

Обращенное решение уравнений кинетики ядерного реактора

И. Н. БРИККЕР

УДК 621.039.515

Из уравнений кинетики ядерного реактора найден функционал, позволяющий определить, как меняется коэффициент размножения, если известно изменение плотности нейтронов, а также найти закон, по которому следует менять коэффициент размножения, чтобы изменение плотности нейтронов осуществлялось по заданному закону.

Как известно [1], динамика процессов, происходящих в ядерных реакторах, подчиняется уравнениям кинетики:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{K_{эфф} - 1 - \beta K_{эфф}}{l} n + \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i + s; \quad (1)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{l} K_{эфф} n - \lambda_i c_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N), \quad (2)$$

где $n(t)$ — плотность нейтронов; $c_i(t)$, λ_i — концентрация и постоянная распада излучателей запаздывающих нейтронов группы i ; β_i — доля запаздывающих нейтронов группы i ; $\beta = \sum_i \beta_i$ — полная доля запаздывающих нейтронов; l — среднее время жизни мгновенных нейтронов; $K_{эфф}$ — эффективный коэффициент размножения нейтронов; $s(t)$ — мощность посторонних источников нейтронов.

Обычно, решая уравнения кинетики, определяют закон изменения плотности нейтронов, если коэффициент размножения меняется по заданному закону, т. е. находят функционал $n\{K_{эфф}(t)\}$. Представляет интерес найти функционал $K_{эфф}\{n(t)\}$, что позволит: 1) определить $K_{эфф}$, если плотность нейтронов известна во все предыдущие моменты времени; 2) при проектировании оптимальных систем автоматического управления найти, по какому закону следует изменять $K_{эфф}$, чтобы $n(t)$ менялось по заданному закону $n_3(t)$; 3) определить характеристики исполнительных механизмов и поглощающих стержней, обеспечивающих заданный закон изменения плотности нейтронов.

Задача отыскания функционала $K_{эфф}\{n(t)\}$ была поставлена и решена в работе [1] для линеаризованных уравнений кинетики. В работе [2] эта задача решена для частного случая (рассмотренного ниже), однако примененный в этой работе метод не позволяет определить искомый функционал при $l = \text{const}$. В настоящей статье приведено полное решение поставленной задачи.

Рассмотрим реактор, управляемый воздействием на поглощение или утечку нейтронов. Тогда, как показано в работе [3], l не является константой, а зависит от $K_{эфф}$:

$$l = \Lambda K_{эфф}, \quad (3)$$

где время генерации Λ постоянно. В критическом состоянии значения Λ и l совпадают.

Используя выражения для l и реактивности

$$\rho = \frac{K_{эфф} - 1}{K_{эфф}}, \quad (4)$$

из (1) и (2) получим:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i + s; \quad (5)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (6)$$

Допустим, что при $t < 0$ реактор находился в равновесном состоянии, т. е.

$$n(0) = -\frac{\Lambda s(0)}{\rho(0)}; \quad (7)$$

$$c_i(0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} n(0). \quad (8)$$

Введем в (5) и (6) вспомогательную переменную $z(t) = n(t)\rho(t)$ и преобразуем почленно эти уравнения по Лапласу

$$\begin{aligned} \Lambda [pN(p) - n(0)] &= \\ &= Z(p) - \beta N(p) + \Lambda \sum_{i=1}^N \lambda_i C_i(p) + \Lambda S(p); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Lambda [pC_i(p) - c_i(0)] = \beta_i N(p) - \Lambda \lambda_i C_i(p), \quad (10)$$

где

$$N(p) = \mathcal{L}n(t); \quad Z(p) = \mathcal{L}z(t);$$

$$C_i(p) = \mathcal{L}c_i(t); \quad S(p) = \mathcal{L}s(t)$$

(\mathcal{L} — оператор прямого преобразования Лапласа).

