Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (120), 2020

Математика

УДК 512.542

О пересечении не $\mathfrak{F}$-подгрупп с ограничениями на индексы в группах с операторами

Р.В. Бородич, М.В. Селькин, Е.Н. Бородич, А.В. Бузланов, Т.В. Бородич, Р.А. Кучеров

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.
Ключевые слова: конечная группа, абнормальная подгруппа, $\mathfrak{F}$-корадикал.

The structure of a subgroup equal to the intersection of the kernels of all abnormal maximal A-acceptable subgroups that do not contain a $\mathfrak{F}$-coradical is studied. The influence of the corresponding generalized Frattini subgroup on the structure of the group itself is established.
Ключевые слова: finite group, abnormal subgroup, $\mathfrak{F}$-coradical.

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Исследование пересечений максимальных подгрупп является одной из классических задач теории групп. Начало этого направления связано с работой Г. Фраттини [1]. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]).

Настоящая работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами, основываясь на методах использования подгрупповых функторов в формационных приложениях и в группах с операторами [4], [5].

Подгруппа H группы G называется:

– пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x >$;

– абнормальной, если $x \in < H, H^x >$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G / N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G / N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\phi}) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через:

– $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп;

– $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G;

– $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, индексы которых не делятся на простые числа из π;

– $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, индекс каждой из которых делится на простые числа из π.

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G.

Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$; $p' = P \setminus \{p\}$. Подгруппа H группы G называется S_{π}-подгруппой, если $|G : H|$ не делится на числа из π.

Через $O_{\pi}(G)$ обозначают наибольшую нормальную π-подгруппу группы G.

Теорема 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – локальная формация и $G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая подгруппа группы G. Если индекс любой абнормальной максимальной A-допустимой подгруппы группы G, не содержащей $\mathfrak{F}$-корадикал, есть π-число, то $G^{\mathfrak{F}}$ – π-подгруппа.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Если $\pi \cap \pi(G) = \varnothing$, то в группе G все абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы будут содержать $\mathfrak{F}$-корадикал. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} = 1$ можно считать π-группой. Поэтому $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$ и $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Замечаем, что условия теоремы для фактор-группы выполняются. Если в группе G существует нормальная π-подгруппа $L \neq 1$, то по предположению $G^{\mathfrak{F}}L/L$ будет являться π-подгруппой, а следовательно, и $G^{\mathfrak{F}}$ есть π-группа, что противоречит предположению.

В дальнейшем предполагаем, что в группе G не существует нормальных π-подгрупп, отличных от 1.

Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ не может быть π'-подгруппой. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ не принадлежит $\Delta(G,A)$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – π'-группа, то индекс всякой абнормальной максимальной A-допустимой подгруппы в G, не содержащей $\mathfrak{F}$-корадикал, будет являться π'-числом. Но это противоречит условию теоремы.

Пусть N – собственная минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой подгруппой группы G и $G^{\mathfrak{F}}$ не является π'-группой, то N – собственная π'-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$. Так как для всех групп, порядок которых меньше $|G|$, теорема верна, то в G/N $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}/N$ является π-группой. Подгруппа $N \subseteq \Delta(G,A)$, так как N – π'-группа. Поэтому $N \subseteq D^{\mathfrak{F}}(G,A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G,A)$ и, значит, $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$ есть π-группа. Порядок $G^{\mathfrak{F}}$ делится на некоторые простые числа из π и π'. Применяя результат работы [7], получаем, что $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}_{\pi} \times G^{\mathfrak{F}}_{\pi'}$, то есть, в группе G существует нормальная π-подгруппа, отличная от 1. Полученные противоречия полностью доказывают теорему.

В случае единичности группы операторов A из теоремы 1 следуют соответствующие результаты М.В. Селькина [3], В.В. Шлыка [8].

Теорема 2. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$. В группе G всегда $G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G,A) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$, причем, либо $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A))$, либо всякая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, не принадлежит насыщенному гомоморфу $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Если в группе G все абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы содержат $\mathfrak{F}$-корадикал, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G,A)$ и $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$ – единичная подгруппа. В этом случае имеем, что $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A))$.

Пусть в группе G существует по крайне мере одна абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, принадлежащая гомоморфу $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A))$. Предположим, что существует простое число p, делящее $|G^{\mathfrak{F}}|$, которое не делит порядок $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$ можно считать и p-замкнутой и p'-замкнутой. Используя работу [7] $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}_{p} \times G^{\mathfrak{F}}_{p'}$, причем, в силу выбора числа p $G^{\mathfrak{F}}_{p} \subseteq \Delta(G,A)$. Так как M – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, то $G = MG^{\mathfrak{F}} = M(G^{\mathfrak{F}}_{p} \times G^{\mathfrak{F}}_{p'}) = MG^{\mathfrak{F}}_{p'}$. Но $M \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G/G^{\mathfrak{F}}_{p'} \in \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}_{p'}$, а это противоречит выбору числа p. Таким образом, не существует такого простого числа p, делящего $|G^{\mathfrak{F}}|$, которое бы не делило $|G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)|$. Значит, $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A))$.

