

УДК 537.874.2

Отражение электромагнитной волны от двухслойной биизотропной структуры на отражающей подложке

В.Н. КАПШАЙ, А.И. ТОЛКАЧЁВ, А.А. ШАМИНА

Решена задача об отражении нормально падающей плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны от двухслойной биизотропной структуры на отражающей подложке тремя методами: матричным, рекуррентным и эквивалентным коэффициентов. Проведен численный и графический анализ полученных коэффициентов отражения в частном случае металлической подложки. Полученные зависимости от толщин биизотропных слоев имеют периодический характер, данные периоды найдены аналитически. Определены сочетания параметров задачи, при которых один или два биизотропных слоя не оказывают влияния на результирующий коэффициент отражения.

Ключевые слова: биизотропная среда, коэффициент отражения, слоистая структура на подложке, матричный метод, рекуррентный метод, метод эквивалентных коэффициентов.

The problem of reflection of a plane circularly polarized electromagnetic wave incident normally on a bi-layer biisotropic structure on a reflecting substrate is solved by three methods: matrix, recurrence, and equivalent coefficient. Numerical and graphical analysis of the reflection coefficients obtained is performed in a particular case of a metal substrate. The obtained dependences on the thicknesses of biisotropic layers are periodic; these periods are found analytically. Combinations of parameters of the problem are determined at which one or two biisotropic layers do not affect the resulting reflection coefficient.

Keywords: biisotropic medium, reflection coefficient, periodic structure on a substrate, matrix method, recurrence method, equivalent coefficient method.

Введение. В настоящее время отмечается повышенный интерес к композитным электромагнитным материалам [1, с. 137–140], [2, р. 12584–12586], [3, с. 73], [4, с. 80], [5, с. 12–13], [6, с. 192–194], [7, с. 150–152]. В частности, на практике наибольшее распространение получили многослойные структуры, которые, при соответствующей комбинации параметров сред и толщин слоев, могут обеспечивать возможность создания покрытий с требуемыми электромагнитными свойствами [2, р. 12586–12587]. Использование биизотропных материалов по сравнению с диэлектриками позволяет существенно увеличить число варьируемых параметров в задаче создания новых покрытий, поскольку материальные уравнения в биизотропной среде принимают вид

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}, \quad \vec{B} = (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H}.$$

Здесь величины \vec{D} и \vec{B} – векторы электрической и магнитной индукции, величины \vec{E} и \vec{H} – векторы электрической и магнитной напряженности, ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, χ и α – параметры киральности и невязимности соответственно. В связи с этим разработка аналитических методов расчета взаимодействия электромагнитного излучения со слоистыми структурами из произвольных биизотропных материалов представляет собой важную и актуальную проблему.

Постановка задачи. Направим ось Oz вверх (рисунок 1, а). Пусть область $z \leq 0$ заполнена биизотропной средой 1 с параметрами $\epsilon_1, \mu_1, \chi_1, \alpha_1$; в области $0 < z \leq d_2$ находится биизотропный слой 2 с параметрами $\epsilon_2, \mu_2, \chi_2, \alpha_2$; область $d_2 < z \leq d_2 + d_3$ заполнена биизотропной средой 3 ($\epsilon_3, \mu_3, \chi_3, \alpha_3$); а выше ($z > d_2 + d_3$) находится подложка 4 с коэффициентом отражения R_v^{34} .

В биизотропной среде могут распространяться циркулярно поляризованные волны с показателями преломления $n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \pm \alpha$. Они проходят через такую структуру независимо друг от друга, так как уравнения Максвелла для них разделяются на два независимых набора уравнений (один для право-циркулярно-поляризованного излучения, второй – для лево-циркулярно-поляризованного) [8, р. 24–29].