Подставив в (9) $C_i(p)$ из (10) и используя (8), получим

$$\begin{aligned} Z(p) &= \Lambda [pN(p) - n(0) - S(p)] + \\ &+ [pN(p) - n(0)] \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{p + \lambda_i}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя теорему о свертке, перейдем в выражении (11) к оригиналам

$$\varrho(t) = \frac{1}{n(t)} \left\{ \Lambda \left(\frac{dn}{dt} - s \right) + \sum_{i=1}^N \beta_i \int_0^t \frac{dn}{d\tau} \exp[-\lambda_i(t-\tau)] d\tau \right\}. \quad (12)$$

Эта формула позволяет полностью решить поставленную задачу и определить по (4) искомый функционал.

Рассмотрим случай, когда управление реактором осуществляется изменением сечения деления ($l = \text{const}$).

Введем избыточный коэффициент размножения

$$\Delta K = K_{\text{эфф}} - 1 \quad (13)$$

и вспомогательную переменную $z(t) = n(t) \Delta K(t)$. Затем, повторив для уравнений (1) и (2) изложенный выше вывод, получим

$$Z(p) = \left\{ l[pN(p) - n(0) - S(p)] + [pN(p) - n(0) - z(0)] \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{p + \lambda_i} \right\} \left[1 - p \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{p + \lambda_i} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Обозначим через L^{-1} оператор обратного преобразования Лапласа и введем функцию

$$\varphi(t) = L^{-1}\Phi(p), \quad (15)$$

где

$$\Phi(p) = \left[1 - p \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{p + \lambda_i} \right]^{-1} = (1 - \beta)^{-1} - \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i \lambda_i}{(1 - \beta)(p + \lambda_i)} \right]^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i \lambda_i}{(1 - \beta)(p + \lambda_i)}. \quad (16)$$

Воздействуем на (14) оператором L^{-1} почленно и используем теорему о свертке, в результате получим

$$\Delta K(t) = \frac{1}{n(t)} \left\{ l \int_0^t \left(\frac{dn}{d\tau} - s \right) \varphi(t - \tau) d\tau + \int_0^t \frac{dn}{d\tau} \int_0^{t-\tau} \sum_{i=1}^N \beta_i \exp[-\lambda_i(t-\tau-\vartheta)] \varphi(t - \tau - \vartheta) d\tau d\vartheta - z(0) \int_0^t \sum_{i=1}^N \beta_i \exp[-\lambda_i \tau] \varphi(t - \tau) d\tau \right\}. \quad (17)$$

Функцию веса $\varphi(t)$, входящую в (17), можно точно определить по (15) и (16), так как для каждого реактора известны все λ_i и β_i . Например, в одногрупповом приближении из (15) и (16) легко получить выражение

$$\varphi(t) = \frac{\delta(t)}{1 - \beta} - \frac{\lambda\beta}{(1 - \beta)^2} \exp\left[-\frac{\lambda t}{1 - \beta}\right], \quad (18)$$

которое можно упростить, поскольку $\beta \ll 1$:

$$\varphi(t) = (1 + \beta) \delta(t) - \lambda\beta \exp[-\lambda t]. \quad (19)$$

В многогрупповом приближении задача отыскания точного выражения для $\varphi(t)$ весьма громоздка, а при $N > 4$ она вообще не имеет аналитического решения, хотя ее можно решить численно сколь угодно точно для любого реактора. Однако в численном решении практически нет надобности, так как, используя неравенство $\beta \ll 1$, можно аналитически определить искомый функционал с достаточной степенью точности.

Действительно, пренебрежем в (16) и (17) членами порядка β по сравнению с единицей, тогда после несложных преобразований получим

$$\Delta K(t) = \frac{1}{n(t)} \left\{ l \left(\frac{dn}{dt} - s \right) + \sum_{i=1}^N \beta_i \int_0^t \frac{dn}{d\tau} \exp[-\lambda_i(t-\tau)] d\tau \right\}. \quad (20)$$

Чтобы получить следующий член в разложении по β , в формуле (16) выделена постоянная составляющая и введена функция-добавка. Это позволяет получить выражение для $\varphi(t)$ с точностью до членов первого порядка по β :

$$\varphi(t) = (1 + \beta) \delta(t) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \beta_i \exp[-\lambda_i t]. \quad (21)$$

В одногрупповом приближении формулы (19) и (21) совпадают.

