МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ НЕЧЕТНЫЙ ИНДЕКС

С.Ф. Каморников[1], **В.Н. Тютянов**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Международный университет «МИТСО», Гомель*

FINITE SIMPLE GROUPS ALL THE MAXIMAL SUBGROUPS OF WHICH HAVE ODD INDEX

S.F. Kamornikov[1], **V.N. Tyutyanov**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel*

В работе изучаются конечные простые неабелевы группы, все максимальные подгруппы которых имеют нечетный индекс.

Ключевые слова: *конечная группа*, *максимальная подгруппа*, *нечетный индекс*, *простая неабелева группа*.

The finite simple non-abelian groups all the maximal subgroups of which have odd index are studied.

Keywords: *finite group*, *maximal subgroup*, *odd index*, *simple non-abelian group*.

Введение

Главная цель настоящей работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* G *– конечная простая неабелева группа, у которой любая максимальная подгруппа имеет нечетный индекс. Тогда* $G \simeq A_7$.

В работах М. Либека, Я. Саксла [1] и В. Кантора [2] установлены списки максимальных подгрупп классических групп лиевского типа (линейные группы, симплектические группы, унитарные группы и ортогональные группы), которые могут иметь нечетный индекс в группе. Однако в этих работах не указано, какие из этих подгрупп в точности имеют нечетный индекс. Данный пробел был устранен Н.В. Масловой в серии ее работ. Отметим, прежде всего, ее статьи [3], [4]. Также Н.В. Масловой в [5] была получена полная классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем. При доказательстве теоремы мы опираемся на данные работы.

1 Определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [6], [7]. Если G – группа лиевского типа, то P_i – максимальная параболическая подгруппа группы G, полученная удалением i-ой вершины в соответствующей группе G диаграмме Дынкина.

Нам понадобятся некоторые результаты, которые мы приведем в виде лемм. Пусть $\mathbf{M}$ – множество всех последовательностей $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$, где $x_i \in \{0,1\}$ для всех i и число ненулевых компонент конечно. Введем на множестве $\mathbf{M}$ порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $(u_0, u_1, ..., u_n, ...)$, $(v_0, v_1, ..., v_n, ...)$ из $\mathbf{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Следуя [5, с. 183], через ψ будем обозначать функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность $(s_0, s_1, ..., s_k, ...)$ из $\mathbf{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} ... s_0}$ – запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

***Лемма* 1.1** [5, теорема]. *Пусть* G *– конечная группа,* $Soc(G) \simeq A_n$, $n \geq 5$. *Подгруппа* H *является максимальной подгруппой нечетного индекса в* G *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $G \subseteq S_n$, *H – подгруппа вида*

$$(S_m \times S_{n-m}) \cap G,$$

где $1 \leq m < n/2$ *и* $\psi(n) \geq \psi(m)$;

(2) $G \subseteq S_n$, *H – подгруппа вида*

$$(S_m wr S_t) \cap G,$$

где $n = mt$, $t > 1$ *и* $m = 2^{\omega} \geq 2$, *за исключением случая, когда*

$$H \simeq (S_2 wr S_4) \cap A_8 \simeq 2^3 : S_4 \subset$$
$$\subset 2^3 : PSL_3(2) \subset A_8 \simeq G;$$

(3) $G \simeq A_7$ *и* $H \simeq PSL_2(7)$;

(4) $G \subseteq Aut(A_6)$, *G не содержится в* S_6 *и* $H \in Syl_2(G)$;

(5) $G \simeq A_8$ и $H \simeq 2^3 : PSL_3(2)$.

***Лемма* 1.2** [8, лемма 1.5]. *Пусть G – простая группа Шевалле и L – максимальная подгруппа в G. Если унипотентная подгруппа U содержится в L, то L – параболическая подгруппа группы G.*

***Лемма* 1.3** [9, лемма 3]. *Пусть G – простая группа Шевалле и*

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Тогда существует простой делитель порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G.

2 Доказательство теоремы

Рассмотрим все классы простых неабелевых групп.

1. *G – спорадическая группа.*

Как следует из [7], каждая простая спорадическая группа G содержит максимальную подгруппу H четного индекса (значение индекса подгруппы H в G приведено в таблице 2.1).

2. $G \simeq A_n$, где $n \geq 5$.

