Влияние несимметричных ВЧ-колебаний в резонаторе накопителя на устойчивость поперечного движения частиц

А. К. ОРЛОВ, А. В. РЯБЦОВ

УДК 621.384.6

Известно, что максимальный заряд, который можно ускорить в обычном волноводном ускорителе, ограничивается эффектом укорочения импульса тока [1—3]. Подобным же образом можно объяснить и некоторые особенности поперечного движения пучка частиц в накопителях, например быстрое затухание бетатронных колебаний в накопительном кольце ВЭПП-2 Института ядерной физики СО АН СССР [4].

В работе [5] показано, что причиной такого затухания является взаимодействие когерентных бетатронных колебаний с внешними системами (резонатором и пластинами инфлектора). При этом во внешних системах возбуждаются азимутально несимметричные ВЧ-колебания, которые при определенных условиях приводят к затуханию бетатронных колебаний. В работе [5] определена мощность возбуждения ВЧ-поля бесконечно короткими сгустками, движение которых считается заданным. Поскольку несимметричные колебания существенно влияют на поперечное движение частиц, целесообразно провести точный анализ возбуждения этих колебаний на основе решения самосогласованной задачи.

Предположим для простоты, что в накопительном кольце используется обычный цилиндрический резонатор высотой h и радиусом a. Пучок заряженных частиц, проходящий вблизи оси резонатора, возбуждает в нем в основном колебания электрического типа, векторный потенциал которых может быть записан в виде

$$\mathbf{A}(r, \varphi, z, t) = q_\lambda(t)\,\mathbf{A}_\lambda(r, \varphi, z).$$

Составляющие вектора $\mathbf{A}_\lambda$ определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_{\lambda\varphi} &= B_{nim}\frac{mn}{r} J_n\left(\frac{\nu_{ni} r}{a}\right)\sin n\varphi \sin\frac{m\pi}{h}z;\\ A_{\lambda r} &= -B_{nim}\frac{m\nu_{ni}}{a} J'_n\left(\frac{\nu_{ni} r}{a}\right)\cos n\varphi \sin\frac{m\pi}{h}z;\\ A_{\lambda z} &= B_{nim}\frac{\nu_{ni}^2 h}{\pi a^2} J_n\left(\frac{\nu_{ni} r}{a}\right)\cos n\varphi \cos\frac{m\pi}{h}z, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где B_{nim} — нормирующий множитель, величина которого определяется из условия $\int\limits_V \mathbf{A}_\lambda^2 dV = \frac{1}{\varepsilon_0}$, а остальные обозначения имеют общепринятый смысл. При определении поля вблизи пучка, который считается параксиальным, можно ограничиться первым членом в разложении функций Бесселя в ряд.

Поперечная сила, с которой ВЧ-поле действует на частицу, находящуюся на расстоянии r от оси резонатора,

$$F_\perp \sim \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что пучок наиболее эффективно взаимодействует с колебанием, имеющим одну азимутальную вариацию. Полагая в формулах (1) $n=1$ и переходя к декартовой системе координат, получаем вблизи оси:

$$\left.\begin{aligned} A_{\lambda x} &\approx -B_{1im}\frac{m\nu_{1i}}{2a}\sin\frac{m\pi}{h}z, \quad A_{\lambda y}\approx 0;\\ A_{\lambda z} &\approx B_{1im}\frac{\nu_{1i}^2 h}{\pi a^2}\cdot\frac{\nu_{1i}x}{2a}\cos\frac{m\pi}{h}z, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где

$$B_{1im} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi c^2\varepsilon_m}{J_0^2(\nu_{1i})\,h^3\nu_{1i}^2\omega_\lambda^2}; \quad \omega_\lambda^2 = c^2\left(\frac{\nu_{1i}^2}{a^2}+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right);$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & m=0\\ 2 & m>0. \end{cases}$$

Амплитуду $q_\lambda(t)$ векторного потенциала поля, возбуждаемого в резонаторе током плотности $\mathbf{j}$, заменим медленно меняющимися комплексно сопряженными амплитудами согласно формуле

$$q_\lambda(t) = P_\lambda(t)\,e^{-i\omega_\lambda t} + P_\lambda^*(t)\,e^{i\omega_\lambda t}.$$