Рассмотрим нормальное падение плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны на структуру, изображенную на рисунке 1, а. Выражения для векторов электрической напряжённости падающей (\uparrow) и отраженной (\downarrow) волн запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_v^{\uparrow 1} &= (\vec{i} + iv\vec{j}) E_v^{\uparrow 1} \exp(ik_v^1 z - i\omega t), & \vec{H}_v^{\uparrow 1} &= -b_v^1 \vec{E}_v^{\uparrow 1}, \\ \vec{E}_v^{\downarrow 1} &= (\vec{i} + iv\vec{j}) E_v^{\downarrow 1} \exp(-ik_v^1 z - i\omega t), & \vec{H}_v^{\downarrow 1} &= -b_v^1 \vec{E}_v^{\downarrow 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Формулы для волн, распространяющихся в слое номер p ($p = 2, 3, 4$; $E_v^{\downarrow 4} = 0$), имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_v^{\uparrow p} &= (\vec{i} + iv\vec{j}) E_v^{\uparrow p} \exp\left(ik_v^p \left(z - \sum_{s=2}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right), & \vec{H}_v^{\uparrow p} &= -b_v^p \vec{E}_v^{\uparrow p}, \\ \vec{E}_v^{\downarrow p} &= (\vec{i} + iv\vec{j}) E_v^{\downarrow p} \exp\left(-ik_v^p \left(z - \sum_{s=2}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right), & \vec{H}_v^{\downarrow p} &= -b_v^p \vec{E}_v^{\downarrow p}. \end{aligned} \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) индекс v характеризует поляризацию исходной волны (+1 – правая циркулярная, –1 – левая циркулярная), волновые числа $k_{\sigma}^p = 2\pi(\sqrt{\varepsilon_p \mu_p - \chi_p^2} + \sigma \alpha_p) / \lambda$, $\sigma = \pm v$, а коэффициенты пропорциональности между напряженностью электрического и магнитного полей $b_{\sigma}^p = (\chi_p + i\sigma\sqrt{\varepsilon_p \mu_p - \chi_p^2}) / \mu_p$. Отметим, что волны, распространяющиеся в положительном направлении оси Oz , имеют одинаковую поляризацию с падающей волной (v , на рисунке 1 они обозначены сплошной стрелкой), а распространяющиеся в отрицательном направлении – противоположную ($-v$, обозначены пунктирной стрелкой) [9, с. 129].

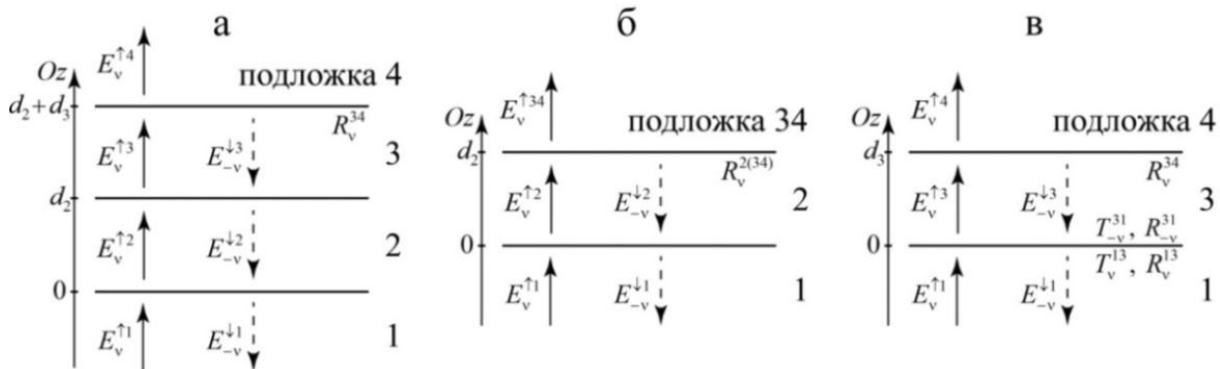


Рисунок 1 – а) Схема отражения волны от двухслойной биизотропной структуры 23 на отражающей подложке 4; б) Схема отражения волны от биизотропного слоя 2 на эквивалентной отражающей подложке 34; в) Схема отражения волны от биизотропного слоя 3 на отражающей подложке 4 с эквивалентными коэффициентами прохождения и отражения на границе 13.

Под коэффициентом отражения будем понимать отношение амплитуд напряженностей отраженной и падающей волн:

$$R_v = E_v^{\downarrow 1} / E_v^{\uparrow 1}. \quad (3)$$

Далее рассмотрим три различных способа нахождения коэффициента отражения (3) от слоистой структуры, изображенной на рисунке 1, а.

