Проблемы физики, математики и техники, № 2 (43), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О КОСЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

ON SKEW ELEMENTS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

В статье изучаются косые элементы в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, порядка, делящего $l - 1$, и n-арной операции η. В частности, доказана теорема, позволяющая для каждого элемента l-арной группы специального вида указать его косой элемент, выразив его через обратные последовательности элементов n-арной группы на декартовой степени которой построена указанная l-арная группа.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арная группа*, *косой элемент*, *обратная последовательность*.

The article goes on with a study of skew elements in polyadic groups of special form, that is in polyadic groups with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n-ary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ which order divides $l - 1$ and n-ary operation η. In particular a theorem has been proved that allows us to determine a skew element for each element of l-ary group of a special form, the skew element being formulated by means of a inverse sequences of n-ary group on Cartesian power of which the given l-ary group is constructed.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary group*, *skew element*, *inverse sequence*.

Введение

Полиадическая операция специального вида $\eta_{s,\sigma,k}$ арности l, где

$$s \geq 1,\ n \geq 2,\ l = s(n-1) + 1,\ k \geq 2,\ \sigma \in \mathbf{S}_k,$$

определяется на k-ой декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ следующим образом [1]:

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) =$$

$$= \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$

$$= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}),\ j = 1, \ldots, k.$$

На k-ой декартовой степени A^k произвольного n-арного группоида $< A, \eta >$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ была определена в [2].

Следующая теорема, доказанная в [1], утверждает, что в случае тождественности подстановки σ^{l-1} l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является n-арной группой. Её называют полиадической группой специального вида.

***Теорема* 0.1** [1]. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– l-арная группа.*

Частными случаями полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, изучению которой посвящена книга [3]. и две полиадические операции Э. Поста [4], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, а вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Если η – бинарная операция ($n = 2$), то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$.

В данной статье изучаются косые элементы в полиадической группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, в определении которой σ – подстановка порядка делящего $l - 1$. Приведены следствия из этой теоремы.

1 Предварительные сведения

Определения и основные свойства n-арной группы, нейтральной и обратной последовательностей можно найти в книгах [5]–[7]. Отметим только, что одноэлементную обратную последовательность b полиадической группы для последовательности α элементов этой же полиадической группы естественно называть обратным элементом для последовательности α.

Согласно В. Дёрнте [8], элемент b n-арной группы $< A, \eta >$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\, b\, \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a, то употребляют обозначение $b = \overline{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\, \overline{a}\, \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

***Замечание* 1.1.** Можно показать, что:

1) *для того, чтобы элемент* b *n-арной группы* $< A, \eta >$ *являлся косым для* $a \in A$, *достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого* $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) *для любого элемента* a *n-арной группы* $< A, \eta >$ *его косой элемент* $\bar{a}$ *является обратным для последовательности* $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$, *а последовательности* $\bar{a}\,\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$ *и* $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}\,\bar{a}$ *являются нейтральными*;

3) *если* $n \geq 3$, *то для любого элемента* a *n-арной группы* $< A, \eta >$ *и любого* $i = 0, 1, \ldots, n-3$ *последовательность*

$$\underbrace{a \ldots a}_{i}\,\bar{a}\,\underbrace{a \ \ldots \ a}_{n-i-3} \qquad (1.1)$$

является обратной для a. *В частности, обратными для* a *являются последовательности* $\bar{a}\,\underbrace{a \ldots a}_{n-3}$ *и* $\underbrace{a \ldots a}_{n-3}\,\bar{a}$.

В дальнейшем изложении будет существенно использоваться теорема из [9], позволяющая находить косые элементы в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Ниже приведена эквивалентная формулировка этой теоремы.

***Теорема* 1.1**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где* b_j – *обратный элемент в* $< A, \eta >$ *для последовательности*

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)},\ j = 1, \ldots, k \qquad (1.2)$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть* $\bar{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$.

2 Основные результаты

Новую информацию о косых элементах в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ можно получить, если порядок подстановки σ делит $l-1$. Начнём с примера.

***Пример* 2.1.** Положим в определении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$: $< A, \eta >$ – тернарная группа,

$$k = n = 3,\ s = 2,\ \sigma = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = (13) \in \mathbf{S}_3.$$

Так как $(13)^5 = (13)$, то по теореме 0.1 $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ – 5-арная группа.