Тогда, основываясь на работе [6] и используя метод усреднения [7], можно показать, что функция P_λ удовлетворяет уравнению

$$\dot{P}_\lambda + \alpha_\lambda P_\lambda = \frac{i}{2\omega_\lambda}\underset{t}{M}\left(e^{i\omega_\lambda t}\int\limits_V \mathbf{j}\mathbf{A}_\lambda\, dV\right), \quad (4)$$

α_λ — затухание колебаний типа λ в резонаторе; $\underset{t}{M}(\ldots)$ — оператор усреднения по явно содержащемуся времени. Уравнение для P_λ^* комплексно сопряжено с уравнением (4).

При вычислении плотности тока $\mathbf{j}$ в резонаторе будем считать, что частицы являются ультрарелятивистскими и продольная составляющая их скорости $v_z = c$. Кроме того, будем считать, что плотность заряда в пучке $\rho = \rho(z, t)\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')$, причем $\rho(z, t)$ —

периодическая функция аргумента $t - \frac{z}{c}$ и ее можно разложить в ряд Фурье:

$$\rho(z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \rho_l e^{-il\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)}, \qquad (5)$$

ω — частота обращения частиц по орбите накопителя.

При анализе поперечного движения частиц в несимметричном ВЧ-поле предположим, что частицы движутся в плоскости xz. Интегрируя уравнения движения, получаем, что поперечная скорость $\dot{x}'$ и отклонение x' частицы, вошедшей в резонатор в момент времени t_0 и находящейся в момент t в точке с координатой z, определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}'(z, t) &= iD_\lambda [P_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} \xi(u) - \text{к. с.}] + \\ &\quad + \dot{x}'_0(t_0); \\ x'(z, t) &= iD_\lambda [P_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} \eta(u) - \text{к. с.}] + \\ &\quad + \dot{x}'_0(t_0)\, u + x'_0(t_0), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где

$$\xi(u) = \cos \omega_m u - e^{i\omega_\lambda u};$$

$$\eta(u) = \frac{i\omega_\lambda \xi(u) - \omega_m \sin \omega_m u}{\Omega^2} - u e^{i\omega_\lambda u};$$

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{h}; \quad \Omega = \frac{c\nu_{1i}}{a};$$

$$u = \frac{z}{c}; \;\; t_0 = t - u; \;\; D_\lambda = \frac{e}{m_0\gamma} B_{1im} \frac{\nu_{1i}}{2a} \cdot \frac{h\omega_\lambda}{\pi c};$$

$$m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Эти выражения позволяют определить плотность тока в резонаторе $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. Используя выражения (3), (5) и (6), уравнение (4) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{P}_\lambda + \alpha_\lambda P_\lambda = N_\lambda \underset{t}{M} \Big\{ & e^{i\omega_\lambda t} \int_0^{\frac{h}{c}} du \sum_{l=-\infty}^{\infty} \rho_l e^{-il\omega(t-u)} \times \\ & \times \{ D_\lambda [P_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} \times \\ & \times (\omega_m \xi \sin \omega_m u - \Omega^2 \eta \cos \omega_m u) + \text{к. с.}] - \\ & - i x'_0(t_0)\, \omega_m \sin \omega_m u + \\ & + i [x'_0(t_0) + \dot{x}'_0(t_0)\, u]\, \Omega^2 \cos \omega_m u \} \Big\}; \end{aligned} \qquad (7)$$

$$N_\lambda = \frac{1}{2\omega_\lambda} \cdot \frac{\nu_{1i}}{2a} \cdot \frac{h}{\pi} B_{1im}.$$

Из уравнения (7) следует, что его правая часть отлична от нуля при любой частоте ω_λ из-за наличия постоянной составляющей в разложении функции $\rho(z, t)$. Таким образом, постоянный ток, входящий в резонатор, может возбудить в нем несимметричные колебания. При этом частицы, вошедшие в резонатор, отклоняются в поперечном направлении существующим там несимметричным полем, которое может возникнуть, например, при ударном возбуждении резонатора в момент включения пучка. Частицы начинают колебаться в поперечном направлении, отдавая полю часть своей энергии продольного движения.

