Расчет дозного поля тонкого луча электронов

Б. Я. НАРКЕВИЧ, В. С. ЕНДОВИЦКИЙ, И. Е. КОНСТАНТИНОВ

УДК 539.12.08:539·124

Пусть в бесконечную однородную среду в точку $z=0$ помещен точечный источник мононаправленного излучения, генерирующий электроны с энергией E_0 в направлении оси z. Тогда плотность потока электронов в любой точке среды с координатами (r, α), где r — расстояние от источника до рассматриваемой точки и α — угол между осью z и направлением на эту точку, определяется как функция двух пространственных переменных $F(r, \alpha, E)$, где E — текущая энергия. Введем обозначения

$$x=\frac{r}{R_0}; \quad t=\frac{R}{R_0}; \quad R_0=R(E_0), \tag{1}$$

где R_0 и R — максимальный и остаточный пробеги электронов соответственно.

Функция дозного распределения

$$D(x, \alpha)=\int_0^1 \varepsilon(t) F(x, \alpha, t)\, dt \tag{2}$$

есть энергия, теряемая в элементарном объеме на расстоянии x от источника, видимом под углом α из точки $x=0$ и некоторым азимутальным углом φ. Здесь $\varepsilon(t)$ — относительная тормозная способность, определяемая как

$$\varepsilon(t)=\left(\frac{dE}{dR}\right)\left(\frac{dE}{dR}\right)^{-1}_{E_0}. \tag{3}$$

Моменты искомой функции распределения $D(x, \alpha)$ представляют следующие интегралы:

$$D_{l,\,2\lambda}=\int_0^1 x^{2\lambda}dx \int_{-1}^{+1} D(x, \alpha)\, P_l(\cos\alpha)\, d(\cos\alpha), \tag{4}$$

где $P_l(\cos\alpha)$ — полиномы Лежандра.

Однозначная связь функции $F(x, \alpha, t)$ с фундаментальным решением основного уравнения переноса электронов $G(\mathbf{r}, \Omega, E)$ позволяет представить искомые моменты $D_{l,\,2\lambda}$ как линейную комбинацию моментов плотности потока электронов от плоского бесконечного мононаправленного источника с энергией E_0 [1].

Аппроксимируя тормозную способность выражением

$$\varepsilon(t)\simeq\sum_{i=1}^{4} A_i\left[\frac{(1+\gamma)\,t}{t+\gamma}\right]^{i-\frac{3}{2}}, \tag{5}$$

где A_i и γ — некоторые константы, можно записать соотношение, связывающее две системы моментов $D_{2\lambda,\,l}$ и $G_{l,\,m}$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
D_{2\lambda,\,l}&=\frac{2^{2\lambda}}{\binom{2\lambda}{l}}\sum_{i=0}^{\lambda+\frac{l}{2}} b_{2\lambda+l,\,i}\sum_{k}^{\lambda+\frac{l}{2}}\binom{k}{\lambda}B_{2\lambda+l-2k,\,k-i};\\
b_{\lambda,\,l}&=\left(l-2\lambda+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{4}A_i G_{2\lambda,\,0}^{2\lambda+i-\frac{3}{2}};\\
B_{\lambda,\,m}&=\frac{(-1)^{\lambda}}{2^m}\binom{m}{\lambda}\binom{2m-2\lambda}{m},\quad k=\begin{cases} i, & i>\lambda,\\ \lambda, & i<\lambda,\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\binom{m}{\lambda}$ — коэффициенты биномиального разложения:

$$\binom{m}{\lambda}=\frac{m(m-1)\ldots(m-\lambda+1)}{1\cdot 2\ldots\lambda}. \tag{7}$$

Функция дозного распределения $D(x, \alpha)$ электронов с энергией 1 *Мэв* в ткани (значения D даны в единицах тормозной способности)