1. Матричный метод. В данном методе используется представление граничных условий для векторов \vec{E} и \vec{H} в матричной форме. Это позволяет работать с уравнениями в ком-

пактной форме, что значительно упрощает выражения и позволяет наглядно увидеть их структуру. Введем следующие матрицы [5, с. 12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4 &= \begin{bmatrix} E_v^{\uparrow 4} \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{E}_p &= \begin{bmatrix} E_v^{\uparrow p} \\ E_v^{\downarrow p} \end{bmatrix}, & p &= 1, 2, 3, \\ \mathbf{M}_p &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b_v^p & -b_{-v}^p \end{bmatrix}, & & & p &= 1, 2, 3, 4, \\ \mathbf{\Phi}_p &= \begin{bmatrix} \eta_v^p & 0 \\ 0 & (\eta_{-v}^p)^* \end{bmatrix}, & & & p &= 2, 3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\eta_\sigma^p = \exp(ik_\sigma^p d_p)$. Матрицы $\mathbf{\Phi}_2$ и $\mathbf{\Phi}_3$ учитывают набег фаз при прохождении слоев 2 и 3 соответственно, их также называют фазовыми множителями. Граничные условия для векторов напряженности электрического и магнитного полей примут вид

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_1 = \mathbf{M}_2 \mathbf{E}_2, \\ z = d_2: & \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{E}_2 = \mathbf{M}_3 \mathbf{E}_3, \\ z = d_2 + d_3: & \quad \mathbf{M}_3 \mathbf{\Phi}_3 \mathbf{E}_3 = \mathbf{M}_4 \mathbf{E}_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Для последней границы ($z = d_2 + d_3$) также можно записать выражение для коэффициента отражения подложки:

$$R_v^{34} = \left(E_v^{\downarrow 3} (\eta_{-v}^3)^* \right) / E_v^{\uparrow 3} \eta_v^3. \quad (6)$$

Используя соотношения (4)–(6), выразим матрицу амплитуд \mathbf{E}_1 через \mathbf{E}_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2) (\mathbf{\Phi}_2^{-1} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_3) \mathbf{E}_3 = \\ &= (\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2) (\mathbf{\Phi}_2^{-1} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_3) \begin{bmatrix} 1 \\ R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3 \end{bmatrix} E_v^{\uparrow 3} = \Lambda E_v^{\uparrow 3}, \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ – матрица-столбец с элементами Λ_1, Λ_2 . Подставим в выражение (7) амплитуды напряженностей падающей и отраженной волн, и затем получим коэффициент отражения от данной структуры (3) в явном виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_v^{\uparrow 1} \\ E_v^{\downarrow 1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix} E_v^{\uparrow 3}, \\ R_v &= \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} = \frac{\left((b_v^2 - b_v^1) (b_{-v}^2 - b_{-v}^3 + R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3 (b_{-v}^2 - b_{-v}^3)) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_{-v}^2 \eta_v^2 (b_{-v}^2 - b_v^1) ((b_v^3 - b_v^2) + R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3 (b_{-v}^3 - b_v^2)) \right)}{\left((b_{-v}^1 - b_v^2) (b_{-v}^2 - b_{-v}^3 + R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3 (b_{-v}^2 - b_{-v}^3)) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_{-v}^2 \eta_v^2 (b_{-v}^1 - b_{-v}^2) ((b_v^3 - b_v^2) + R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3 (b_{-v}^3 - b_v^2)) \right)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) в общем случае является комплексным, это свидетельствует о том, что при отражении от двухслойной биизотропной структуры на отражающей подложке (рисунок 1, а) будет происходить изменение фазы отраженной волны по отношению к фазе падающей волны.

2. Рекуррентный метод. Ранее был рассмотрен случай падения плоской электромагнитной волны из полубесконечной биизотропной среды 2 на биизотропный слой 3, находящийся на отражающей подложке 4, и найдено выражение для коэффициента отражения от такой структуры [5, с. 11]:

$$R_v^{2(34)} = \frac{(b_v^3 - b_v^2) + (b_{-v}^3 - b_{-v}^2) R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3}{(b_{-v}^2 - b_v^3) + (b_{-v}^2 - b_{-v}^3) R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3}. \quad (9)$$

Рассматриваемая в данной работе структура (рисунок 1, а) содержит слой 2 конечной толщины d_2 и дополнительно полубесконечную среду 1. Используя выражение (9), можно заменить слой 3 на подложке 4 эквивалентной подложкой 34 с коэффициентом отражения на границе со слоем 2 равным $R_v^{2(34)}$. Такая структура представлена на рисунке 1, б. Таким образом, снова получается структура, состоящая из трех частей: полубесконечная среда 1, биизотропный слой 2 и

эквивалентная подложка 34. Коэффициент отражения для нее может быть рассчитан путем применения формулы (9) еще один раз, но для других сред и коэффициента отражения подложки:

$$R_v = \frac{(b_v^2 - b_v^1) + (b_{-v}^2 - b_{-v}^1) R_v^{(34)} \eta_v^2 \eta_{-v}^2}{(b_{-v}^1 - b_v^2) + (b_{-v}^1 - b_{-v}^2) R_v^{(34)} \eta_v^2 \eta_{-v}^2}. \quad (10)$$

С учетом подстановки (9) в (10) получается выражение, совпадающее с коэффициентом отражения (8), рассчитанным матричным методом, что говорит о правомерности использования данного метода.

