ПИСЬМА

Параметрическая неустойчивость при взаимодействии модулированного пучка с плазмой

В. Д. ШАПИРО

УДК 533.9

В работе [1] была показана возможность частичной стабилизации пучковой неустойчивости с помощью модуляции пучка по плотности. В настоящей работе исследуется неустойчивость другого типа, связанная с параметрическим резонансом. Эта неустойчивость возникает при взаимодействии модулированного пучка с плазмой в том случае, когда удвоенная длина волны модуляции кратна плазменной длине волны $2\pi \frac{v_0}{\omega_0}$.

Так же, как и в работе [1], рассмотрим случай, когда в стационарном состоянии пучок разбит на сгустки со скомпенсированным зарядом, движущиеся с постоянной скоростью v_0 вдоль оси z. В этом случае плотность частиц пучка определяется из соотношения

$$n_0(\xi) = \begin{cases} n_{0\text{в}} & \text{при} \quad sl < \xi < sl + a; \\ 0 & \text{при} \quad sl + a < \xi < (s+1)\,l, \quad s = 0 \pm 1 \ldots . \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $n_{0\text{в}}$ — постоянная плотность частиц внутри сгустка; $\xi = z - v_0 t$; a — размер сгустка; l — расстояние между сгустками. Для исследования параметрической неустойчивости одномерных ленгмюровских колебаний в системе плазма — сгустки в качестве исходного используем уравнение для электрического поля колебаний, полученное в работе [2]. В системе отсчета, связанной со сгустками, это уравнение записывается следующим образом:

$$\left(i\omega + v_0 \frac{d}{d\xi}\right)^2 D + \frac{\omega_0^2}{\varepsilon^{\text{в}}(\xi, \omega)} D = 0, \tag{2}$$

где $D = \varepsilon^{\text{в}} E$ (E — электрическое поле колебаний); $\varepsilon^{\text{в}}(\xi, \omega) = 1 - \frac{\omega_1^2(\xi)}{\omega^2}$ — диэлектрическая постоянная пучка в системе отсчета, связанной с его частицами; ω — частота колебаний в этой системе; $\omega_1(\xi) = \left(\frac{4\pi e^2 n_0(\xi)}{m}\right)^{1/2}$ и $\omega_0 = \left(\frac{4\pi e^2 \rho_0}{m}\right)^{1/2}$ — ленгмюровские частоты пучка и плазмы соответственно. Рассмотрим случай, когда выполнено условие

$$\frac{a}{l} \cdot \frac{\omega_{\text{в}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2} \ll 1, \quad \left(\omega_{\text{в}}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0\text{в}}}{m}\right) \tag{3}$$

и для всех $n \neq 0$ значения $f_{n,\,\omega} \ll f_{0,\,\omega}$ ($f_{n,\,\omega}$ — коэффициенты фурье-разложения функции $\frac{1}{\varepsilon^{\text{в}}}$: $\frac{1}{\varepsilon^{\text{в}}(\xi, \omega)} = \sum_n f_{n,\,\omega} e^{ink_0\xi}$, $k_0 = \frac{2\pi}{l}$). В этом случае решение уравнения (2) находим в виде

$$D = A_+ \exp(ik_+\xi) + A_- \exp(ik_-\xi). \tag{4}$$

Здесь

$$k_\pm = -\frac{\omega}{v_0} \pm \frac{\omega_0}{v_0}\sqrt{f_0} = -\frac{\omega}{v_0} \pm \frac{\omega_0}{v_0}\left(1 + \frac{a}{2l} \times \frac{\omega_{\text{в}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2}\right); \tag{4'}$$

$A_\pm$ — медленно меняющиеся функции ξ. Как обычно, параметрическая неустойчивость возникает при выполнении условия

$$k_+ = k_- + nk_0 + \Delta; \quad \frac{|\Delta|}{k_0} \ll 1, \tag{5}$$

где n — целое число. Тогда для $A_\pm$ из (2) получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA_+}{d\xi} + \frac{\omega_0^2 f_n}{2iv_0(\omega + k_+v_0)} A_- \exp(-i\Delta\xi) = 0; \\ &\frac{dA_-}{d\xi} + \frac{\omega_0^2 f_n^*}{2iv_0(\omega + k_-v_0)} A_+ \exp(i\Delta\xi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Отсюда $A_\pm = \text{const} \exp\left(i\varkappa\xi \mp \frac{i}{2}\Delta\xi\right)$, где $\varkappa$ при $a \ll l$ определяется из уравнения