Покажем теперь, что $G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G,A) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$. Так как всякая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа H группы G, не содержащая $D^{\mathfrak{F}}(G,A)$, содержит $\mathfrak{F}$-корадикал. Тогда на основании работы [7] $G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq \Delta(G,A)$. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$. Но $\Delta(G,A) \subseteq D^{\mathfrak{F}}(G,A)$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A) \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G,A)$, а значит, и $G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G,A) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 при единичности группы операторов следует соответствующий результат работы [3].

Теорема 3. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\ddot{\pi}}}(G,A)$ – π-разрешимая подгруппа. Тогда либо $D^{\mathfrak{F}}_{\ddot{\pi}}(G,A) \in \mathfrak{F}$ и $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A))$, либо в $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\ddot{\pi}}}(G,A)$ найдется π'-подгруппа V, нормальная в G, такая, что $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G,A)/V \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется.

Если в группе G все абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы не содержат $\mathfrak{F}$-корадикал, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G,A)$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, то на основании работы [7] получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. В этом случае $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) = G$ и в качестве π'-подгруппы V можно выбрать единичную подгруппу.

Следовательно, в группе G существуют абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал. Пусть всякая абнормальная максимальная в G A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) = G$ – π-разрешимая подгруппа. Согласно теореме 1 $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A))$, где $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A)$ – главный фактор группы G. Так как G – π-разрешимая группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – либо π'-группа, либо p-группа, где $p \in \pi$. В первом случае $G / G^{\mathfrak{F}} = \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению. Во втором случае всякая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, имеет в группе G своим индексом π-числа. Следовательно, $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)$. Используя работу [7], получаем, что $D^{\mathfrak{F}}(G,A) \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с предположением.

Следовательно, в группе G существуют абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащие формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что все абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы группы G, не содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащие формации $\mathfrak{F}$, имеют своими индексами в G не π-числа. Значит, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) = G$ – π-разрешимая группа. А так как в π-разрешимой группе любая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа имеет своим индексом либо π-число, либо π'-число, то всякая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, имеет своим индексом в G π'-число.

Если теперь в группе G всякая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал и принадлежащая $\mathfrak{F}$, имеет в G своим индексом π'-число, то по теореме 1 $G^{\mathfrak{F}}$ есть π'-подгруппа. И в этом случае теорема верна.

Если же предположить, что в группе G существует абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и имеющая в G своим индексом π-число, то $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая формация. Используя теорему 2, получаем, что $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Delta(G,A))$. А это противоречит предположению.

Значит, можно считать, что в группе G не существует абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, принадлежащих формации $\mathfrak{F}$. Используя теорему 1, получаем, что $G^{\mathfrak{F}}$ – π'-подгруппа. Отсюда следует, что $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению.

Следовательно, в дальнейшем полагаем, что в группе G существует абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, индекс которой в G есть π-число. Используя теорему 1 из [9], получаем, что в $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A)$ существует π'-подгруппа V, нормальная в G, такая, что $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) / V \in \mathfrak{F}$. Теорема полностью доказана.

Заметим, что $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) \subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A)$ и

$$VD^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) / V \cong D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) / V \cap D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A) \in \mathfrak{F},$$

так как $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая формация и $V \cap D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_{\pi}}(G,A)$ – π'-подгруппа, то в случае, когда группа операторов A единична, из теоремы 3 вытекают результаты работ [3], [8], [10].

Замечание. Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [11].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Бородич, Р.В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – № 71 (11). – С. 1455–1465.

5. Бородич, Р.В. Об F-достижимых подгруппах конечных групп / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Математические заметки. – 2011. – Т. 90, вып. 5. – С. 727–735.

6. Бородич, Р.В. О максимальных абнормальных подгруппах конечных групп / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 268–273.

7. Бородич, Е.Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. – 2012. – Сер. 1. – С. 54–62.

8. Шлык, В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.

9. Бородич, Р.В. О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих F-корадикал / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2019. – № 6 (117). – С. 117–125.

10. Ведерников, В.А. Конечные группы с обобщённой подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюз. алгебраич. коллоквиум. – Гомель, 1968. – С. 44.

11. Бородич, Р.В. Об F-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 03.03.2020