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 5-арной группы $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ верно равенство

$$\eta_{2,(13),3}((\eta(\overline{a_3 a_1 a_3}), \eta(\overline{a_2 a_2 a_3}), \eta(\overline{a_1 a_3 a_1}))\mathbf{aaaa}) = \mathbf{a}.$$

Следовательно, в 5-арной группе $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ косой элемент $\bar{\mathbf{a}}$ для элемента $\mathbf{a}$ выражается через косые элементы тернарной группы $< A, \eta >$ следующим образом:

$$\overline{(a_1, a_2, a_3)} = (\eta(\overline{a_3 a_1 a_3}), \eta(\overline{a_2 a_2 a_3}), \eta(\overline{a_1 a_3 a_1})).$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

***Лемма* 2.1.** [6, предложение 1.2.20]. *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – *последовательности, составленные из элементов n-арной группы* $< A, \eta >$, *и пусть* $\beta_1, \ldots, \beta_r$ – *последовательности, обратные соответственно данным. Тогда* $\beta_r \ldots \beta_1$ – *обратная последовательность для последовательности* $\alpha_1 \ldots \alpha_r$.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа,* σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $l = td + 1$ *для некоторого натурального* t,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} *и* α_j^{-1} – *любые обратные последовательности в* $< A, \eta >$ *для элемента* a_j *и последовательности* α_j *соответственно. Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{t-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}a_j^{-1} \ldots \alpha_j^{-1}a_j^{-1}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\bar{\mathbf{a}} = (\eta(\alpha_1^{-1}\underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{t-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\alpha_k^{-1}\underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{t-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}a_1^{-1} \ldots \alpha_1^{-1}a_1^{-1}}_{t-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}a_k^{-1} \ldots \alpha_k^{-1}a_k^{-1}}_{t-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

Доказательство. Так как подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ порядка d удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ тогда и только тогда, когда d делит $l-1$, то равенство $\sigma^l = \sigma$ равносильно равенству $l = td + 1$ для некоторого натурального t. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1.

Ясно, что последовательность (1.2) из теоремы 1.1 может быть представлена либо в виде

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} =$$

$$= \underbrace{a_{\sigma(j)\ldots}\, a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)\ldots}\, a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{t-1}\ a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},$$

либо в виде

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} =$$

$$= a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}\ \underbrace{a_j a_{\sigma(j)\ldots}\, a_{\sigma^{d-1}(j)} \ldots a_j a_{\sigma(j)\ldots}\, a_{\sigma^{d-1}(j)}}_{t-1}.$$

Если в последних двух равенствах положить

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},$$

то их можно переписать короче:

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1}\ \alpha_j,$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \alpha_j \underbrace{a_j\alpha_j \ldots a_j\alpha_j}_{t-1}.$$

Поэтому ввиду леммы 2.1, обратный элемент в n-арной группе $< A, \eta >$ для последовательности $a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}$ может быть записан либо в виде

$$\eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{t-1}),$$

либо в виде

$$\eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}a_j^{-1} \ldots \alpha_j^{-1}a_j^{-1}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}).$$

Осталось применить теорему 1.1. □

***Замечание* 2.1.** Теперь мы можем найти косые элементы в 5-арной группе $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ из примера 2.1, воспользовавшись теоремой 2.1. Так как $l = 5$, порядок d подстановки $\sigma = (13)$ равен 2, то из условия $l = td + 1$ следует $t = 2$. Соответственно

$$\alpha_1 = a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(1)} = a_{\sigma(1)} = a_3,$$

$$\alpha_2 = a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(2)} = a_{\sigma(2)} = a_2,$$

$$\alpha_3 = a_{\sigma(3)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(3)} = a_{\sigma(3)} = a_1,$$

$$\alpha_1^{-1} = a_3^{-1} = \overline{a}_3,\ \ \alpha_2^{-1} = a_2^{-1} = \overline{a}_2,$$

$$\alpha_3^{-1} = a_1^{-1} = \overline{a}_1.$$

Тогда по теореме 2.1

$$b_1 = \eta(\overline{a_3 a_1 a_3}),\ b_2 = \eta(\overline{a_2 a_2 a_3}),\ b_3 = \eta(\overline{a_1 a_3 a_1}).$$

Следовательно,

$$\overline{(a_1, a_2, a_3)} = (\eta(\overline{a_3 a_1 a_3}),\ \eta(\overline{a_2 a_2 a_3}),\ \eta(\overline{a_1 a_3 a_1})).$$

Если в теореме 2.1 $n \geq 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в n-арной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять любую из последовательностей вида (1.1). Например, если положить

$$a_j^{-1} = \overline{a}_j \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3},$$

