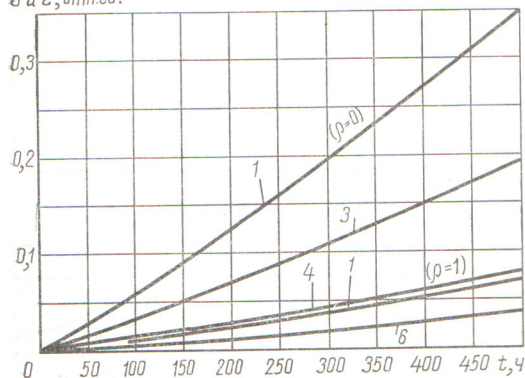


$\Delta u \varepsilon_z$, отн.ед.



Р и с. 2. Изменение величин распухания и компонент накопленной деформации в зависимости от времени. Обозначения те же, что на рис. 1.

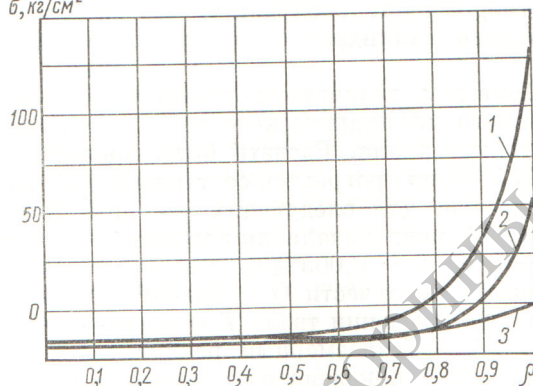
Для приближенных оценок распухания сердечника в целом можно, по-видимому, рекомендовать расчет по среднеарифметической температуре, а деформации твэла в целом следует при этом определять из соотношений: $\varepsilon_z = 0,2S_0$, $\varepsilon_\theta = 0,4S_0$.

Поступила в Редакцию 26/IV 1968 г.
В окончательной редакции 17/III 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. С. Бернс и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958)». Изобр. докл. иностр. ученых. Т. 6. М., Атомиздат, 1959, стр. 325.
2. Reactor Sci. and Technol., 17, 233 (1963).

$\sigma, \text{кг/см}^2$



Р и с. 3. Распределение напряжений по сечению сердечника:

1 — тангенциальных; 2 — осевых; 3 — радиальных.

3. А. И. Лейпунский и др. Доклад на Международной конференции по быстрым реакторам (Детроит, 1965).
4. А. И. Лейпунский и др. Доклад на Международной конференции по быстрым реакторам (Лондон, 1966).
5. Ю. И. Лихачев, В. П. Звонарев, В. Я. Пупко, «Атомная энергия», 18, 483 (1965).
6. В. М. Агранович, Э. Я. Михлин, Л. П. Семенов. «Атомная энергия», 15, 393 (1963).
7. Ю. И. Лихачев, В. В. Вахрамеева. Доклад IV/7 на симпозиуме стран СЭВ по быстрым реакторам (Обнинск, 1967).
8. Б. Ластман. Радиационные явления в двуокиси урана. М., Изд-во иностр. лит., 1964.
9. Л. М. Качанов. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.

Об оптимизации формы среды при наличии излучения

А. А. АБАГЯН, Э. Е. ПЕТРОВ, В. Я. ПУПКО

УДК 621.039.51.15

За последнее время в теории ядерных реакторов и защиты получили развитие вопросы нахождения оптимальных композиций материалов для рассматриваемых физических объектов. В работах [1—3] были определены условия для оптимального распределения ядерного горючего в активной зоне реактора. Вопросу оптимизации по распределению защитных материалов посвящены работы [3—5], в которых на основе теории сопряженных функций [6, 7] введено понятие функции эффективности определенного материала защиты по отношению к некоторому линейному функционалу от потока нейтронов. Это понятие позволяет в классическом случае, когда плотности материалов не превышают предельных значений, найти условие оптимального распределения материалов, а в не-

классическом случае — построить итерационную схему расчета такого распределения с использованием идей линейного программирования.

