

УДК 004.8

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ШУМОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ДАННЫХ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Е.А. Якимов¹, О.М. Демиденко², Д.М. Албкеират¹

¹Белорусско-Российский университет, Могилев

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON RESTORATION OF NOISE COMPONENT IN DATA SEQUENCES BY A SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS METHOD

E.A. Yakimau¹, O.M. Demidenko², D.M. Albkeirat¹

¹Belarusian-Russian University, Mogilev

²F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассматриваются методика и результаты исследования последовательностей данных с равномерным, нормальным и экспоненциальным шумом путем преобразования методом сингулярного спектрального анализа (SSA-методом). Показываются особенности восстановления шумовой составляющей в последовательностях данных, предложен алгоритм корректировки восстановленной шумовой составляющей с учетом стандартного отклонения.

Ключевые слова: SSA-метод, временная последовательность данных; равномерное, нормальное, экспоненциальное распределение; коррекция.

The technique and results of research of sequences of data with uniform, normal and exponential noise by transformation a Singular Spectrum Analysis method are presented. The peculiarities of restoration of noise component in sequences of data are shown, the algorithm of updating restored noise component in view of a standard deviation is offered.

Keywords: SSA-method, time sequence data, uniform, normal, exponential distribution; correction.

Введение

Одной из основных проблем при подготовке и проведении стохастических экспериментов в имитационном моделировании является правильный выбор модели входных данных, т.е. закона распределения вероятностей, который точно соответствует поведению случайных входных процессов. При этом стандартные законы распределения могут не соответствовать вероятностному поведению реальных входных процессов, особенно на границах распределения. Подстройка или редактирование формы подбранного распределения является трудным процессом из-за ограниченного числа параметров, доступных для управления формой распределения, и из-за отсутствия эффективного механизма для непосредственного управления формой подбранного распределения с одновременным изменением соответствующих параметров распределения.

Для решения задачи определения типа распределения используются, например, обобщенное распределение Джонсона [1, с. 271–297] или кривые Бизе [2, с. 184–202]. Для интерактивного моделирования входных данных с использованием семейства распределения вероятностей, основанных на кривых Бизе, разработана графическая технология [3, с. 699–711]. При построении модели входных данных используется также

Байесовский подход с использованием предварительной информации о законе распределения вероятностей. Например, предложено дисперсию случайных величин представлять двумя компонентами: одна дисперсия создается контролируемыми параметрами, вторая дисперсия связана с неопределенностью знания закона распределения контролируемых величин [4, с. 781–792].

В работе А.М. Лоу [5, с. 65–74] обращается внимание на проведение статистического анализа выходных данных для определения окончания имитационного моделирования с оцениванием периода разгона модели. Для оценки эффективности деятельности стохастических систем в имитационном моделировании исследуют выходные данные в переходном процессе за конечный период и оценивают установившееся решение за длительный период [6, с. 62–72]. При исследовании поведения системы в установившемся режиме за длительный период времени по гистограмме распределения откликов моделирования оцениваются отклонения, которые являются мерой риска при принятии решения [7, с. 413–416].

Эксплуатация имитационных моделей в производственных условиях затруднена отсутствием методов обработки накопленных данных и подготовки их для использования в моделях [8, с. 1290–1295]. Эффективная подготовка входных

данных для имитационного моделирования становится возможной при использовании данных, накопленных в информационных системах организаций. Для этого, например, разработан программный инструментарий, который позволяет подключаться к базе данных и извлекать их, представляя в CMSD-формате (CMSD – Core Manufacturing Simulation Data), пригодном для дискретно-событийных моделей [9, с. 1335–1344].

Чаще всего имитационные модели и инструменты их построения используются в тех случаях, когда становятся невозможными аналитические подходы. Обычно исследуют поведение сложной системы при полной неопределенности, состоящей из двух компонентов: во-первых, изменчивость, определенная случайными процессами в системе и именуемая стохастической неопределенностью, случайной неопределенностью или непреодолимой неопределенностью; во-вторых, неопределенность, обусловленная нехваткой знаний или достаточной информации о системе. Поэтому предлагается учитывать оба компонента при формировании последовательности входных данных для имитационной модели, например, предприятия общественного питания:

$Exp([3;10]) \rightarrow Norm([2;5],8) \rightarrow Norm([4;7],[2;8])$.