то формулировка теоремы 2.1 принимает следующий вид.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $l = td + 1$ для некоторого натурального t,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – любая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности α_j. Тогда элемент $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\ \underbrace{\overline{a}_j \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3} \alpha_j^{-1} \ldots \overline{a}_j \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a}_j \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3} \ldots \alpha_j^{-1}\overline{a}_j \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\alpha_1^{-1}\ \underbrace{\overline{a}_1 \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1} \ldots \overline{a}_1 \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\alpha_k^{-1}\ \underbrace{\overline{a}_k \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1} \ldots \overline{a}_k \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_k^{-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\overline{a}_1 \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \ldots \alpha_1^{-1}\overline{a}_1 \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\overline{a}_k \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \ldots \alpha_k^{-1}\overline{a}_k \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

Случай подстановки порядка делящего $n - 1$. Если порядок d подстановки σ делит $n - 1$, то есть $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, то d делит $l - 1$, так как из $l = s(n - 1) + 1$ следует $l = td + 1$, где $t = sr$. Поэтому теоремы 2.1 и 2.2 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

***Теорема* 2.3.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – любые обратные последовательности в $< A, \eta >$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда элемент $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\ \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{sr-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}a_j^{-1} \ldots \alpha_j^{-1}a_j^{-1}}_{sr-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\alpha_1^{-1}\ \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{sr-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\alpha_k^{-1}\ \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{sr-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}a_1^{-1} \ldots \alpha_1^{-1}a_1^{-1}}_{sr-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}a_k^{-1} \ldots \alpha_k^{-1}a_k^{-1}}_{sr-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

***Теорема* 2.4.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – *любая обратная последовательность в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\ \underbrace{\overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}\,\alpha_j^{-1} \ldots \overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}}_{sr-1}\,\alpha_j^{-1}\ ) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3} \ldots \alpha_j^{-1}\overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}}_{sr-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\alpha_1^{-1}\ \underbrace{\overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}\,\alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}}_{sr-1}\,\alpha_1^{-1}\ ),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\alpha_k^{-1}\ \underbrace{\overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}\,\alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}}_{sr-1}\,\alpha_k^{-1}\ )) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \ldots \alpha_1^{-1}\overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}}_{sr-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \ldots \alpha_k^{-1}\overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}}_{sr-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

Тернарный случай. Если в теореме 2.2 положить $n = 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в тернарной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять его косой элемент $\overline{a_j}$. В результате получим

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа*, σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s + 1)$-*арной группы* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – *любая обратная последовательность в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\ \underbrace{\overline{a_j}\alpha_j^{-1} \ldots \overline{a_j}\alpha_j^{-1}}_{t-1}) = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a_j} \ldots \alpha_j^{-1}\overline{a_j}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\alpha_1^{-1}\ \underbrace{\overline{a_1}\alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1}\alpha_1^{-1}}_{t-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\alpha_k^{-1}\ \underbrace{\overline{a_k}\alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k}\alpha_k^{-1}}_{t-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\overline{a_1} \ldots \alpha_1^{-1}\overline{a_1}}_{t-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\overline{a_k} \ldots \alpha_k^{-1}\overline{a_k}}_{t-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

Если в следствии 2.1 положить $d = 2$, то $t = s$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)},\ \alpha_j^{-1} = a_{\sigma(j)}^{-1} = \overline{a_{\sigma(j)}},\ , j = 1, \ldots, k$$

и получим

***Следствие* 2.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа*, σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* 2, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s + 1)$-*арной группы* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma(j)}}\ \underbrace{\overline{a_j a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j a_{\sigma(j)}}}_{s-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma(j)} a_j} \ldots \overline{a_{\sigma(j)} a_j}}_{s-1}\ \overline{a_{\sigma(j)}}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma(1)}}\ \underbrace{\overline{a_1 a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1 a_{\sigma(1)}}}_{s-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{\sigma(k)}}\ \underbrace{\overline{a_k a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k a_{\sigma(k)}}}_{s-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma(1)} a_1} \ldots \overline{a_{\sigma(1)} a_1}}_{s-1}\ \overline{a_{\sigma(1)}}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma(k)} a_k} \ldots \overline{a_{\sigma(k)} a_k}}_{s-1}\ \overline{a_{\sigma(k)}})).$$

Ясно, что пример 2.1 является прямым следствием следствия 2.2, если в нём положить $s = 2$, $k = 3$, $\sigma = (13) \in \mathbf{S}_3$.