Подгруппа A_{n-1} является максимальной в A_n и $|A_n : A_{n-1}| = n$, поэтому по условию теоремы n – нечетное число. Из [7], следует, что при $n \leq 13$ только в группе A_7 все максимальные подгруппы имеют нечетный индекс. Поэтому далее будем считать, что $n > 13$.

Пусть сначала $n = mk$, где $m > 1$ и $k > 1$. Так как $n > 13$, то в соответствии с [10, с. 366], подгруппа H вида $(S_m wr S_k) \cap A_n$ будет максимальной в A_n. Поскольку m и k являются нечетными числами, то по лемме 1.1 подгруппа H имеет в A_n четный индекс.

Таблица 2.1 – Простые спорадические группы

	Группа G	Подгруппа H	Индекс $\lvert G:H \rvert$
1	M_{11}	$L_2(11)$	12
2	M_{12}	M_{11}	12
3	M_{22}	$L_3(4)$	22
4	M_{23}	A_8	506
5	M_{24}	M_{23}	24
6	J_1	$L_2(11)$	266
7	$J_2 = HJ$	$U_3(3)$	100
8	HS	M_{22}	100
9	J_3	$L_2(16):2$	6156
10	McL	$U_3(5)$	7128
11	He	$S_4(4):2$	2058
12	Ru	${}^2F_4(2)$	4060
13	Suz	$G_2(4)$	1782
14	$O'N$	$L_3(7):2$	122760
15	Co_3	$McL:2$	276
16	Co_2	$U_6(2):2$	2300
17	Fi_{22}	$2.U_6(2)$	3510
18	HN	A_{12}	1140000
19	Ly	$G_2(5)$	8835156
20	Th	${}^3D_4(2):3$	143127000
21	Fi_{23}	$S_8(2)$	86316516
22	Co_1	Co_2	98280
23	J_4	$2^{11}:M_{24}$	8474719242
24	Fi_{24}'	Fi_{23}	306936
25	$B = F_{2+}$	47:23	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$
26	$M = F_1$	59:29	$2^{28} \cdot 3^7 \cdot 5^7 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 71$

Следовательно, $n = p$ – простое число. Рассмотрим подгруппу H вида $AGL_1(p) \cap A_n$. Так как $n > 13$, то из таблицы 1 работы [10, с. 367] следует, что подгруппа H максимальна в A_n при $n \neq 17$ и $n \neq 23$. При этом индекс подгруппы $AGL_1(p) \cap A_n$ в A_n является четным.

Если $n = 17$, то $H \simeq 17.8$ содержится в максимальной подгруппе вида $PSL_2(16).4$. Данная подгруппа имеет в A_{17} четный индекс. При $n = 23$ подгруппа $H \simeq 23:11$ содержится в максимальной подгруппе вида M_{23}, а эта подгруппа имеет в A_{23} четный индекс.

3. *G – простая группа лиевского типа*.

Пусть сначала группа G определена над полем характеристики 2. По условию все максимальные в G подгруппы содержат силовскую 2-подгруппу группы G. Из леммы 1.2 следует, что любая максимальная в G подгруппа является параболической. Если

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\},$$

то по лемме 1.3 найдется простой делитель r порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G. Следовательно, максимальная подгруппа, содержащая силовскую r-подгруппу группы G, не является параболической. Последнее невозможно. Таким образом,

$$G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Группы из данного списка обладают максимальными подгруппами четного индекса в группе G.

Следовательно, группа G определена над полем нечетной характеристики. Пусть сначала G – классическая группа. Полное описание максимальных подгрупп, имеющих в классических группах нечетный индекс приведено в работе [4]. Из данной работы, в частности, следует, что в группе G всегда существует максимальная подгруппа четного индекса. Поэтому G является исключительной группой. Списки максимальных подгрупп исключительных групп разбросаны по многим статьям. Мы будем использовать работу [11]. Рассмотрим все случаи.

(1) $G \simeq G_2(q)$, где $q = p^n$ и p – нечетное простое число. Если $p = 3$, то максимальная подгруппа $(q^2 \times q^{1+2}) : GL_2(q)$ [11, с. 127] имеет в группе G индекс $(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$, являющийся четным числом. Если $p > 3$, то максимальная подгруппа $q^{1+4} : GL_2(q)$ имеет в G четный индекс $(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$.

(2) $G \simeq {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$. Максимальная в G подгруппа $q^{1+1+1} : Z_{q-1}$ [11, с. 138] имеет в группе G четный индекс $q^3 + 1$.