где $Exp([3;10])$ – источник поступления заявок, $Norm([2;5],8)$ – время обслуживания заявки узла 1; $Norm([4;7],[2;8])$ – время обслуживания заявки узла 2. Исследования проведены для экспоненциального и нормального закона распределения и значения в интервалах также распределены по нормальному и экспоненциальному закону распределения [10, с. 1335–1344].

В работе [11, с. 49–58] представлен анализ программных средств для определения закона распределения случайных величин, используемых для ввода в имитационную модель, например, программа StatFit имеет 32 различных распределений, BestFit имеет 37 распределений вероятности, ExpertFit [12] имеет 40 распределений.

Несмотря на проведенные исследования, задача установления типа выравнивающей кривой распределения и нахождения оценок параметров последовательностей данных, хранящихся в информационной системе предприятия, к настоящему времени до конца не решена. Такая ситуация предполагает дальнейшее исследование новых методов обработки данных, в частности, метода сингулярного спектрального анализа.

1 Содержательное описание метода сингулярного спектрального анализа

Данные в компьютерной информационной системе, представленные вещественными числами и определенные последовательно во времени,

именуют временной последовательностью данных. В общем случае такую последовательность данных, обычно упорядоченных во времени, называют временным рядом. Поэтому в дальнейшем будем использовать понятие временного ряда, и для извлечения информации из последовательностей данных рассмотрим метод сингулярного спектрального анализа (SSA-метод), который применяется для анализа временных рядов и может быть использован на этапе эксплуатации имитационной модели (ИМ). Он позволяет выделить составляющие временного ряда, которые описывают тренд и гармонические колебания, и те составляющие временного ряда, которые относят к «шуму». При этом метод не требует стационарности временного ряда, знания модели тренда, а также сведений о наличии периодических составляющих и их периодах [13]. Также с помощью данного метода можно определить модель тренда и использовать это знание для дальнейшей обработки временного ряда с уже известной моделью тренда, что важно, например, при автоматизации определения длительности переходного процесса в ИМ.

Математической основой SSA-метода является сингулярное разложение [14, с. 74]. Для успешного применения SSA-метода следует последовательно пройти несколько шагов.

Вложение. На этом шаге выбирается ширина окна L , от выбора которой зависят результаты применения SSA-метода. Из-за того что нет общих рекомендаций по выбору ширины окна, параметр L зависит от решаемой задачи и предварительной информации, известной о временном ряде. Например, для выделения тренда рекомендуется выбирать ширину окна не слишком большой. С другой стороны, для выделения гармонических колебаний рекомендуется большая ширина окна. После выбора ширины окна в соответствии с L строится траекторная матрица A ряда, которая будет являться по условию ее построения ганкелевой [15, с. 301].

Сингулярное разложение. Для матрицы $S = A \cdot A^T$ находятся собственные числа λ [16, с. 51] и ортонормированные собственные векторы U . Упорядоченные по убыванию собственные числа, которые больше нуля, часто называются сингулярными числами, а соответствующие им собственные векторы – левыми сингулярными векторами U . После этого вычисляются векторы V , которые называются правыми сингулярными векторами, и находятся элементарные матрицы, на сумму которых раскладывается первоначальная траекторная матрица.

Группировка. На данном этапе элементарные матрицы группируются по принципу принадлежности к тренду, гармоническим колебаниям или к шуму. Этот этап является наиболее сложным при применении SSA-метода. Для нахождения тренда на диаграммах собственных

векторов (по оси абсцисс откладывается порядковый номер координаты собственного вектора, а по оси ординат – значение координаты собственного вектора) выделяют медленно меняющиеся векторы. Сумма элементарных матриц, соответствующих этим векторам, будет являться траекторной матрицей тренда ряда. После этого восстанавливают гармонические колебания ряда. Для отделения шума можно воспользоваться несколькими замечаниями: нерегулярное поведение сингулярных векторов может говорить о принадлежности их к набору, порожденному шумовой компонентой; также об этом может свидетельствовать медленное, практически без скачков, убывание собственных чисел с некоторого номера.

Диагональное усреднение. Если полученные сгруппированные матрицы ганкелевы, то они являются траекторными матрицами некоторого временного ряда, который может быть легко по ним восстановлен. Однако обычно сгруппированные матрицы редко получают ганкелевыми, поэтому для восстановления временного ряда прибегают к диагональному усреднению. В соответствии с этим этапом каждый член восстановленного временного ряда будет являться средним арифметическим соответствующей ему побочной диагонали траекторной матрицы.