Правая часть уравнения (7) кроме члена, связанного с постоянной составляющей, будет иметь еще одно отличное от нуля слагаемое, если выполняется резонансное условие $l\omega = 2\omega_\lambda$. Возможны также резонансы, определяемые теми членами уравнения (7), которые содержат $\dot{x}'_0$ и x'_0.

В накопителе частицы движутся по замкнутой орбите и испытывают многократное воздействие отклоняющего поля. Используя матричный метод, можно показать, что поперечная скорость $\dot{x}'_{0k}$ и отклонение x'_{0k} на входе в резонатор для частицы, совершающей в момент t k-й оборот ($k = [t/T] + 1$; $T = L/c$, L — длина накопительного кольца, $L \gg h$), определяются суммой по всем предыдущим оборотам:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_{0k} \\ \dot{x}'_{0k} \end{pmatrix} &= D_\lambda \sum_{j=1}^{k-1} P_\lambda [t - (k-j)T] \times \\ & \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i\nu\omega \end{pmatrix} a(\nu)\, e^{-i[\omega_\lambda t - (k-j)(\omega_\lambda T + 2\pi\nu)]} + \right. \\ & + \left. \begin{pmatrix} 1 \\ -i\nu\omega \end{pmatrix} a(-\nu)\, e^{-i[\omega_\lambda t - (k-j)(\omega_\lambda T - 2\pi\nu)]} \right\} + \\ & + \text{к. с.} + \begin{pmatrix} x'_{01} \\ \dot{x}'_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu; & \frac{\sin 2\pi\nu}{\nu\omega} \\ -\nu\omega \sin 2\pi\nu; & \cos 2\pi\nu \end{pmatrix}^{k-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где

$$2a(\nu) = (-1)^m e^{-i\theta_h} \left(\frac{1}{\nu\omega} - \frac{\omega_\lambda}{\Omega^2} \right) - \frac{1}{\nu\omega} + \frac{\omega_\lambda}{\Omega^2} - \frac{ih}{c}; \quad \theta_h = \frac{\omega_\lambda h}{c},$$

x'_{01}, $\dot{x}'_{01}$ — начальные условия на первом обороте. В дальнейшем будем считать, что $x'_{01} =$

$= a_0 \sin \nu\omega t$ ($\nu\omega$ — частота бетатронных колебаний).

Подставляя уравнение (8) в уравнение (7), находим, что вклад от начальных условий на первом обороте после усреднения будет отличен от нуля только в том случае, когда выполняется условие резонанса:

$$\omega_\lambda - l\omega \pm \nu\omega = 0. \qquad (9)$$

Считая это условие выполненным *, получаем следующее уравнение для амплитуды поля в резонаторе:

$$\dot{P}_\lambda + \alpha_\lambda P_\lambda = B\left\{P_\lambda \chi + ig(\pm\nu)\sum_{j=1}^{k-1} P_\lambda [t-(k-j)T]\right\} + M(\pm\nu). \qquad (10)$$

В этой формуле приняты следующие обозначения:

$$M(\pm\nu) = N_\lambda \rho_l \frac{a_0 \nu\omega}{2} b(\pm\nu); \quad \frac{b(\nu)}{\omega_\lambda} = i\left(\frac{\omega_\lambda}{\Omega^2} - \frac{1}{\nu\omega}\right)[(-1)^m e^{i\theta_h} - 1] + (-1)^m \frac{h}{c} e^{i\theta_h};$$

$$i\chi = [(-1)^m e^{i\theta_h} - 1]\left(\theta_h + 2i\frac{\omega_\lambda^2}{\Omega^2}\right) + \theta_h (1+\varepsilon_m);$$

$$B = N_\lambda D_\lambda \rho_0; \; g(\nu) = a(\nu)\, b(\nu)\, \nu\omega.$$

Верхний знак в приведенных формулах берется при резонансе

$$\omega_\lambda - l\omega + \nu\omega = 0.$$

Преобразуя уравнение (10) по Лапласу, получаем следующее выражение для образа функции P_λ:

$$\overline{P}_\lambda = \frac{M(\pm\nu) + pP_\lambda(0)}{p^2 + (\alpha_\lambda - B\chi)\,p - \dfrac{iBg(\pm\nu)}{T}}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что изменение амплитуды несимметричных колебаний в резонаторе характеризуется инкрементами