В настоящей работе вводится понятие функции эффективности элемента объема среды на ее поверхности по отношению к линейным функционалам и на основании этого понятия определяется классическое условие оптимальной формы этой среды. Аналогично тому, как это было сделано в работах [3, 5], с помощью введенной функции эффективности можно построить алгоритм поиска оптимальной формы для неклассического случая. На частном примере точечного источника показана практическая реализация условия оптимальности формы вплоть до получения расчетных формул и численных результатов.

Рассмотрим две различные физические среды (рис. 1), одна из которых (I) ограничена замкнутой поверхностью S а другая (II) имеет бесконечные размеры. Пусть стационарный поток излучения $\varphi(x)$ в этих средах описывается уравнением

$$\hat{L}\varphi(x) = q(x), \quad (1)$$

где $\hat{L}$ — интегрально-дифференциальный линейный оператор уравнения переноса, который в среде I имеет вид $\hat{L}_1$, а в среде II $\hat{L}_2$; $q(x)$ — кусочно-непрерывное распределение источников в рассматриваемых средах; x обозначена совокупность переменных задачи, т. е. $x = \{r, E, \Omega\}$. Поток излучения является непрерывной функцией своих переменных и $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ для любых E и Ω . Здесь и в дальнейшем будут использоваться обозначения и терминология, введенные в работах [5–7]. Вопрос рассматривается в общем случае независимо от вида излучения (имеется в виду нейтронное и γ -излучение).

Введем интересующий нас линейный функционал

$$F = \int \varphi(x) p(x) dx. \quad (2)$$

Этот функционал является характеристикой некоторого физического процесса, линейно связанного с уровнем излучения. Например, величиной F может быть уровень тепловыделения в точке, мощность дозы, плотность реакций и т. д.; физический смысл F определяется видом функции $p(x)$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим сопряженное ему неоднородное уравнение

$$\hat{L}^+ \varphi^+(x) = p(x), \quad (3)$$

где операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}^+$ удовлетворяют условию $\int \varphi^+ \hat{L} \varphi dx = \int \varphi \hat{L}^+ \varphi^+ dx$ при довольно общих ограничениях на функции φ и φ^+ . В работах [6, 7] выявлен физический смысл сопряженной функции φ^+ по отношению к функционалу F и показано, что этот функционал может быть представлен в виде

$$F = \int \varphi^+(x) q(x) dx. \quad (4)$$

Проварьируем произвольным образом поверхность S в точке r_s , иными словами, заменим в объеме δV (заштрихованная область на рис. 1) среду II на среду I и посмотрим, как это повлияет на функционал F . Для этой цели необходимо

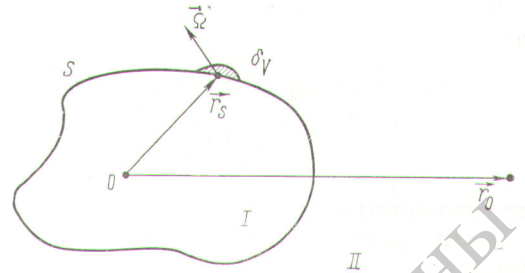


Рис. 1. Схема и основные обозначения рассматриваемой задачи.

рассмотреть возмущенную систему для основной и сопряженной функций:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{L} + \Delta \hat{L}) \varphi'(x) &= q(x) + \Delta q(x); \\ (\hat{L}^+ + \Delta \hat{L}^+) \varphi'^+(x) &= p(x) + \Delta p(x), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\Delta \hat{L} = \hat{L}_1 - \hat{L}_2$, $\Delta q = q_1 - q_2$ и $\Delta p = p_1 - p_2$ в объеме δV , вне этого объема $\Delta \hat{L} = \Delta q = \Delta p = 0$. Возмущенный функционал F' , как и невозмущенный, записывается в одном из двух видов:

$$\begin{aligned} F' &= \int \varphi'(x) (p(x) + \Delta p(x)) dx = \\ &= \int \varphi'^+(x) (q(x) + \Delta q(x)) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначив изменение функционала $\delta F = F' - F$, на основании работ [4, 7] можно получить выражение для δF согласно методам общей теории возмущений для линейных функционалов:

$$\delta F = \int_{\delta V} \varphi^+ \Delta q dx + \int_{\delta V} \varphi' \Delta p dx - \int_{\delta V} \varphi^+ \Delta \hat{L} \varphi' dx \quad (7)$$