В результате проделанных шагов получается несколько временных рядов: один описывает тренд первоначального временного ряда, другой – гармонические колебания, а третий – шумовые составляющие.

2 Методика исследования стохастических последовательностей данных SSA-методом

Целью исследования является изучение особенностей восстановления SSA-методом равномерной, нормальной и экспоненциальной шумовой составляющей временного ряда и разработка практических рекомендаций по их использованию.

Для исследования приняты последовательности данных, определяемые следующими моделями:

$$G_1 = Rnd(n_{inf}; n_{sup}),$$

где $Rnd(n_{inf}; n_{sup})$ – функция, возвращающая случайные равномерные числа в интервале $[n_{inf}; n_{sup}]$ ($n_{inf} = 0$ – нижняя граница значений случайных чисел, $n_{sup} = 1$ – верхняя граница значений случайных чисел);

$$G_{2,3} = Norm(\gamma; \beta),$$

где $Norm(\gamma; \beta)$ – функция, возвращающая случайные нормально распределенные числа (γ – математическое ожидание случайных чисел, β – среднеквадратическое отклонение случайных

чисел); для временного ряда $G_2: \gamma = 1, \beta = 1$, для временного ряда $G_3: \gamma = 1, \beta = 5$;

$$G_4 = Exp(\gamma; \beta),$$

где $Exp(\gamma; \beta)$ – функция, возвращающая случайные числа, распределенные по экспоненциальному закону с параметром смещения $\gamma = 0$ и параметром масштаба $\beta = 1$.

Исследование проводится с комплексным применением табличного процессора MS Excel, математического пакета Mathcad, статистического пакета Statistica [17, с. 77–83].

Длина последовательностей данных $G_j, j = 1, \dots, 4$ ограничена величиной $n = 43$, что обусловлено ограничениями математического пакета Mathcad [18]. Временные ряды сформированы в пакете Minitab: Calc\Random Data\... \.

Основные числовые характеристики закона распределения случайной величины, используемые в исследовании:

– характеристики положения: математическое ожидание, оцениваемое средним (mean), медиана (med);

– характеристики рассеяния: среднеквадратическое отклонение, оцениваемое стандартное отклонение (s); максимум (max); минимум (min), диапазон (range), коэффициенты асимметрии распределения (γ_3) и эксцесса (γ_4).

Методика исследования представлена на примере экспоненциального распределения вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \exp\left[-\frac{(x-\gamma)}{\beta}\right] & | x > \gamma, \\ 0 & | x \leq \gamma. \end{cases}$$

где γ и β – параметры распределения [12].

После преобразования временного ряда G_4 получен восстановленный ряд G_4^e с двумя составляющими

$$G_4^e = G_{4T}^e + G_{4N}^e,$$

где G_{4T}^e – восстановленная трендовая, G_{4N}^e – восстановленная шумовая составляющая.

Основные числовые характеристики исходного временного ряда G_4 , восстановленных составляющих G_{4T}^e и G_{4N}^e представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные характеристики временного ряда с экспоненциальным шумом ($\gamma = 0, \beta = 1$)

Ряд	Mean	Med	Max	Min	Range	s	γ_3	γ_4
G_4	1,004	0,683	3,842	0,069	3,773	0,880	1,614	2,599
G_{4T}^e	1,008	0,995	1,308	0,714	0,594	0,175	0,149	-1,054
G_{4N}^e	-0,004	-0,261	2,532	-1,170	3,702	0,870	1,380	1,767

Для восстановленного тренда G_{4T}^6 построена линия регрессии (рисунок 1).

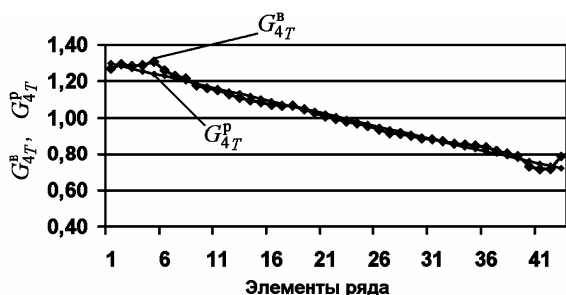


Рисунок 1 – Линия регрессии трендовой составляющей G_{4T}^6

Обозначим временной ряд, образованный элементами линии регрессии, через G_{4T}^p . Для оценки качества моделирования временного ряда G_{4T}^6 линией регрессии G_{4T}^p найдем разность ΔG_{4T}^{6p} :

$$\Delta G_{4T}^{6p} = G_{4T}^6 - G_{4T}^p.$$

Основные характеристики полученного распределения представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Основные характеристики погрешности моделирования трендовой составляющей G_{4T}^6

Ряд	Mean	Med	Max	Min	Range	s	γ_3	γ_4
ΔG_{4T}^{6p}	0	-0,008	0,068	-0,029	0,096	0,022	1,286	1,919

Представим восстановленную трендовую составляющую G_{4T}^6 в следующем виде:

$$G_{4T}^6 = G_{4TC}^6 + G_{4TD}^6,$$

где G_{4TC}^6 – постоянная составляющая тренда, G_{4TD}^6 – динамическая составляющая тренда.