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha_\lambda - B\chi}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha_\lambda - B\chi)^2}{4} + \frac{iBg(\pm\nu)}{T}}, \qquad (12)$$

которые зависят от постоянной составляющей в разложении плотности тока пучка в ряд Фурье. С физической точки зрения этот факт объясняется следующим образом. Из уравнения (8) следует, что при условии (9), когда $e^{i(-\omega_\lambda T \pm 2\pi\nu)} = 1$, поперечное движение пучка в резонаторе является суперпозицией колебаний на частоте ω_λ и бетатронных колебаний. Рассмотрим колебания на частоте ω_λ, для которых $x' \sim \sin \omega_\lambda t$. В этом случае E_z' — компонента взаимодействующего с пучком поля, пропорциональная $x' \sin \omega_\lambda t$, сохраняет знак с течением времени. Постоянная составляющая тока j_0 также не меняет знака, поэтому средняя мощность взаимодействия $\underset{t}{M}(j_0 E_z') \neq 0$. Резонансная гармоника тока j_l меняет знак с частотой $2\pi l/T$, поэтому $\underset{t}{M}(j_l E_z) = 0$. Так как при этом отклонение $x' \sim P_\lambda$, то постоянная составляющая входит в инкремент.

Для бетатронных колебаний на частоте $\nu\omega x' \sim \sin \nu\omega t$; $\underset{t}{M}(j_0 E_z') = 0$; $\underset{t}{M}(j_l E_z') \neq 0$. При этом амплитуда бетатронных колебаний определяется начальными условиями на первом обороте и не зависит от P_λ. Поэтому l-я гармоника тока определяет множитель $M(\pm\nu)$ и в инкремент не входит. Если не учитывать воздействия несимметричного поля на частоту поперечных колебаний пучка и считать, что в резонаторе частица совершает бетатронное колебание с переменной амплитудой $a_0(t)$ [что эквивалентно пренебрежению $\sum_{j=1}^{k-1}$ в уравнениях (8) и (10)], то поле и инкремент оказываются пропорциональными l-й гармонике пучка [5].

Инкременты в общем случае нелинейно зависят от постоянной составляющей тока. Линейность появляется в случае слабых токов, когда

$$\alpha_\lambda \gg B\chi; \; \sqrt{\frac{iBg(\pm\nu)}{T}}.$$

В этом случае

$$p_1 = \frac{iBg(\pm\nu)}{T}; \quad p_2 = -\alpha_\lambda. \qquad (13)$$

Таким образом, при малых токах произведение It (t — время установления) равно постоянной величине, а при увеличении тока оно возрастает. Подобное явление наблюдалось экспериментально на установке ВЭПП-2 СО АН СССР [8]. Значение инкремента p_1, в частности его знак, в общем случае определяется через параметры пучка, резонатора и магнита довольно громоздким выражением. Однако в частном случае при $m = 0$, $\theta_h \ll 1$ можно показать, что для резонанса $\omega_\lambda - l\omega + \nu\omega = 0$ $p_1 > 0$. При этом резонансе происходит раскачка несимметричных колебаний. При резонансе $\omega_\lambda - l\omega - \nu\omega = 0$ $p_1 < 0$, и колебания, наоборот, затухают.

---

* Мы не рассматриваем слабые резонансы, которые, как показывает разложение (8) в ряд Фурье, могут возбуждаться на любой частоте ω_λ. При медленном изменении P_λ амплитуда их возбуждения мала по сравнению с сильными резонансами (9).