α \ x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0°	$9{,}93\cdot 10^4$	4370	2320	704	342	165	104	69,5	46,2	36,4	30,9	27,5	23,2	19,8	15,4	12,1	5,19	3,63	0,729
10°	5260	1860	847	395	209	121	87,8	57,3	41,8	34,0	28,6	27,4	22,7	19,7	15,3	12,0	5,07	2,74	0,347
20°	608	370	227	152	105	71,5	55,3	41,1	34,6	28,2	23,8	21,7	19,5	17,3	11,9	8,23	1,83	0,206	0,101
30°	138	94,3	68,0	52,1	43,3	38,2	33,0	27,6	23,3	20,1	18,0	15,9	13,8	11,7	8,91	5,73	1,38	0,180	
40°	46,4	29,9	24,8	21,6	19,6	18,5	17,5	16,5	15,4	13,4	12,4	11,3	9,58	6,80	4,02	2,37	0,823	0,133	
50°	15,9	10,9	9,45	9,34	9,15	9,04	8,96	8,85	8,55	8,36	8,15	7,65	6,17	4,57	2,68	1,49	0,497		
60°	4,60	4,21	4,23	4,31	4,40	4,64	4,79	4,99	5,08	5,07	4,75	4,24	3,45	2,49	1,15	0,623	0,181		
70°	1,76	1,85	1,94	2,12	2,31	2,58	2,67	2,76	2,87	2,72	2,49	2,22	1,47	0,922	0,416	0,220			
80°	0,758	0,847	0,979	1,07	1,25	1,44	1,62	1,79	1,61	1,43	1,16	0,971	0,696	0,482	0,259	0,152			
90°	0,545	0,562	0,588	0,673	0,796	0,949	1,03	1,13	1,11	1,02	0,820	0,612	0,501	0,371	0,216	0,110			
100°	0,472	0,480	0,489	0,507	0,532	0,591	0,676	0,701	0,666	0,547	0,421	0,261	0,135						
110°	0,451	0,435	0,418	0,403	0,414	0,431	0,447	0,443	0,387	0,263	0,156								
120°	0,441	0,427	0,409	0,398	0,364	0,338	0,322	0,306	0,241	0,145									
130°	0,428	0,407	0,398	0,387	0,297	0,282	0,250	0,211	0,172	0,102									
140°	0,412	0,395	0,379	0,367	0,274	0,236	0,197	0,160	0,122										
150°	0,387	0,371	0,363	0,356	0,255	0,204	0,160	0,124											
160°	0,368	0,353	0,347	0,332	0,236	0,174	0,139												
170°	0,352	0,338	0,333	0,319	0,213	0,153	0,113												
180°	0,346	0,333	0,328	0,313	0,203	0,144													

На основе приведенных в работе [2] значений коэффициентов A_i и таблиц значений $G_{l,\,m}$ были рассчитаны системы моментов $D_{2\lambda,\,l}$ до максимальной комбинации индексов $\lambda = l = 8$ для десяти значений энергии электронов источника в диапазоне от 25 *кэв* до 10 *Мэв*. Расчет проводился для тканеэквивалентной среды.

Далее по вычисленным моментам $D_{2\lambda,\,l}$ производим восстановление функции $D\,(x,\ \alpha)$ по координате x из соотношения

$$D_{2\lambda,\,l} = \int\limits_0^1 D_l\,(x)\,x^{2\lambda+1}\,dx. \qquad (8)$$

Используя обобщенное преобразование Меллина и проводя интерполяцию Лагранжа для $D_{2\lambda,\,l}$ как функции от λ, получаем следующую квадратурную сумму для вычисления $D_l\,(x)$;

$$D_l\,(x) = \sum_{i=0}^{8} B_i\,(x)\,D_{2\lambda+i,\,l}. \qquad (9)$$

По формуле (9) были рассчитаны для каждой энергии десять значений частичных моментов $D_l\,(x)$ по l для восьми значений x. Коэффициенты интерполяции $B_i(x)$ приведены в работе [3].

Восстановление функции $D\,(x,\ \alpha)$ по координате α проводилось путем вычисления суммы ряда

$$D\,(x,\ \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)D_l\,(x)\,P_l\,(\cos\alpha). \qquad (10)$$

Следует отметить, что при энергиях $E_0 > 2$ *Мэв* ряд (10) плохо сходится, поэтому выполнялась его экстраполяция к большим l. При этом в интервале $x \leqslant 0{,}5$ была использована следующая асимптотическая форма функции D_l [1]:

$$D_l = \sum_{i=1} \delta_i\,(l)\,\exp\,[\beta_i\,(l)], \qquad (11)$$

где δ_i и β_i — константы. Тогда (10) заменяется суммированием быстро сходящегося ряда:

$$D\,(x,\ \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}\delta_i\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta_i^2}\,(\mathrm{ch}\,\beta_i - \cos\alpha)^{1/2}\right]. \qquad (12)$$

В интервале $x > 0{,}5$ для вычисления суммы ряда (10) был применен более простой метод экстраполирования. Для этого построили графики зависимости $\log\,[D_l\,(x)(l+\frac{1}{2})^{-m}] = f\,(l)$. Методом проб и ошибок находили значение параметра m, что позволяло определить D_l для $l > 8$. Вычисления проводились для значений $x = 0 \div 1$ с шагом $\Delta x = 0{,}05$ и для углов $\alpha = 0 \div 180°$ с шагом $\Delta\alpha = 10°$.

Вычисление функции $D\,(x,\ \alpha)$ проведено для десяти значений энергии E_0 в диапазоне от 25 *кэв* до 10 *Мэв*. В таблице приведена в качестве примера функция дозного распределения для энергии источника электронов 1 *Мэв* в тканеэквивалентном веществе.

Поступило в Редакцию 10/VI 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Grew. J. Res. Nat. Bur. Standards, **65A**, 113 (1961).
2. L. Spencer. US Nat. Bur. Standards Monograph, No. 1, 1959.
3. H. Salzer. J. Math. and Phys., **37**, 89 (1958).