Аналогично в регрессионной модели G_{4T}^p :

$$G_{4T}^p = G_{4TC}^p + G_{4TD}^p,$$

где G_{4TC}^p – постоянная составляющая регрессионной модели тренда, G_{4TD}^p – динамическая составляющая регрессионной модели тренда.

G_{4TC}^p определяется по формуле

$$G_{4TC}^p = \frac{\max_i G_{4T}^p - \min_i G_{4T}^p}{2}.$$

где $\max_i G_{4T}^p$, $\min_i G_{4T}^p$ – максимальный и минимальный элементы ряда G_{4T}^p соответственно.

G_{4TD}^p определяется по формуле

$$G_{4TD}^p = G_{4T}^p - G_{4TC}^p.$$

Восстановленная шумовая составляющая G_{4N}^6 представлена в виде гистограммы на рисунке 2.

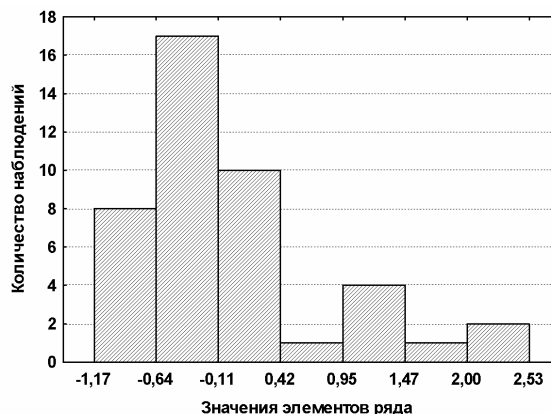


Рисунок 2 – Гистограмма восстановленной шумовой составляющей G_{4N}^6

В связи с появлением при восстановлении исходного временного ряда динамической составляющей тренда G_{4TD}^6 выполним корректировку шумовой составляющей G_{4N}^6 , построив скорректированный временной ряд G_{4N}^{6k} по формуле

$$G_{4N}^{6k} = G_{4N}^6 + G_{4TD}^p.$$

Основные характеристики скорректированного временного ряда G_{4N}^{6k} представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Основные характеристики скорректированного временного ряда G_{4N}^{6k}

Ряд	Mean	Med	Max	Min	Range	s	γ_3	γ_4
G_{4N}^{6k}	-0,004	-0,314	2,767	-0,959	3,726	0,873	1,586	2,504

Гистограмма скорректированного временного ряда G_{4N}^{6k} представлена на рисунке 3.

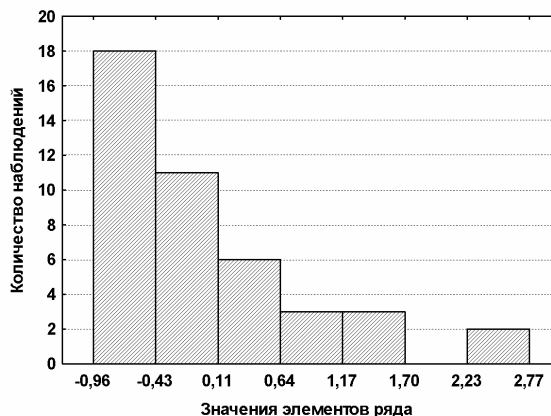


Рисунок 3 – Гистограмма скорректированного временного ряда G_{4N}^{6k}

Для проверки соответствия G_{4N}^6 , G_{4N}^6 и G_{4N}^{6k} теоретическому экспоненциальному распределению используется критерий Колмогорова –