Подставив в (17) $\varphi(t)$ из (21), получим с той же точностью функционал

$$\Delta K(t) = \frac{1}{n(t)} \left\langle l(1 + \beta) \left(\frac{dn}{dt} - s \right) + l \sum_{i=1}^N \lambda_i \beta_i \int_0^t s(\tau) \exp[-\lambda_i(t-\tau)] d\tau + \int_0^t \frac{dn}{d\tau} \left\{ \sum_{i=1}^N \beta_i \exp[-\lambda_i(t-\tau)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[1 + \beta - \beta_i \lambda_i(t-\tau) - \sum_{k \neq i}^N \beta_k \frac{\lambda_k + \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} - l \lambda_i \right] \right\} d\tau + \right\rangle$$

$$+ l s (0) \sum_{i=1}^N \beta_i \exp(-\lambda_i t) \left[1 + \beta - \beta_i \lambda_i t - \sum_{h \neq i}^N \beta_h \frac{\lambda_h + \lambda_i}{\lambda_h - \lambda_i} \right] \rangle. \quad (22)$$

Заметим, что формула (20) следует из (12), если $\Lambda = l = \text{const}$ и $\Delta K = \varrho$, т. е. $K_{эфф} \approx 1$. Уравнения (1) и (2) при $\Lambda = l = \text{const}$ благодаря малости β при замене ϱ на ΔK независимо от величины $K_{эфф}$ формально совпадают с уравнениями (5) и (6), что следует как из сравнения функционалов (12) и (20), так и из уравнений кинетики. Действительно, переходя в (14) к оригиналам, имеем

$$z(t) + l \left(s - \frac{dn}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \beta_i \int_0^t \left(\frac{dn}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} \right) \exp \times \\ \times [-\lambda_i(t-\tau)] d\tau. \quad (23)$$

Аналогично из формулы (11) получим

$$z(t) + \Lambda \left(s - \frac{dn}{dt} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N \beta_i \int_0^t \frac{dn}{d\tau} \exp[-\lambda_i(t-\tau)] d\tau. \quad (24)$$

Воспользовавшись связью $n(t)$ и $z(t)$, из (23) и (24) можно получить дифференциальные уравнения для $n(t)$, совпадающие между собой после пренебрежения членами порядка β по сравнению с единицей и замены l на Λ и ΔK на ϱ . Например, в одногрупповом приближении из (23) и (24) имеем

$$l \frac{dn^2}{dt^2} + [\beta - (1-\beta)\Delta K + \lambda l] \frac{dn}{dt} - \\ - \left[\lambda \Delta K + (1-\beta) \frac{d\Delta K}{dt} \right] n = l \frac{ds}{dt} + \lambda l s; \quad (25)$$

$$\Lambda \frac{dn^2}{dt^2} + (\beta - \varrho + \lambda \Lambda) \frac{dn}{dt} - \left(\lambda \varrho + \frac{d\varrho}{dt} \right) n = \\ = \Lambda \frac{ds}{dt} + \lambda \Lambda s. \quad (26)$$

В заключение рассмотрим примеры, иллюстрирующие полученную зависимость.