или эквивалентное ему

$$\delta F = \int_{\delta V} \varphi'^+ \Delta q dx + \int_{\delta V} \varphi \Delta p dx - \int_{\delta V} \varphi \Delta \hat{L}^+ \varphi'^+ dx. \quad (8)$$

Введем понятие функции эффективности элемента объема среды I на ее поверхности S по отношению к функционалу F . Обозначив эту функцию $h_F(r_s)$, определим ее следующим предельным соотношением:

$$h_F(r_s) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta V}. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что при $\delta V \rightarrow 0$ в выражениях (7) и (8) можно перейти к формулам теории малых возмущений, когда $\varphi'^+ = \varphi^+$ и $\varphi' = \varphi$. В этом случае эквивалентность (7) и (8) становится очевидной, если учесть условие сопряженности операторов $\Delta \hat{L}$ и $\Delta \hat{L}^+$.

Таким образом, с помощью выражения (7) получим

$$h_F(\mathbf{r}_s) = \iint \varphi^+ \Delta q \, dE \, d\Omega + \iint \varphi \Delta p \, dE \, d\Omega - \iint \varphi^+ \Delta \hat{L} \varphi \, dE \, d\Omega, \quad (10)$$

где величины φ , φ^+ , Δq и Δp берутся в точке $\mathbf{r}_s$.

Если оператор кинетического уравнения представить в виде

$$\hat{L} \equiv (\Omega \nabla) + \Sigma_t(E) - \int d\Omega' \int dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega),$$

то

$$\Delta \hat{L} = \Delta \Sigma_t(E) - \int d\Omega' \int dE' \Delta \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \Sigma_t(E) &= \Sigma_{t(1)}(E) - \Sigma_{t(2)}(E); \\ \Delta \Sigma_s(E) &= \Sigma_{s(1)}(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) - \\ &\quad - \Sigma_{s(2)}(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega). \end{aligned}$$

Индексы 1 и 2 относятся к сечениям взаимодействия среды *I* или *II* соответственно.

Выражение, эквивалентное (10) для функции $h_F(\mathbf{r}_s)$, может быть получено также на основании (8), если в расчете использовать сопряженные операторы $\hat{L}^+$ и $\Delta \hat{L}^+$.

Рассмотрим частный случай. На практике возникают задачи, в которых плотность среды *II* намного меньше плотности среды *I*. В этом случае обычно пренебрегают величинами $\Sigma_{t(2)}$, $\Sigma_{s(2)}$, q_2 среды *II* по сравнению с соответствующими величинами среды *I*. Тогда с помощью выражения (10) и уравнения переноса излучения можно показать, что функция эффективности по отношению к функционалу, у которого $\Delta p = 0$ при вариации поверхности среды *I* для стационарной задачи, имеет вид

$$h_F(\mathbf{r}_s) = \iint \varphi^+ (\Omega \nabla \varphi) \, dE \, d\Omega. \quad (12)$$

Таким образом, с помощью определенной выше функции эффективности элемента объема среды приращение функционала F при малых вариациях поверхности S можно представить так:

$$\delta F = \int_{\delta V} h_F(\mathbf{r}_s) \, dV. \quad (13)$$

Определим условие оптимальности формы поверхности S в классическом, случае, когда

точки этой поверхности являются внутренними точками некоторого заданного в трехмерном пространстве объема. Поставим задачу так, как она ставится в вариационном исчислении: среди всех поверхностей S , для которых функционал F_1 имеет некоторое заданное значение, найти ту, которая дает экстремум функционалу F_0 . Функционалы F_1 и F_0 не обязательно должны быть связаны с каким-то одним видом излучения и даже вообще с излучением, описываемым (1), они могут иметь различный физический смысл (например, цена, вес и т. д.). Важно только, чтобы каждому функционалу можно было поставить в соответствие некоторую функцию эффективности и чтобы была справедлива формула (13).