Смирнова. Критическое значение Δ_p для наибольшего отклонения эмпирического распределения от теоретического по таблице 6.2 [19, с. 347] при $p = 0,01$ и $n = 43$ равно 0,24332. Если наблюдаемое значение Δ больше или равно критическому значению, нулевая гипотеза H_0 отклоняется. Результаты проверки соответствия G_4 , G_{4N}^e и G_{4N}^{ek} теоретическому экспоненциальному распределению представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Проверка соответствия G_4 , G_{4N}^e и G_{4N}^{ek} теоретическому экспоненциальному распределению

Временной ряд	Наблюдаемое значение Δ
Исходный ряд G_4	0,03239
Восстановленный ряд G_{4N}^e	0,19518
Скорректированный ряд G_{4N}^{ek}	0,03818

Поскольку наблюдаемые значения меньше критического, гипотеза H_0 об экспоненциальном распределении G_4 , G_{4N}^e и G_{4N}^{ek} принимается.

3 Обсуждение результатов исследования

Для обобщения полученных результатов и принятия решения о корректировке восстановленной шумовой составляющей построена таблица 5, в которой приняты следующие обозначения:

$$Range_{jT}^p = \max_i G_{jT}^p - \min_i G_{jT}^p \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m,$$

где n – длина исследуемого временного ряда ($n = 43$); m – количество исследуемых временных рядов.

$Range(G_{jN}^e)$ – диапазон значений элементов восстановленной шумовой составляющей G_{jN}^e временного ряда G_j ; $s(G_{jN}^e)$ – стандартное отклонение значений элементов восстановленной шумовой составляющей G_{jN}^e временного ряда G_j ; $s(\Delta G_{jT}^{ep})$ – стандартное отклонение ошибки моделирования восстановленной трендовой составляющей G_{jT}^e .

Для обоснования корректировки восстановленной шумовой составляющей на основе регрессионной модели восстановленной динамической составляющей тренда построим регрессионную зависимость для диапазона коррекции

$$Range_{jT}^p = f(s(G_{jN}^e)).$$

На основе проведенных исследований (таблица 5) регрессионная зависимость имеет следующий вид (рисунок 4):

$$Range_{jT}^p = -0,1 + 0,8 \cdot s(G_{jN}^e).$$

Таблица 5 – Показатели восстановления составляющих временного ряда

Временной ряд	$Range_{jT}^p$	$Range(G_{jN}^e)$	$s(G_{jN}^e)$	$s(\Delta G_{jT}^{ep})$
$G_1 = =Rnd(0,1)$	0,170	1,04	0,271	0,040
$G_2 = =Norm(1,1)$	0,550	3,58	0,840	0,058
$G_3 = =Norm(1,5)$	4,001	17,86	4,874	0,321
$G_4 = =Exp(0,1)$	0,580	3,702	0,870	0,022

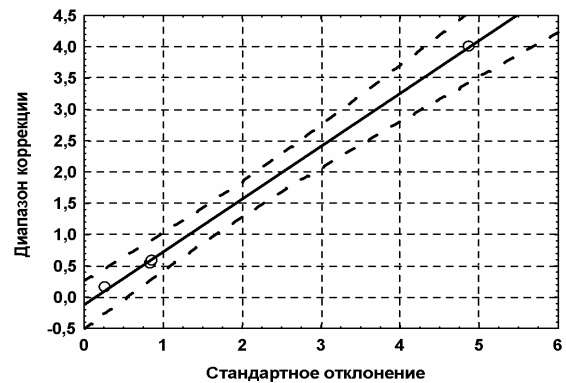


Рисунок 4 – Регрессионная зависимость диапазона коррекции $Range_{jT}^p = f(s(G_{jN}^e))$

При этом коэффициент корреляции составляет $r = 0,9997$, коэффициент детерминации $r^2 = 0,9993$ при уровне $p = 0,99$.

В соответствии с регрессионной моделью $Range_{jT}^p = f(s(G_{jN}^e))$ (рисунок 4) принятие решения для корректировки восстановленной шумовой составляющей в реальных исследованиях временного ряда рекомендуется соотносить со стандартным отклонением $s(G_{jN}^e)$.

Предлагаемый алгоритм для коррекции восстановленной шумовой составляющей методом сингулярного спектрального анализа выполняет следующие действия:

Шаг 1. Находят стандартное отклонение восстановленной шумовой составляющей, которое в соответствии с регрессионным уравнением определяет диапазон корректирующих значений динамического тренда по формуле

$$Range_{jT}^p \approx 0,8 \cdot s(G_{jN}^e).$$

Шаг 2. Находят среднее значение диапазона коррекции $Range_{jT}^p$.