1. Определим закон изменения $\varrho(t)$, обеспечивающий перевод реактора с уровня мощности n_0 до n_1 по экспоненте с периодом τ_0 , т. е.

$$n_3(t) = \begin{cases} n_0, & t \leq 0; \\ n_0 \exp \left[\frac{t}{\tau_0} \right], & 0 \leq t \leq t_1; \\ n_1 = n_0 \exp \left[\frac{t_1}{\tau_0} \right], & t \geq t_1 \end{cases}$$

(мощность источников принята постоянной). Используя $n_3(t)$ и формулу (12), получим

$$\varrho(t) = \begin{cases} -\frac{\Lambda s}{n_0}, & t < 0; \\ \frac{\Lambda}{\tau_0} - \frac{\Lambda s}{n_0} \exp \left[-\frac{t}{\tau_0} \right] + \\ + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{(1+\lambda_i \tau_0)} \left\{ 1 - \exp \times \right. \\ \times \left[-\left(\lambda_i + \frac{1}{\tau_0} \right) t \right] \right\}, & 0 \leq t < t_1; \\ -\frac{\lambda s}{n_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{(1+\lambda_i \tau_0)} \times \\ \times \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\lambda_i + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{\tau_0} \right) t_1 \right] \right\} \times \\ \times \exp[-\lambda_i(t-t_1)], & t \geq t_1. \end{cases}$$

Из выражений для $\varrho(t)$ следует, что при $t=0$ реактивность меняется скачком на величину $\frac{\Lambda}{\tau_0}$. Затем идет переходный процесс, в результате которого устанавливается постоянная реактивность

$$\varrho_0 = \frac{\Lambda}{\tau_0} + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{(1+\lambda_i \tau_0)}.$$

Нетрудно видеть, что эта формула обратных часов [4]. В момент $t=t_1$ величина $\varrho(t)$ изменяется скачком на $-\frac{\Lambda s}{n_1}$, затем снова начинается переходный процесс, который заканчивается с распадом излучателей запаздывающих нейтронов. При этом реактивность составляет $-\frac{\Lambda s}{n_1}$. На рис. 1 приведены графики $\varrho(t)$ и $n_3(t)$ при $n_1=1\%$, $n_0=10^{-3}\%$, $\tau_0=60$ сек и $s=1\%/сек$. Величины скачков $\frac{\Lambda}{\tau_0}$ и $\frac{\Lambda s}{n_1}$ ввиду малости Λ практически неощутимы.

Графики на рис. 1 и 2 определялись при $\Lambda=10^{-4}$ сек, $\beta=0,0065$ и значениях λ_i и β_i , взятых из работы [5].

2. Определим вид $\varrho(t)$, обеспечивающий линейное изменение мощности реактора с уровня n_0 на уровень n_1 , т. е.

$$n_3(t) = \begin{cases} n_0, & t \leq 0; \\ n_0 + Vt, & 0 \leq t \leq t_1; \\ n_1 = n_0 + Vt_1, & t \geq t_1. \end{cases}$$

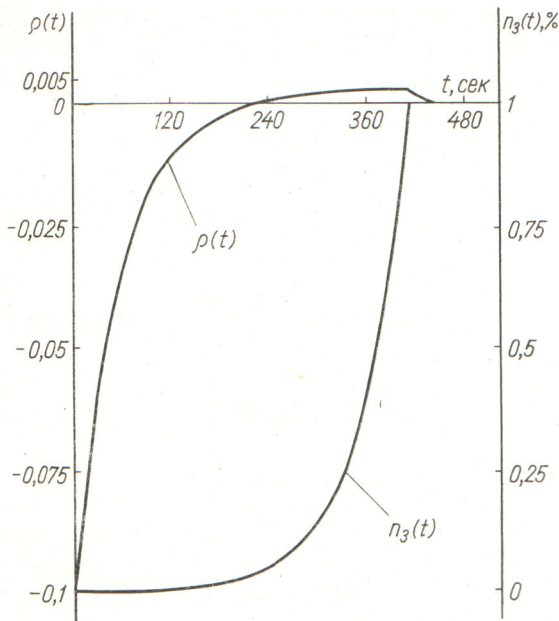


Рис. 1. Изменение реактивности при разгоне реактора по экспоненте с заданным периодом.