Поставленная выше задача об относительном экстремуме является изопериметрической. Для ее решения, согласно теореме Эйлера [8], составляется вспомогательный функционал $H = F_{10} + \lambda F_1$, $\lambda = \text{const}$ и определяется такая поверхность S , которая дает абсолютный экстремум этому функционалу. Необходимое условие для нахождения экстремальной поверхности S получается из соотношения $\delta H = 0$. В нашем случае

$$\delta H = \int_{\delta V} (h_{F_0}(\mathbf{r}_s) + \lambda h_{F_1}(\mathbf{r}_s)) \, dV = 0.$$

В силу произвольности δV получаем

$$h_{F_0}(\mathbf{r}_s) + \lambda h_{F_1}(\mathbf{r}_s) = 0. \quad (14)$$

Это и есть то условие, с помощью которого в классическом случае можно найти экстремальную поверхность, если известны функции эффективности.

На примере покажем, как практически реализуется условие (14). Пусть имеется точечный моноэнергетический E_0 анизотропный источник γ -квантов мощности $Q(\omega)$ (ω — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}_s$), расположенный в точке 0 бесконечной воздушной среды и создающий в точке $\mathbf{r}_0$ некоторый уровень излучения, характеризуемый мощностью дозы (см. рис. 1). Необходимо вокруг источника распределить защитный материал так, чтобы его вес был минимальным при некоторой допустимой мощности дозы D_1 в точке $\mathbf{r}_0$. В этом случае минимизируемым функционалом F_0 является вес защиты:

$$F_0 = \int \gamma \, dV, \quad (15)$$

где γ — удельный вес материала; ограничивающий функционал F_1 соответствует мощности

дозы в точке r_0 :

$$F_1 = \iiint \varphi(r, \Omega, E) A(E) \delta(r - r_0) dr d\Omega dE = D_1, \quad (16)$$

где $\varphi(r, \Omega, E)$ — поток γ -излучения; $A(E)$ — функция, переводящая поток в мощность дозы. Искомую поверхность S будем характеризовать точками r_s , а область ее определения зададим в виде $r_s > 0$. Функция q , описывающая источник в уравнении (1), имеет вид

$$q(r, \Omega, F) = \frac{\delta(r)}{4\pi |r_s|^2} Q(\Omega) \delta(E - E_0), \quad (17)$$

где

$$\int_{4\pi} Q(\Omega) d\Omega = 1.$$

Из выражения (15) следует, что функция эффективности по отношению к весу равна плотности материала:

$$h_{F_0}(r_s) = \gamma = \text{const.} \quad (18)$$

На основании выражения (18) и уравнения (14) можно сделать вывод, что для задач на минимум веса защиты необходимым условием оптимальности формы является постоянство функции эффективности элемента объема на поверхности по отношению к мощности дозы:

$$h_{F_1}(r_s) = \text{const.}$$

Аналогичный критерий оптимальности был получен в работе [5] для поиска оптимального распределения защитных материалов, реализующего минимальную мощность дозы при заданном весе. Следует отметить, что функция h_{F_1} связана с функцией эффективности защитного материала, введенной в работах [3, 5], соотношением

$h_{F_1}(r_s) = \int_0^{\gamma} h_q(r_s, \rho(r_s)) d\rho$, при этом точки r_s строго принадлежат поверхности раздела сред I и II .