$$\varkappa^2 = -\frac{\omega_0^2}{4v_0^2} \cdot \frac{|f_n|^2}{f_0} + \frac{\Delta^2}{4} = -\frac{\omega_0^2}{4v_0^2} \cdot \frac{a^2}{l^2} \cdot \frac{\omega_{\text{в}}^4}{(\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2)^2} + \frac{1}{4}\left[2\frac{\omega_0}{v_0}\left(1 + \frac{a}{2l} \cdot \frac{\omega_{\text{в}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2}\right) - nk_0\right]^2. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу о возбуждении колебаний с заданным волновым числом k. Поскольку $k = k_\pm \mp \frac{\Delta}{2} + \varkappa$, то, используя (4′) и (5), получим следующее соотношение, связывающее ω и k:

$$\left(k + \frac{\omega}{v_0} - \varkappa\right)^2 = \left[\frac{\omega_0}{v_0}\left(1 + \frac{a}{2l} \cdot \frac{\omega_{\text{в}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2}\right) - \frac{\Delta}{2}\right]^2 = \frac{n^2 k_0^2}{4}. \tag{8}$$

Для частоты в лабораторной системе отсчета получим

$$\omega_л = \omega + kv_0 = \frac{nk_0v_0}{2} + \varkappa v_0. \qquad (8')$$

Определяя $\varkappa$ из (8′), с помощью соотношения (7) получим дисперсионное уравнение

$$\left(\omega_л - \frac{n}{2}\,k_0v_0\right)^2 = \left(\omega_0 - \frac{n}{2}\,k_0v_0\right)^2 + \frac{a}{l}\,\omega_0\left(\omega_0 - \frac{n}{2}\,k_0v_0\right)\frac{\omega_в^2}{(\omega_л - kv_0)^2 - \omega_в^2}. \qquad (9)$$

Уравнение (9) можно также получить из более общего дисперсионного уравнения работы [1], если в последнем принять $\left|\omega_0 - \frac{n}{2}\,k_0v_0\right| \ll k_0v_0$, $\left|\omega_л - \frac{n}{2}\,k_0v_0\right| \ll k_0v_0$ и пренебречь тепловым движением в сгустках.

При достаточно больших «расстройках» $\left|\omega_0 - \frac{n}{2}\,k_0v_0\right| \gg Jm\omega$ из уравнения (9) следуют формулы для спектра и инкрементов пучковой неустойчивости, полученные в работах [1, 2]. В настоящей работе исследуется случай малых расстроек $\left|\omega_0 - \frac{n}{2}\,k_0v_0\right| \leqslant Jm\omega$, когда неустойчивость связана с параметрическим резонансом. Вводя в уравнении (9) безразмерные величины

$$\xi = \frac{\left(k - \frac{n}{2}\,k_0\right)v_0}{\omega_в^{2/3}\omega_0^{1/3}}, \qquad \eta = \frac{\omega_л - \frac{n}{2}\,k_0v_0}{\omega_в^{2/3}\omega_0^{1/3}},$$

$$\delta = 1 - \frac{n}{2}\,\frac{k_0v_0}{\omega_0},$$

запишем его в виде

$$\eta^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega_в}\right)^{4/3}\delta^2 + \frac{a}{l}\left(\frac{\omega_0}{\omega_в}\right)^{2/3}\frac{\delta}{(\xi-\eta)^2 - \left(\frac{\omega_в}{\omega_0}\right)^{2/3}}. \qquad (10)$$

При точном резонансе $\delta = 0$ неустойчивость отсутствует $\left(\eta = 0,\ \eta = \xi \pm \left(\frac{\omega_в}{\omega_0}\right)^{1/3}\right)$. Рассмотрим, как изменяется инкремент с ростом расстройки δ. Сначала исследуем большие значения $k - \frac{n}{2}\,k_0$, когда $\xi \gg |\eta|$, что соответствует $|\omega_л - kv_0| \gg Jm\omega$. В этом случае из (10) найдем уравнение для определения η

$$\eta^2 = \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega_в}\right)^{2/3}\delta + \frac{a}{2l}\,\frac{1}{\xi^2 - \left(\frac{\omega_в}{\omega_0}\right)^{2/3}}\right]^2 - \frac{a^2}{4l^2}\,\frac{1}{\left[\xi^2 - \left(\frac{\omega_в}{\omega_0}\right)^{2/3}\right]^2}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что неустойчивость в этих условиях возникает уже при малых расстройках:

$$-\frac{a}{l}\,\frac{\left(\frac{\omega_в}{\omega_0}\right)^{2/3}}{\xi^2 - \left(\frac{\omega_в}{\omega_0}\right)^{2/3}} < \delta < 0. \qquad (12)$$