Рассмотренный выше рекуррентный метод может применяться и для структур с большим количеством слоев, поэтому он является универсальным способом нахождения коэффициентов отражения от плоских структур.

3. Метод эквивалентных коэффициентов. При нормальном падении электромагнитной волны поляризации σ из биизотропной среды q на границу раздела с биизотропной средой s можно ввести коэффициенты прохождения и отражения [9, с. 129]:

$$\tau_\sigma^{qs} = \frac{b_\sigma^q - b_\sigma^s}{b_\sigma^s - b_\sigma^q}, \quad \rho_\sigma^{qs} = \frac{b_\sigma^q - b_\sigma^s}{b_\sigma^s - b_\sigma^q}. \quad (11)$$

В работе [5, с. 11] было показано, что аналогичные (11) коэффициенты прохождения и отражения можно ввести для случая распространения электромагнитной волны из биизотропной среды 1 в биизотропную среду 3 через биизотропный слой 2 толщины d_2 :

$$T_\sigma^{13} = \tau_\sigma^{12} \frac{\eta_\sigma^2 \tau_\sigma^{23}}{1 - \eta_{-\sigma}^2 \eta_\sigma^2 \rho_\sigma^{23} \rho_\sigma^{21}}, \quad R_\sigma^{13} = \rho_\sigma^{12} \frac{1 - \eta_{-\sigma}^2 \eta_\sigma^2 \rho_\sigma^{23} / \rho_\sigma^{21}}{1 - \eta_{-\sigma}^2 \eta_\sigma^2 \rho_\sigma^{23} \rho_\sigma^{21}}. \quad (12)$$

Аналогичным образом определяются коэффициенты прохождения и отражения для обратного падения (из среды 3 в среду 1):

$$T_\sigma^{31} = \tau_\sigma^{32} \frac{\eta_\sigma^2 \tau_\sigma^{21}}{1 - \eta_{-\sigma}^2 \eta_\sigma^2 \rho_\sigma^{21} \rho_\sigma^{23}}, \quad R_\sigma^{31} = \rho_\sigma^{32} \frac{1 - \eta_{-\sigma}^2 \eta_\sigma^2 \rho_\sigma^{21} / \rho_\sigma^{23}}{1 - \eta_{-\sigma}^2 \eta_\sigma^2 \rho_\sigma^{21} \rho_\sigma^{23}}. \quad (13)$$

Теперь, используя выражения (12) и (13), мы эквивалентно «избавились» от слоя 2 и структура принимает вид, изображенный на рисунке 1, в. Получается структура их трех частей, коэффициент отражения для которой представим в виде

$$R_v = R_v^{13} \frac{1 - \eta_{-v}^3 \eta_v^3 R_v^{34} (R_v^{31} - T_v^{13} T_v^{31} / R_v^{13})}{1 - \eta_{-v}^3 \eta_v^3 R_v^{34} R_v^{31}} = \rho_v^{12} \frac{1 - R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3 \rho_v^{32} - (1 - \eta_{-v}^3 \eta_v^3 R_v^{34} / \rho_v^{32}) \eta_{-v}^2 \eta_v^2 \rho_v^{23} / \rho_v^{21}}{1 - R_v^{34} \eta_{-v}^3 \eta_v^3 \rho_v^{32} - (1 - \eta_{-v}^3 \eta_v^3 R_v^{34} / \rho_v^{32}) \eta_{-v}^2 \eta_v^2 \rho_v^{23} \rho_v^{21}}. \quad (14)$$

Данное выражение полностью совпадает с выражением (8), но имеет более компактный вид, благодаря введению коэффициентов τ_σ^{qs} и ρ_σ^{qs} , определяемых формулами (11).

