эта оценка дает для отношения частот  $\nu/\Omega$  величину порядка нескольких единиц, что хорошо согласуется с результатами численного анализа.

Таким образом, расчеты этой простой модели нелинейной фокусировки подтвердили основные представления теории.

Поступила в Редакцию 23/VII 1965 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ф. Орлов. В кн. «Международная конференция по ускорителям (Дубна, 1963)». М., Атомиздат, 1964, стр. 90.
2. Б. В. Чириков. «Докл. АН СССР», 125, 1015 (1959).
3. Ю. Ф. Орлов. В кн. «Вопросы физики элементарных частиц». Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964, стр. 578.

## Статистические методы измерения абсолютной мощности реактора

А. И. МОГИЛЬНЕР, Д. М. ШВЕЦОВ

УДК 621.039.50

Рассмотрено применение различных статистических методов для измерения абсолютной мощности реактора. Показано, что токовые методы имеют преимущество перед импульсными.

Одна из экспериментальных задач реакторной физики — измерение абсолютной мощности реактора. Обычно эта величина для реакторов нулевой мощности определяется известными «классическими» способами — методами камеры абсолютного счета и калиброванного источника, а также активацией золотых фольг. Эти методы широко применяются в экспериментальной практике, но тем не менее они имеют ряд недостатков.

Метод камеры абсолютного счета связан с трудоемкой операцией интегрирования числа

делений по зоне. Точное определение числа ядер делящегося вещества в камере также является сложной задачей. Существуют серьезные трудности в применении этого метода к реакторам с гетерогенными эффектами.

Метод активации золота, широко используемый в тепловых реакторах, также связан с интегрированием числа реакций по объему активной зоны. В окончательный результат вносятся ошибки экспериментов за счет неточного знания спектра нейтронов.

Метод калиброванного источника, основанный на определении нейтронного умножения в подкритическом реакторе при помещении в него постоянного источника нейтронов известной интенсивности, требует знания абсолютной активности источника и степени подкритичности реактора. Обычно источник является