Вид функции h_{F_1} найдем с помощью выражения (10). Из формул (16) и (17) следует, что при вариации поверхности защиты

$$\Delta p = 0 \quad [p(r, \Omega, E) = \delta(r - r_0) A(E)] \quad \text{и} \quad \Delta q = 0.$$

Тогда

$$h_{F_1}(r_s) = - \iint \varphi^+ \Delta \hat{L} \varphi d\Omega dE. \quad (19)$$

Для простоты примем, что защитный материал обладает только поглощающими свойствами, $\Sigma_s = 0$, хотя задача может быть решена и в самом общем случае, но с несколько большим объемом вычислений. При $\Sigma_s = 0$ $\Delta \hat{L} =$

$= \Sigma_{a(1)}(E)$ [см. выражение (14)], где $\Sigma_{a(1)}(E)$ — макроскопическое сечение захвата в среде I , здесь мы пренебрегли величиной $\Sigma_{t(2)}$ по сравнению с $\Sigma_{a(1)}$. Поток излучения φ , входящий в (19), при $\Sigma_s = 0$ имеет довольно простой вид:

$$\varphi(r_s, \Omega, E) = \frac{Q(\Omega)}{|r_s|^2} e^{-\Sigma_{a(1)} |r_s|} \delta(\Omega - \omega) \delta(E - E_0).$$

В работе [6] показано, что сопряженная функция φ^+ может быть представлена в виде $\varphi^+(x) = \int G(x', x) p(x') dx'$, где $G(x', x)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению $\hat{L}G(x', x) = \delta(x' - x)$; x' и x — координаты точки наблюдения и координаты источника соответственно. В нашем случае

$$\varphi^+(r_0, r_s, \Omega, E) = \iint G(r_0, \Omega', E', r_s, \Omega, E) A(E) d\Omega' dE', \quad (20)$$

где Ω' и E' — координаты точки наблюдения. Подставляя полученные выше величины $\Delta \hat{L}$, φ , φ^+ в (19) и пользуясь интегральным свойством δ -функции $[\int f(x) \delta(x - x_1) dx = f(x_1)]$, находим

$$h_{F_1}(r_s) = -D(r_0, r_s, \omega, E) \frac{\Sigma_{a(1)} e^{-\Sigma_{a(1)} |r_s|}}{|r_s|^2}. \quad (21)$$

Здесь введено обозначение $D(r_0, r_s, \omega, E) \equiv \iint G(r_0, \Omega', E', r_s, \omega, E_0) A(E') d\Omega' dE'$, что представляет собой мощность дозы в точке r_0 бесконечной воздушной среды от γ -кванта, испущенного в точке r_s в направлении ω с энергией E_0 . Данные о функции D приведены, например, в работе [9]. Отметим, что выражение (21) для функции h_{F_1} получится таким же, если исходить из (12).

Имея вид функций эффективности (18) и (21), можно с помощью (14) получить уравнение для нахождения экстремальной поверхности, характеризуемой совокупностью координат:

$$\gamma = \lambda D \Sigma_{a(1)} \frac{Q e^{-\Sigma_{a(1)} |r_s|}}{|r_s|^2}. \quad (22)$$

В этом уравнении неопределенной величиной является множитель λ , который находится из условия $F_1 - D_1 = 0$. Для функционала F_1 воспользуемся представлением (4). Используя соотношения (17) и (20) и учитывая интегральное свойство δ -функции, получаем

$$\int Q(\omega) D(r_0, r_s, \omega, E_0) e^{-\Sigma_{a(1)} |r_s|} d\omega - D_1 = 0. \quad (23)$$

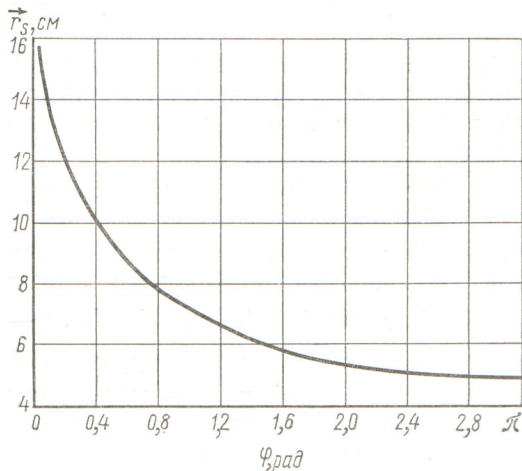


Рис. 2. Оптимальная форма защиты точечного изотропного источника.