Влиянием источников пренебрегаем. По формуле (12) получим

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \frac{V}{n_0 + Vt} \left\{ \Lambda + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\lambda_i} \times \right. & 0 \leq t < t_1; \\ \left. \times (1 - \exp[-\lambda_i t]) \right\} & \\ \frac{V}{n_1} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\lambda_i} (1 - \exp \times \right. & \\ \left. \times [-\lambda_i t_1]) \right\} \times & \\ \times \exp[-\lambda_i (t - t_1)] & t \geq t_1. \end{cases}$$

В этом случае при $t=0$ реактивность меняется скачком на величину $\frac{V\Lambda}{n_0}$, а $z(t) = n_3(t)\rho(t)$ — на величину $V\Lambda$. Затем осуществляется переходный процесс, в результате которого устанавливается постоянное значение $z_0 = V \left(\Lambda + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)$; реактивность при установившемся линейном изменении мощности должна меняться по закону

$$\rho(t) = \frac{V \left(\Lambda + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)}{n_0 + Vt}.$$

В момент $t = t_1$ снова начинается переходный процесс, который заканчивается с распадом излучателей запаздывающих нейтронов, при этом реактивность снижается до нуля. На рис. 2 приведены графики $n_3(t)$, $\rho(t)$ и $z(t)$, соответствующие увеличению мощности от $n_0 = 10\%$ до $n_1 = 100\%$ со скоростью $1\%/сек$. На рис. 3

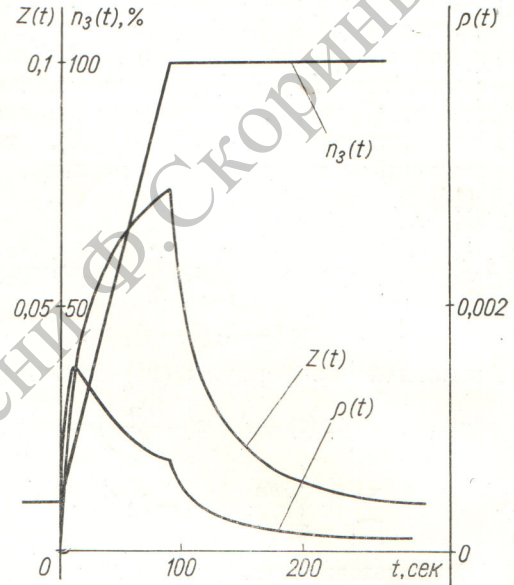


Рис. 2. Изменение реактивности при линейном увеличении уровня нейтронного потока.

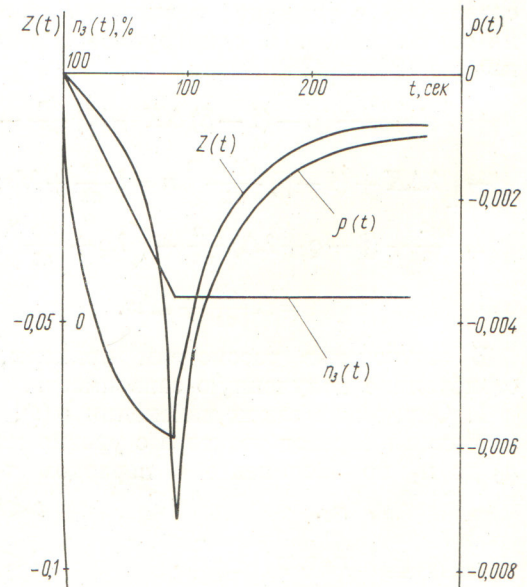


Рис. 3. Изменение реактивности при линейном снижении уровня нейтронного потока.

показаны графики аналогичных величин для снижения уровня с той же скоростью от $n_0 = 100\%$ до $n_1 = 10\%$.