(3) $G \simeq {}^3D_4(q)$. В этом случае подгруппа $q^{2+3+6} : SL_2(q).Z_{q^3-1}$ [11, с. 144] имеет в группе G четный индекс $q^3 + 1$.

(4) $G \simeq F_4(q)$. Максимальная в G подгруппа $q^{1+14} : Sp_2(q).Z_{q-1}$ [11, с. 161] имеет четный индекс, равный $(q^4 + 1)(q^{12} - 1)$.

(5) $G \simeq {}^2E_6(q)$. Группа G имеет максимальную параболическую подгруппу P, для которой

$$|G:P| = \\ = \frac{(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)}{2(q-1)(q^6+1)(q^5-1)(q^4+1)(q^3-1)(q^2+1)} = \\ = \frac{(q^6-1)(q^9+1)(q^2-1)(q^3+1)(q^5+1)(q+1)}{2(q^5-1)} = \\ = \frac{(q^6-1)(q^9+1)(q^3+1)(q^5+1)(q+1)^2}{2(q^4+q^3+q^2+q+1)}.$$

Отсюда и из нечетности числа $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ следует, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

(6) $G \simeq E_6(q)$. Рассмотрим в G максимальную параболическую подгруппу $P = P_4$ (6, с. 76). Тогда из

$$|G:P| = \\ = \frac{(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)} = \\ = \frac{(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)}{(q-1)(q^3-1)(q^4-1)} = \\ = (q^4+1)(q^9+q^6+q^3+1) \times \\ \times (q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)$$

следует, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

(7) $G \simeq E_7(q)$. Рассмотрим в G максимальную параболическую подгруппу $P = P_5$ (6, с. 76). Тогда имеем

$$|G:P| == \frac{(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} \times \\ \times \frac{(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)}{(q^5-1)(q^6-1)(q^7-1)} = \\ = \frac{(q^4+1)(q^5+1)(q^{12}-1)(q^7+1)(q^{18}-1)}{(q-1)(q^3-1)} = \\ = (q^4+1)(q^5+1)(q^7+1) \cdot \frac{q^{12}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{18}-1}{q^3-1}.$$

Отсюда следует, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

(8) $G \simeq E_8(q)$. Рассмотрим в G максимальную параболическую подгруппу $P = P_6$ (6, с. 76). Тогда из

$$|G:P| = \frac{(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} \times$$

$$\times \frac{(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)}{(q^5-1)(q^6-1)(q^7-1)(q^8-1)} =$$

$$= \frac{(q^6+1)(q^7+1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)}{(q-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)} =$$

$$= (q^6+1)(q^7+1) \cdot \frac{q^{24}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{18}-1}{q^3-1} \cdot \frac{q^{20}-1}{q^4-1} \cdot \frac{q^{30}-1}{q^5-1}.$$

имеем, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

Итак, только в простой группе A_7 все максимальные подгруппы имеют нечетный индекс. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liebeck*, *M.W.* The primitive permutation groups of odd degree / M.W. Liebeck, J. Saxl // J. London Math. Soc. – 1985. –Vol. 31, № 2. – P. 250–264.

2. *Kantor*, *W.M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes / W.M. Kantor // J. Algebra. – 1987. – Vol. 106, № 1. – P. 15–45.

3. *Маслова*, *Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах / Н.В. Маслова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 100–118.

4. *Maslova*, *N.V.* Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups / N.V. Maslova // Siberian Electron. Math. Reports. – 2018. – Vol. 15. – P. 707–718.

5. *Маслова*, *Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем / Н.В. Маслова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 182–184.

6. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

7. *Conway*, *J.H.* Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

8. *Seitz*, *G.M.* Flag-transitive subgroups of Chevalley groups / G.M. Seitz // Ann. Math. – 1973. – Vol. 97, № 1. – P. 27–56.

9. *Тютянов*, *В.Н.* Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // Доклады НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 52–55.

10. *Liebeck*, *M.W.* A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups / M.W. Liebeck, C.E. Prager, J. Saxl // J. Algebra. – 1987. – Vol. 111, № 2. – P. 365–383.

11. *Wilson*, *R.A.* The finite simple groups / R.A. Wilson. – Springer: Graduate texts in mathematics 251, 2009. – 298 p.

Исследования С.Ф. Каморникова выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант ГР №20191056)

Поступила в редакцию 29.03.2020.