В этом выражении

$$D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_s, \omega, E_0) e^{-\Sigma_{a(1)} |\mathbf{r}_s|} \equiv \iint G(\mathbf{r}_0, \Omega', E', 0, \omega, E_0) A(E') d\Omega' dE'.$$

Привлекая к условию (23) уравнение (22), найдем

$$\lambda = \frac{\gamma}{D_1 \Sigma_{a(1)}} \int |\mathbf{r}_s|^2 d\omega. \quad (24)$$

Теперь можно решить уравнения (22). Это уравнение является трансцендентным, и поэтому его лучше всего решать методом последовательных приближений, представляя в виде $y_{(n+1)} = f(y_{(n)})$. Учитывая (24), из уравнения (22) можно получить окончательную расчетную формулу для оптимальной поверхности защиты в рассматриваемом случае:

$$|\mathbf{r}_s|_{(n+1)} = \frac{1}{\Sigma_{a(1)}} \ln \frac{Q(\omega) D(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_s, \omega, E_0) \int |\mathbf{r}_s|_{(n)}^2 d\omega}{D_1 |\mathbf{r}_s|_{(n)}^2}. \quad (25)$$

По этой формуле получается хорошая сходимость итерационного процесса, так как производная от ее правой части по искомой величине при достаточно больших $\mathbf{r}_s$ существенно меньше единицы.

На рис. 2 показан оптимальный профиль защиты из железа, рассчитанный по формуле (25) в случае точечного изотропного источника γ -квантов с энергией $E_0 = 1,25 \text{ Мэв}$ и мощностью $Q = 7,4 \cdot 10^{10} \text{ } \gamma\text{-квант/сек}$, помещенного в бесконечную воздушную среду; при этом было принято, что в точке наблюдения, находящейся

на расстоянии 10 м от источника, допустимая мощность дозы D_1 равна $5,5 \cdot 10^{-3} \text{ мкр/сек}$.

Таким образом, с помощью полученного в настоящей работе условия (14), связывающего функции эффективности, выведены расчетные формулы и произведен численный расчет для поставленной задачи. Условие (14) может быть использовано также в общем случае с произвольным распределением источников и с любыми общими свойствами сред, но при этом придется иметь дело с вычислением интегралов (10) и с нахождением основной и сопряженной функций, как это делается в работе [2] для реакторных задач. Нетрудно убедиться, что в случае необходимости уравнение (14) может быть без труда обобщено на случай большего числа сред и ограничивающих функционалов.

В заключение отметим, что условие постоянства функции эффективности по отношению к функционалу дозы, полученное для задач на минимум веса защиты, позволяет проводить экспериментальную проверку оптимальности формы. Для этого необходимо в произвольных точках поверхности фиксировать элемент объема защитного материала и наблюдать за изменением мощности дозы в точке наблюдения. Если это изменение не будет зависеть от места расположения элемента объема защиты, то поверхность можно считать оптимальной.

Поступила в Редакцию 27/VI 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Вейнберг, Е. Вигнер. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. В. И. Пупко, В. И. Кузьмин. «Атомная энергия», 24, 231 (1968).
3. А. А. Абагян и др. Доклад № 364, представленный СССР на III Международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1964).
4. А. А. Абагян, В. В. Орлов, Г. И. Родионов. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Вып. 1. М., 1963, стр. 7.
5. В. В. Орлов и др. В сб. «Вопросы физики защиты реакторов». Вып. 2. М., Атомиздат, 1966, стр. 5.
6. Б. Б. Кадомцев. «Докл. АН СССР», 113, № 3 (1957).
7. Г. И. Марчук, В. В. Орлов. В сб. «Нейтронная физика». М., Госатомиздат, 1961, стр. 30.
8. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. 4. М., Гостехтеориздат, 1953.
9. E. B l i z a r d. Reactor Handbook. Vol. 3B, ch. 15. N.Y.— Lond., 1962, p. 190.