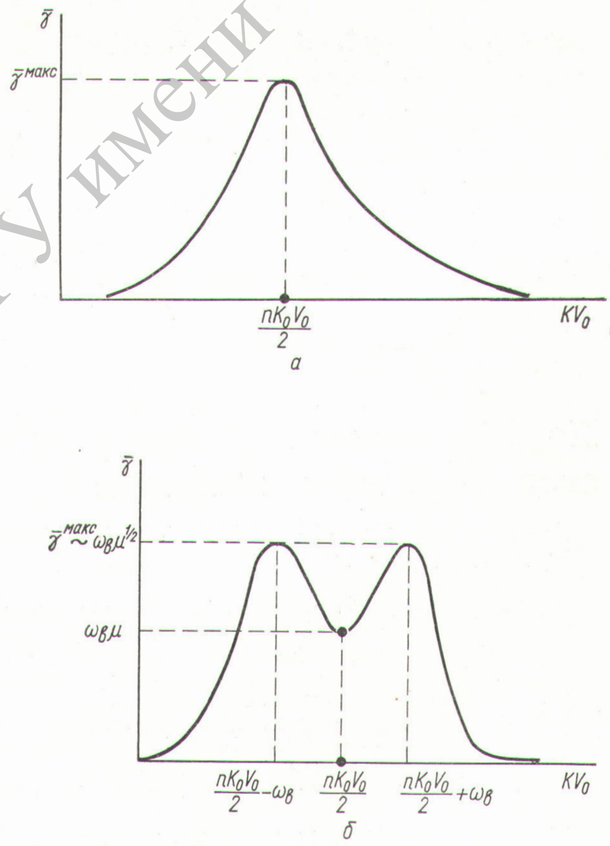
Наибольшее значение инкремента в зоне неустойчивости равно

$$\bar{\gamma} = \frac{a}{2l}\cdot\omega_в^{2/3}\omega_0^{1/3}\,\frac{1}{\xi^2 - \left(\frac{\omega_в}{\omega_0}\right)^{2/3}}. \qquad (12')$$

При уменьшении ξ инкремент $\bar{\gamma}$ возрастает, однако при малых ξ уравнение (11) неприменимо, так как нарушается условие $|\eta| \ll \xi$. При малых ξ решение существенно зависит от параметра $\mu = \frac{\omega_0 a}{\omega_в l}$, характеризующего степень неоднородности распределения плотности в пучке.

При $\mu \gg 1$ максимальное значение $\bar{\gamma}$ достигается, когда $\xi = 0$ (см. рисунок). Полагая в уравнении (9) $\xi = 0$, получим, что в этом случае имеются две зоны неустойчивости

$$0 < \delta < \frac{a}{l}, \qquad (13)$$



Зависимость наибольшего значения инкремента нарастания в зоне неустойчивости от расстройки

$$k - \frac{n}{2}\,k_0 = \frac{\omega_в^{2/3}\omega_0^{1/3}}{v_0}\,\xi;$$

$а - \mu = \frac{\omega_0 a}{\omega_в l} \gg 1$; $б - \mu \ll 1$.

в которой наибольшее значение $\bar{\gamma}$ достигается при

$$\delta = \left(\frac{a}{2l}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right)^{2/3} \text{ и равно}$$

$$\bar{\gamma}_{\text{макс}} = \left(\frac{a}{2l}\right)^{1/3} \omega_{\text{в}}^{2/3} \omega_0^{1/3} \tag{13'}$$

и

$$-\left(\frac{4a}{l}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right)^{2/3} < \delta < 0,$$

в которой наибольший инкремент $\bar{\gamma}$ того же порядка:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^{1/3} \omega_{\text{в}}^{2/3} \omega_0^{1/3} \left[\text{при } \delta = -\left(\frac{a}{l}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right)^{2/3}\right]. \tag{14}$$

В случае $\mu \ll 1$ становится существенным резонанс при $\xi = \pm \left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right)^{1/3}$, что соответствует $\left(k - \frac{n}{2} k_0\right) v_0 = \pm \omega_{\text{в}}$*. Из (9) при $\xi = \pm \left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right)^{1/3}$, $|\eta| \ll \xi$ получим кубическое уравнение для определения η

$$\eta^3 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_{\text{в}}}\right)^{4/3} \delta^2 \eta + \frac{a}{2l} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_{\text{в}}} \delta = 0, \tag{15}$$