Шаг 3. Диапазон $Range_{jT}^p$ относительно середины разбивается для получения n (в исследованиях $n = 43$) значений, при этом начальные значения полученного ряда являются положительными, конечные – отрицательными.

Шаг 4. Полученные на шаге 3 значения ряда прибавляются к восстановленной шумовой составляющей [37–А, с. 174–176].

Дополнительные исследования с дискретным равномерным шумом подтверждают полученные результаты по корректировке восстановленной шумовой составляющей.

Заключение

Предложен алгоритм корректировки закона распределения восстановленной шумовой составляющей временного ряда методом сингулярного спектрального анализа, основанный на декомпозиции трендовой составляющей временного ряда на статическую и динамическую составляющие, отличающийся применением регрессионной зависимости, включающей стандартное отклонение восстановленной шумовой составляющей, что позволяет создать автоматизированную технологию нахождения закона распределения шумовой составляющей временных последовательностей данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Swain, J.J. Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system / J.J. Swain, S. Venkatraman, J.R. Wilson // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1988. – № 29. – P. 271–297.
2. Introduction to Modeling and Generating Probabilistic Input Processes for Simulation / M.E. Kuhl [et al.] [Электрон. ресурс] Proceedings of 2009 Winter Simulation Conference. – 2009. – P. 184–202. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc09papers/016.pdf>. – Дата доступа: 11.04.2011.
3. Wagner, M.A.F. Using univariate Bezier distributions to model simulation input processes / M.A.F. Wagner, J.R. Wilson // IIE Transactions. – 1996. – № 28 (9). – P. 699–711.
4. Zouaoui, F. Accounting for parameter uncertainty in simulation input modeling / F. Zouaoui, J.R. Wilson // IIE Transactions. – 2003. – № 35 (3). – P. 781–792.
5. Law, A.M. Statistical Analysis of Simulation Output Data: The Practical State of the Art / A.M. Law [Электрон. ресурс] Proceedings of 2010 Winter Simulation Conference. – 2010. – P. 65–74. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc10papers/008.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.
6. Nakayama, M. Statistical Analysis of Simulation Output / M. Nakayama [Электрон. ресурс] Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. – 2008. – P. 62–72. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc08papers/009.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.
7. Nelson, B.L. The More Plot: Displaying Measures of Risk & Error From Simulation Output / B.L. Nelson [Электрон. ресурс] Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. – 2008. – P. 413–416. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc08papers/048.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.
8. Johansson, B. Information structure to support discrete event simulation in manufacturing systems / B. Johansson, J. Johnsson, A. Kinnander // Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference, ed. S. Chick [et al.]. – New Orleans, Louisiana, 2003. – P. 1290–1295.
9. Input Data Management Methodology for Discrete Event Simulation / N. Bengtsson [et al.] [Электрон. ресурс] Proceedings of 2009 Winter Simulation Conference. – 2009. – P. 1335–1344. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc09papers/125.pdf>. – Дата доступа: 11.04.2011.
10. Batarseh, O.G. Reliable Simulation with Input Uncertainties Using an Interval-Based Approach / O.G. Batarseh, Y. Wang [Электрон. ресурс] Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. – 2008. – P. 344–352. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc08papers/040.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.
11. Biller, B. Introduction to Simulation Input Modeling / B. Biller, C. Gunes [Электрон. ресурс] Proceedings of 2010 Winter Simulation Conference. – 2010. – P. 49–58. – Режим доступа : <http://www.informs-sim.org/wsc10papers/006.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2011.
12. Law, A.M. ExpertFit Version 7 [Электрон. ресурс] / A.M. Law // User's Guide.pdf – 2006. – 144 p. – Режим доступа : <http://www.averilllaw.com/>. – Дата доступа 23.03.2010.
13. Голяндина, Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов : учеб. пособие / Н.Э. Голяндина. – СПб. : С.-Петербург. гос. ун-т, 2004. – 76 с.
14. Голуб, Дж. Матричные вычисления: пер. с англ. / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М. : Наука, 1999. – 548 с. : ил.
15. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
16. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер; пер. с англ. – М. : Наука, 1982. – 272 с.
17. Якимов, Е.А. Исследование SSA-метода на основе комплексного применения информационных технологий / Е.А. Якимов // Доклады БГУИР. – 2010. – № 2 (48). – С. 77–83.
18. Ивановский, Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro: учеб. пособие / Р.И. Ивановский. – М. : Высш. шк., 2003. – 431 с.
19. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

Поступила в редакцию 01.09.11.