Проблемы физики, математики и техники, № 2 (43), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О МАКСИМАЛЬНЫХ АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ БЛИЗКИХ К $\mathfrak{F}$-АБНОРМАЛЬНЫМ

Р.В. Бородич, Р.А. Кучеров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON MAXIMAL ABNORMAL SUBGROUPS CLOSE TO $\mathfrak{F}$-ABNORMAL

R.V. Borodich, R.A. Kucherov

F. Scorina Gomel State University

Исследуются пересечения максимальных подгрупп близких к $\mathfrak{F}$-абнормальным, индексы которых не делятся на некоторые простые числа.

***Ключевые слова**: конечная группа, абнормальная подгруппа, $\mathfrak{F}$-корадикал.*

The intersections of maximal subgroups close to $\mathfrak{F}$-abnormal, whose indices are not divisible by some prime numbers are investigated.

***Keywords**: finite group, abnormal subgroup, $\mathfrak{F}$-residual.*

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одним из основополагающих направлений в исследовании конечных групп связано с исследованием свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и влиянием этих свойств на строение группы. Главенствующую роль здесь занимает подгруппа Фраттини, введенная в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие в работах В. Гашюца [2], В. Дескинса [3] и других авторов (см. монографии [4] и [5]).

Введённое в работах Р. Картера, Т. Хоукса [6] и Л.А. Шеметкова [7] понятие $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы позволило систематизировать накопившийся богатый фактический материал о максимальных подгруппах и получить целый ряд новых результатов.

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами, основываясь на методах использования подгрупповых функторов в группах с операторами [8].

1 Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $<H, H^x>$; *абнормальной*, если $x \in <H, H^x>$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то
$$G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\phi}) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют *локальной*, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно, так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через

$\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп;

$\Delta_{\pi}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, индексы которых не делятся на простые числа из π;

$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G;

$D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, индексы которых делятся на простые числа из π;

$\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π;

$\delta_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ – пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, содержащих $O_{\pi}(G)$ и не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$;

$\overline{\delta}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ – пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, содержащих $O_{\pi}(G)$, не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$ и не принадлежащих $\mathfrak{F}$;

$\varphi_{\Delta_{\pi}}(G, A)$ – пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, содержащих $O_{\pi}(G)$.

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [9].

2 Вспомогательные результаты

***Лемма* 2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то*

$$\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не принадлежащая $\mathfrak{F}$ и не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Тогда

$$\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = \cap (M / N)_{G/N}, \qquad (2.1)$$

где M / N пробегает множество всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп из G / N, не принадлежащих $\mathfrak{F}$ и не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G / N.

Продолжим равенство (2.1):

$$\cap (M / N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N. \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) вытекает справедливость утверждения. □

***Теорема* 2.2** [10, с. 114]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Delta_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}. Тогда*

$$\Delta_{\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Delta(G / O_{\pi}(G), A).$$

***Теорема* 2.3** [11, с. 29]. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация. Тогда*

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

***Теорема* 2.4.** [12, с. 41]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если в группе G подгруппа $\Delta_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}, то*

$$D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

В теоремах 2.2 и 2.4 используется тот факт, что подгруппа $\Delta_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}. Следующий подход позволяет развить данные теоремы, отбросив указанное выше требование. В основе этого подхода лежат свойства подгрупп $\delta_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, $\overline{\delta}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, $\varphi_{\Delta_{\pi}}(G, A)$.

***Лемма* 2.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация, N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G. Тогда* *справедливы следующие утверждения*:

если $N \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$, то

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G / N, A) = \varphi_{\Delta_\pi}(G, A) / N;$$

если $N \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$, то

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G / N, A) = \delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) / N;$$

если $N \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ и $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) / N \neq G / N$, то $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G / N, A) = \overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) / N$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

***Лемма* 2.6.** *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда*

1) $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) \supseteq \Delta_\pi(G, A)$,

2) $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ – π-замкнутая подгруппа,

3) $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) / O_\pi(G) = \Delta(G / O_\pi(G))$,

4) если $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π, то $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) = \Delta_\pi(G, A)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) \supseteq \Delta_\pi(G, A).$$

Покажем, что подгруппа $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ π-замкнута. Пусть $O_\pi(G)$ – неединичная подгруппа, N – минимальная нормальная подгруппа группы G, $N \subseteq O_\pi(G)$. По лемме 23.5 имеем:

$$\varphi_\pi(G / N, A) = \varphi_{\Delta_\pi}(G, A) / N.$$

Для G / N утверждение леммы верно по индукции.