откуда следует, что неустойчивость в рассматриваемом случае возникает при

$$-\frac{3^{3/2}}{2} \mu^{1/2} \frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0} < \delta < \frac{3^{3/2}}{2} \mu^{1/2} \frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}. \tag{16}$$

Наибольшее значение инкремента в зоне неустойчивости по порядку величины равно

$$\bar{\gamma}_{\text{макс}} \approx \omega_{\text{в}} \mu^{1/2} = \left(\frac{a}{l}\right)^{1/3} \mu^{1/6} \omega_{\text{в}}^{2/3} \omega_0^{1/3}. \tag{16'}$$

При дальнейшем уменьшении ξ инкремент $\bar{\gamma}$ уменьшается (см. рисунок, *б*), и при $\xi = 0$ с помощью (9) получим следующие соотношения для ширины зоны неустойчивости и наибольшего значения инкремента в ней

$$0 < \delta < \frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0} \mu; \quad \bar{\gamma} = \frac{\mu}{2} \omega_{\text{в}} \left(\text{при } \delta = \frac{\mu}{2} \frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right). \tag{17}$$

Максимальное значение инкремента нарастания колебаний при параметрической неустойчивости, определяемое соотношениями (13′) в случае $\mu \gg 1$ и (16′) в случае $\mu \ll 1$, оказывается того же порядка, что и максимум инкремента при пучковой неустойчивости [1, 2]. Это значение достигается при достаточно большой расстройке $\delta \sim \frac{\gamma_{\text{макс}}}{\omega_0}$. При меньших расстройках инкремент нарастания меньше, и неустойчивость развивается медленнее, чем в нерезонансных случаях, рассмотренных в работах [1, 2].

Автор благодарен Я. Б. Файнбергу, В. И. Курилко за полезные дискуссии.

Поступило в Редакцию 30/VI 1966 г.

* В случае $\mu \gg 1$ резонанс при $\xi = \pm \left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right)^{1/3}$ отсутствует, так как при таких ξ $\text{Jm}\,\eta \sim \left(\frac{a}{l}\right)^{1/3} \gg \left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0}\right)^{1/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро. «Атомная энергия», **19**, 336 (1965).
2. В. Д. Шапиро. ЖТФ, **37**, вып. 2 (1967).

Полустатистический метод измерения эффективной доли запаздывающих нейтронов

А. И. МОГИЛЬНЕР, Г. П. КРИВЕЛЕВ, Е. К. МАЛЫШЕВ, С. А. МОРОЗОВ, Д. М. ШВЕЦОВ

УДК 621.039.512: 621.039.514

При измерениях реактивности, основанных на изучении временного поведения реактора, она определяется в единицах эффективной доли запаздывающих нейтронов $\beta_{\text{эфф}}$. Между тем расчеты предсказывают реактивность в абсолютных единицах. Для сопоставления расчетных и экспериментальных данных используют обычно расчетное значение относительной ценности запаздывающих нейтронов $\gamma = \frac{\beta_{\text{эфф}}}{\beta}$ для данного реактора и известную величину β. К сожалению, сведения о деталях энергетического спектра запаздывающих нейтронов часто недостаточны для надежного расчета γ, особенно для реакторов с бериллиевым или тяжеловодным замедлителем, в которых пороговая реакция $(n, 2n)$ может оказать серьезное и трудно учитываемое влияние на ценность запаздывающих нейтронов. Поэтому экспериментальное определение эффективного выхода запаздывающих нейтронов — важная проблема физики реакторов, решение которой необходимо, с одной стороны, для определения абсолютной реактивности, с другой — для проверки теоретических методик и констант.

Существующие методы определения абсолютной реактивности и связанной с ней величины $\beta_{\text{эфф}}$ применимы к очень узкому классу реакторов. Например, в работе [1] описан метод определения абсолютной реактивности, основанный на замещении материала активной зоны веществом, также поглощающим нейтроны, но не способным делиться. В этом методе основная проблема связана с подбором соответствующего вещества, и если она в той или иной мере может быть решена для тепловых реакторов, то для реакторов с более жестким спектром нейтронов положение значительно осложняется. В работах [2—4] описаны эксперименты по применению этого метода, когда в качестве поглощающего вещества использовался бор, сечение