Выполняя в уравнении (11) обратное преобразование Лапласа, находим

$$\left.\begin{aligned} P_\lambda(t) &= G(p_1;\, p_2)\, e^{p_1 t} + G(p_2;\, p_1)\, e^{p_2 t}; \\ G(p_1;\, p_2) &= \frac{p_1 P_\lambda(0) + M(\pm\nu)}{p_1 - p_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Подставляя выражения (13) и (14) в равенство (8) при резонансе $\omega_\lambda - l\omega - \nu\omega = 0$, находим для δ-сгустка $[P_\lambda(0) = 0]$

$$x_0'(kT) \underset{k\to\infty}{\approx} a_0 e^{p_1 kT} \sin \nu\omega kT \to 0. \qquad (15)$$

Таким образом, бетатронные колебания сгустка в этом случае затухают. Приведенные выражения получены для накопителя с цилиндрическим резонатором. При $m = 0$, $\theta_h \ll 1$ их можно обобщить на случай резонатора более сложной формы, если использовать понятие эквивалентного сопротивления резонатора по напряжению $R_ш$. При этом оказывается, что

$$i\,\frac{Bg(\pm\nu)}{T\alpha_\lambda} = \pm\,\frac{I_0}{8\pi\nu}\cdot\frac{e}{m_0\gamma}\cdot\frac{1}{r_0^2}\cdot\frac{R_ш}{\Omega},$$

где r_0 — радиальное положение точек, к которым отнесено сопротивление $R_ш$. Величиной $B\chi$ обычно можно пренебречь, так как при токах, равных $\sim 1a$, $B\chi \ll \alpha_\lambda$.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Г. А. Зейтленку за плодотворные дискуссии.

Поступила в Редакцию 11/III 1968 г.
В окончательной редакции 3/XII 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Kelliher et al. Nature, **187**, 1099 (1960).
2. M. Crowley-Milling et al. Nature, **191**, 483 (1961).
3. Г. В. Воскресенский и др. «Атомная энергия», **20**, 3 (1966).
4. В. Л. Ауслендер и др. «Атомная энергия», **19**, 502 (1965).
5. Н. С. Диканский и др. «Атомная энергия», **22**, 188 (1967).
6. В. М. Лопухин. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М., Гостехтеориздат, 1953.
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
8. В. Л. Ауслендер и др. См. [5], стр. 198.

О механизме образования неравновесных соотношений между естественными радиоактивными изотопами в уран- и торийсодержащих природных соединениях

П. И. ЧАЛОВ

УДК 539.16.04:539.162

Многочисленные эксперименты [1, 2] приводят к выводам, что в микронарушениях радиоактивных природных соединений наблюдается избыточная активность продуктов распада по сравнению с активностью родоначальника радиоактивного ряда. Эта избыточная активность увеличивается по мере удаления изотопов (продуктов распада) в ряду распада от родоначальника ряда [1] или с увеличением константы распада изотопа [2], а также с увеличением степени рассеяния атомов родоначальника ряда в природных соединениях. Последняя закономерность установлена В. В. Чердынцевым и автором [2] и впоследствии подтверждена Н. Г. Сыромятниковым [3] лишь для генетически связанных изотопов урана, так как для других изотопов подобные эксперименты связаны с большими методическими трудностями.

Изучение неравновесных соотношений между естественными радиоактивными изотопами (ЕРИ) в микронарушениях радиоактивных природных соединений привело к определенной точке зрения на механизм их образования. Эти представления изложены в работах [1, 2] и сводятся к некоторой разновидности эффекта Сциларда — Чалмерса [4]. Относительное обогащение микронарушений природных соединений продуктами распада объясняется поступлением их атомов в эти нарушения благодаря кинетической энергии отдачи, которая сообщается вновь образующемуся атому в результате распада материнского изотопа, что исключено для атомов родоначальника ряда.

Поскольку эта точка зрения не может объяснить эмпирически установленную зависимость избыточной активности продуктов распада от константы распада и степени рассеяния атомов родоначальника ряда в природных радиоактивных соединениях, остается актуальным дальнейшее изучение указанного механизма. Мы попытались поставить такие работы на