Следовательно, группа $\varphi_{\Delta_\pi}(G / N, A)$ π-замкнута. Так как N – π-группа, то из π-замкнутости $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) / N$ следует, что $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ – π-замкнутая подгруппа.

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. По определению подгруппы $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ имеем в этом случае $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) = \Delta(G, A)$, причём $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ обладает единичной π-холловской подгруппой. Очевидно, $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ – π-замкнутая подгруппа, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) / O_\pi(G) = \Delta(G / O_\pi(G)).$$

Пусть M – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G и $O_\pi(G) \subseteq M$. Так как $O_\pi(G)$ – характеристическая подгруппа, то, очевидно, $M / O_\pi(G)$ – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы $G / O_\pi(G)$. Следовательно,

$$\Delta_\pi(G / O_\pi(G), A) \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A) / O_\pi(G) =$$
$$= \varphi_\pi(G / O_\pi(G), A).$$

С другой стороны, так как $O_\pi(G / O_\pi(G)) = 1$, то по определению

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G / O_\pi(G), A) = \Delta_\pi(G / O_\pi(G), A),$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π. По ранее доказанному

$$\Delta_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Delta_\pi(G / O_\pi(G), A) =$$
$$= \varphi_{\Delta_\pi}(G, A) / O_\pi(G).$$

Следовательно, $\Delta_\pi(G, A) = \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$. □

***Теорема* 2.7** [11, с. 29]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|, |A|) = 1$. *Тогда* $D^{\mathfrak{F}}_\Delta(G, A) = A \times B$, *где* $A \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq \Delta(G, A)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$.

3 Основной результат

***Теорема* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|, |A|) = 1$ *и* $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \neq G$. *Если в группе G подгруппа* $\Delta_\pi(G, A)$ *обладает свойством* C_π, *то*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) / O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}_\Delta(G / O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K = \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta_\pi(G, A).$$

Пусть $K \not\subseteq \Delta_\pi(G, A)$. Тогда в G найдётся такая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, индекс которой не делится на простое число из π, что $G = KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то

$$K \subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \subseteq M,$$

что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$. Отсюда

$$G / K = MK / K \simeq M / M \cap K \in \mathfrak{F},$$

а это значит, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)$. Это противоречит существованию в группе G абнормальной максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$ индекс которой не делится на простые числа из π. Итак,

$$K \subseteq \Delta_\pi(G, A).$$

Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\Delta_\pi(G, A) / O_\pi = \Delta(G / O_\pi(G), A),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G / O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G / O_\pi(G), A) / O_\pi(G / O_\pi(G)) =$$
$$= D^{\mathfrak{F}}_\Delta(G / O_\pi(G) / O_\pi(G / O_\pi(G)), A).$$

Так как $O_\pi(G / O_\pi(G)) = 1$ и

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G / O_\pi(G), A) = \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) / O_\pi(G),$$

то

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G)=1$. Тогда

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq \Delta_\pi(G,A)=\Delta(G,A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G, причём,

$$\Delta(G,A)\subseteq N\subseteq K\subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A).$$

Так как

$$K\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq \Delta(G,A),$$

то $N=N(K\cap G^{\mathfrak{F}})=K\cap NG^{\mathfrak{F}}$.

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}\simeq K/K\cap NG^{\mathfrak{F}}=$$
$$=K/N(K\cap G^{\mathfrak{F}})=K/N.$$

Так как $G/NG^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}$, то главный фактор $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Следовательно, главный фактор K/N также является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Таким образом, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Delta(G,A)$. Поэтому

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A)\subseteq Z^{\mathfrak{F}}_\infty(G/\Delta(G,A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.3

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A)\supseteq D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)/\Delta(G,A)=$$
$$=Z^{\mathfrak{F}}_\infty(G/\Delta(G,A)).$$

Значит,

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A)=Z^{\mathfrak{F}}_\infty(G/\Delta(G,A)).$$

Следовательно,

$$D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)/\Delta(G,A),$$

то есть $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)$. □

***Следствие* 3.1.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. Если подгруппа $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

Так как в любой группе G подгруппа $\Delta_p(G,A)$ обладает свойством C_p, то при $\pi=\{p\}$ получаем следующий результат.