Следующая лемма является следствием соответствующей леммы из [10].

***Лемма* 2.2.** [10, лемма 2.3]. *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная группа*, d – *чётное*, $d \geq 4$, $a_1, \ldots, a_{d-1}$ – *произвольные элементы из* A, *то*

$$\overline{\eta(a_1 \ldots a_{d-1})} = \eta(\overline{a_{d-1}}\ \ldots\ \overline{a_1}).$$

***Замечание* 2.2.** Если в следствии 2.1 d – чётное, то последовательность α_j из следствия 2.1 имеет нечётную длину $d - 1$. Это позволяет в качестве обратной последовательности α_j^{-1} в тернарной группе $< A, \eta >$ для последовательности

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},$$

где $d \geq 4$, взять косой элемент

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})},$$

который, ввиду леммы 2.2, принимает вид

$$\alpha_j^{-1} = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}).$$

Если же $d = 2$, то $\alpha_j^{-1} = \overline{a_{\sigma(j)}}$.

Поэтому из следствия 2.1, учитывая замечание 2.2, можно извлечь

***Следствие* 2.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа*, σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *чётного порядка* d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s + 1)$-*арной группы* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}$$

$$\underbrace{\overline{a_j}\,\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j}\,\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}}_{t-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}\,\overline{a_j} \ldots \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}\,\overline{a_j}}_{t-1}$$

$$\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}),$$

является косым для **a**, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}$$

$$\underbrace{\overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}}_{t-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}$$

$$\underbrace{\overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}}_{t-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}\,\overline{a_1} \ldots \overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}\,\overline{a_1}}_{t-1}$$

$$\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}\,\overline{a_k} \ldots \overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}\,\overline{a_k}}_{t-1}$$

$$\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}})).$$

Бинарный случай. Если в теореме 2.1 положить $n = 2$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в группе A для её элемента a_j можно взять его обратный элемент a_j^{-1}, а обратная последовательность α_j^{-1} в группе A для её элемента $a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}$ совпадает с произведением соответствующих обратных элементов:

$$\alpha_j^{-1} = a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \ldots a_{\sigma(j)}^{-1},\ j = 1, \ldots, k.$$

В этом случае формулировка теоремы 2.1 принимает следующий вид.

Теорема 2.5. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент $(s + 1)$-арной группы $< A^k, [\ ]_{s+1, \sigma, k} >$, $s = td$ для некоторого натурального t. Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \ldots a_{\sigma(j)}^{-1}$$

$$\underbrace{a_j^{-1} a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \ldots a_{\sigma(j)}^{-1} \ldots a_j^{-1} a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \ldots a_{\sigma(j)}^{-1}}_{t-1} =$$

$$= \underbrace{a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \ldots a_{\sigma(j)}^{-1} a_j^{-1} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \ldots a_{\sigma(j)}^{-1} a_j^{-1}}_{t-1}$$

$$a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \ldots a_{\sigma(j)}^{-1},$$

является косым для **a**, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \ldots a_{\sigma(1)}^{-1}$$

$$\underbrace{a_1^{-1} a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \ldots a_{\sigma(1)}^{-1} \ldots a_1^{-1} a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \ldots a_{\sigma(1)}^{-1}}_{t-1},$$

$$\ldots$$

$$a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \ldots a_{\sigma(k)}^{-1}$$

$$\underbrace{a_k^{-1} a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \ldots a_{\sigma(k)}^{-1} \ldots a_k^{-1} a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \ldots a_{\sigma(k)}^{-1}}_{t-1}) =$$

$$= (\underbrace{a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \ldots a_{\sigma(1)}^{-1} a_1^{-1} \ldots a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \ldots a_{\sigma(1)}^{-1} a_1^{-1}}_{t-1}$$

$$a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \ldots a_{\sigma(1)}^{-1},$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \ldots a_{\sigma(k)}^{-1} a_k^{-1} \ldots a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \ldots a_{\sigma(k)}^{-1} a_k^{-1}}_{t-1}$$

$$a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \ldots a_{\sigma(k)}^{-1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.
2. *Гальмак*, *А.М.* О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–39.
3. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
6. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
7. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
8. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
9. *Гальмак*, *А.М.* Косые элементы в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко, М.В. Селькин // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 6 (117). – С. 186–188.
10. *Гальмак*, *А.М.* Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

Поступила в редакцию 29.01.2020.