3. Определим вид $q(t)$, обеспечивающий изменение мощности реактора по закону

$$n_3(t) = \begin{cases} n_0, & t \leq 0; \\ n_0 \left\{ \frac{\beta}{\beta - \delta K_0} \exp \left[\frac{\lambda \delta K_0}{\beta - \delta K_0} t \right] - \frac{\delta K_0}{\beta - \delta K_0} \exp \left[-\frac{\beta - \delta K_0}{\Lambda} t \right] \right\}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим одnogрупповое приближение без источников. Подставив $n_3(t)$ в (12) и учитывая неравенство $\lambda \Lambda \ll \beta - \delta K_0$, получим $q(t) = \delta K_0$ при $t \geq 0$ и $q(t) = 0$ при $t < 0$, что соответствует данным работы [6], в которой принятый выше закон является решением одnogрупповых уравнений кинетики при учете указанного неравенства и скачке реактивности δK_0 при $t = 0$.

Гидравлическое сопротивление узких кольцевых каналов со спиральными ребрами

В. И. СУББОТИН, П. А. УШАКОВ, А. В. ШЕЙНИНА

УДК 621.039.546.3

Измерены гидравлические потери в узких ($\frac{d}{D} = 0,895$) кольцевых каналах с тремя ребрами, навитыми по спирали на центральный стержень. В диапазоне относительных шагов навивки ребер $3,5 < \frac{T}{d} < \infty$ гидравлические потери при турбулентном режиме течения определяются в основном потерями на трение о стенки канала. Эти потери могут быть рассчитаны по обычным формулам для кольцевого канала без ребер. Увеличение гидравлического сопротивления канала при фиксированном расходе жидкости становится существенным лишь при малых относительных шагах навивки ребер ($\frac{T}{d} < 10$). Полученные для кольцевых каналов данные приблизительно совпадают с результатами измерений гидравлических потерь в шахматных пучках оребренных стержней с $\frac{S}{d} = 1,05$, продольно обтекаемых теплоносителем.

В некоторых реакторах цилиндрические твэлы охлаждаются теплоносителем, протекающим в кольцевых каналах. Для центрирования твэлов используются продольные ребра. Однако технологические допуски на размеры каналов и твэлов не гарантируют точного центрирования

Автор благодарен А. И. Могильнеру, А. Б. Алмазову и А. Р. Мирзояну за обсуждение работы и ценные замечания, а также И. В. Назаровой за построение графиков и помощь в оформлении настоящей работы.

Поступила в Редакцию 20/XI 1965 г.

В окончательной редакции 2/II 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ядерные реакторы. Т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
2. R. Murray, C. Bingham, C. Martin. Nucl. Sci. and Engng, 18, 481 (1964).
3. G. Lewins. Nucl. Sci. and Engng, 7, 122 (1960).
4. С. Глестон, М. Эдлунд. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
5. А. Г. Сандмайер. Кинетика и стабильность реакторов на быстрых нейтронах. М., Госатомиздат, 1963.
6. М. Шульц. Регулирование энергетических ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1957.

ния даже при наличии ребер, что особенно ощутимо для узких каналов.

Наличие эксцентриситета приводит к возникновению неравномерности температуры по периметру твэлов. Для жидкометаллических теплоносителей эта неравномерность обусловлена в основном неравномерностью подогрева теплоносителя в различных точках периметра канала.

Спиральное оребрение способствует выравниванию температуры по периметру твэлов. С уменьшением шага навивки ребер (T/d) их эффективность увеличивается, однако гидравлические потери при этом возрастают.

В настоящей работе изучалось влияние шага навивки ребер на гидравлические сопротивления узких кольцевых каналов.

Экспериментальный стенд представлял собой замкнутый контур с центробежным насосом. Узлы и детали контура изготавливались из нержавеющей стали. Опыты проводились с дистиллированной водой в изотермических условиях при температуре $6-50^\circ\text{C}$.

Схема опытного канала показана на рис. 1. Внешняя труба из нержавеющей стали обработана по внутренней поверхности до диаметра