***Следствие* 3.1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. Тогда*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)/O_p(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_p(G),A).$$

***Следствие* 3.1.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. Если $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда*

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Пусть M – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, $O_\pi(G)\subseteq M$ и M не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Так как $(G/O_\pi(G))^{\mathfrak{F}}=G^{\mathfrak{F}}O_\pi(G)/O_\pi(G)$, то $M/O_\pi(G)$ – абнормальная максимальная A-допустимая в $G/O_\pi(G)$ подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G/O_\pi(G)$. Таким образом,

$$D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A)\subseteq\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A)=$$
$$=\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G).$$

Обратно, если подгруппа $M/O_\pi(G)$ абнормальная максимальная A-допустимая в $G/O_\pi(G)$ и не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G/O_\pi(G)$, то подгруппа M абнормальная максимальная A-допустимая в G подгруппа, содержащая $O_\pi(G)$ и не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно,

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A)=$$
$$=\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)\subseteq D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A).$$

Отсюда имеем

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A),$$

что и требовалось доказать. □

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда, если $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A).$$

Доказательство. По теоремме 2.2 и теореме 3.2 имеем:

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A)=$$
$$=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G).$$

Следовательно, $\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)$.

***Следствие* 3.2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда,*

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)\cap\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_q}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)$$

для любых $p\neq q$.

Справедливость утверждения следует из справедливости теоремы Силова для $\Delta_p(G,A)$ и $\Delta_q(G,A)$ и следствия 4.2.1.

***Теорема* 3.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)\neq G$. *Тогда*

$$\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)=D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Покажем, что

$$K=\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A).$$

Пусть $K\not\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$. Тогда в G найдётся абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M\notin\mathfrak{F}$, то

$$K\subseteq\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)\subseteq M,$$

что невозможно. Следовательно, $M\in\mathfrak{F}$. Отсюда

$$G/K=MK/K\simeq M/M\cap K\in\mathfrak{F}.$$

А это значит, что $G^{\mathfrak{F}}\subseteq K\subseteq\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Это противоречит существованию в группе G абнормальной максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$ и определению $\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Следовательно, $K\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$.

Пусть $O_\pi(G)\neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi=\Delta(G/O_\pi(G),A),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A)/O_\pi(G/O_\pi(G))=$$
$$=D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G)),A).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G))=1$, то

$$\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A)=D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A).$$

Из леммы 3.5

$$\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)=D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G)=1$. По определению подгруппы $\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ имеем $\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)=\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$, а определению подгруппы $\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$ –

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)=\Delta_\pi(G,A)=\Delta(G,A).$$

Тогда из теоремы 4.1 получаем $\overline{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)=$ $=D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Следовательно, $\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)=D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G,A)$, что и требовалось доказать. □

***Следствие* 3.3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)\neq G$. *Тогда*

$$\overline{\delta}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

***Теорема* 3.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, π *– некоторое множество простых чисел. Тогда* $\delta_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)=AB$, *где*

1) $A/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}$;

2) $B\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$;

3) $\pi(B)\cap\pi(\mathfrak{F})\subseteq\pi$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $G/O_\pi(G)$.

Из теоремы 3.2

$$\delta_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)=D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A),$$

по лемме 2.6

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=\Delta(G/O_\pi(G),A).$$

Применяя к группе $D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A)$ теорему 2.7, получаем

$$D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G/O_\pi(G)),A)=(A/O_\pi(G))(B/O_\pi(G)),$$

где

$$A/O_\pi(G)\in\mathfrak{F},B/O_\pi(G)\subseteq$$
$$\subseteq\Delta(G/O_\pi(G),A),\pi(B/O_\pi(G))\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing.$$

Следовательно, $\pi(B)\cap\pi(\mathfrak{F})\subseteq\pi$. Так как

$$\Delta(G/O_\pi(G),A)=\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G),$$

то $B\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$.

Ввиду теоремы 2.7 имеем, что

$$A\cap B=O_\pi(G),\ A/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

Так как

$$\delta_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)=D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_\pi(G),A),$$

то $\delta_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)=AB$, что и требовалось доказать. □

***Следствие* 4.4.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что* $(|G|,|A|)=1$, π *– некоторое множество простых чисел. Тогда*

$$\delta_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini*, *G*. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Gaschütz*, *W*. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

3. *Deskins*, *W.E*. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Ill. J. Math. – 1961. – Vol. 5. – № 2. – P. 306–313.

4. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

5. *Селькин*, *М.В*. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука. 1997. – 144 с.

6. *Carter*, R. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

7. *Шеметков*, *Л.А*. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

8. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

9. *Бородич*, *Р.В*. Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

10. *Бородич*, *Р.В*. Об абнормальных подгруппах конечных групп с заданной группой операторов / Р.В. Бородич // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта імя П.М. Машэрава. – 2003. – № 2. – С. 111–115.

11. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 26–30.

12. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении абнормальных *A*-допустимых подгрупп с ограничениями на индексы, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (39). – С. 39–43.

Поступила в редакцию 04.03.2020.