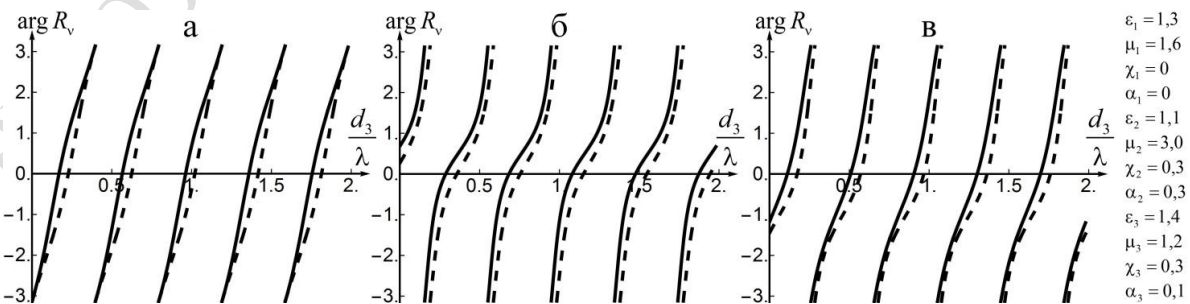


Рисунок 2 – Зависимость аргумента коэффициента отражения от отношения d_3/λ при а) $d_2/\lambda = 0$; б) $d_2/\lambda = 0,45$; в) $d_2/\lambda = 0,9$. Сплошной линии соответствует $v = +1$, пунктирной – $v = -1$.

4. Численный анализ. Проведем численный расчет коэффициентов отражения по формулам (8), (10) и (14) для частного случая металлической подложки 4 ($R_v^{34} = -1$). Для па-

раметров задачи, соответствующих непоглощающим средам 1, 2, 3, и произвольных толщин слоев 2 и 3 энергетический коэффициент отражения $R = |R_v|^2$ равен единице, что подтверждает правильность полученных аналитических формул и, по сути, является следствием закона сохранения энергии. Но коэффициент отражения R_v , как комплексное число, также характеризуется аргументом. С физической точки зрения это есть изменение фазы волны при отражении от многослойной структуры. Построим графики зависимости аргумента R_v от толщины слоя 3 для трех различных толщин слоя 2 (рисунок 2).

Как видно на рисунке, зависимость коэффициента отражения от d_3 является периодической. Данный период можно определить из условия минимума интерференции волн при отражении от слоя 3:

$$\eta_v^3 \eta_{-v}^3 = \exp(i d_3 (k_v^3 + k_{-v}^3)) = 1. \quad (15)$$

Это соотношение, очевидно, выполняется при $d_3 = 0$, т. е. выражение (15) является также условием эквивалентного «избавления» от слоя 3. Оно выполняется при

$$d_3 = \lambda \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_3 \mu_3 - \chi_3^2}}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Другими словами, период зависимости $R_v(d_3)$ равен

$$d_{3 \text{ пер}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_3 \mu_3 - \chi_3^2}}. \quad (17)$$

Аналогичным образом можно определить условия эквивалентного «избавления» от слоя 2 и период зависимости $R_v(d_2)$:

$$d_2 = \lambda \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \chi_2^2}}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$d_{2 \text{ пер}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - \chi_2^2}}. \quad (19)$$

Остается открытым вопрос, будет ли наблюдаться аналогичная периодичность при увеличении количества слоев.

Заключение. В данной работе тремя различными методами получен коэффициент отражения нормально падающей электромагнитной волны от двухслойной биизотропной структуры на отражающей подложке (рисунок 1, а), это формулы (8), (10) и (14). Эти три формы представления результата эквивалентны, что также подтвердил численный анализ.

В частном случае полностью отражающей металлической подложки 4 и непоглощающих слоев 2 и 3 энергетический коэффициент отражения оказался равен единице. Графики на рисунке 2 свидетельствуют о том, что изменение фазы при отражении от такой структуры сложным образом зависит от толщин слоев 2 и 3, а также о различии фаз для правой и левой поляризации падающих волн. Данные графики являются периодическими, периоды зависимости коэффициента отражения от толщин слоев 2 и 3 определяются формулами (19) и (17) соответственно. При выполнении условия (15) (т. е. для толщин слоя 3 определяемых формулой (16)), коэффициент отражения совпадает с коэффициентом отражения для структуры без слоя 3. Аналогичным образом при толщинах слоя 2, определяемых выражением (18), происходит эквивалентное «избавление» от слоя 2. При одновременном выполнении условий (16) и (18) эквивалентная структура имеет вид полубесконечной среды 1 и металлической подложки. Коэффициент отражения R_v при этом равен -1 , что и следовало ожидать.

Литература

1. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Мн. : БГУ, 2010. – 304 с.

2. Investigation of effective media applicability for ultrathin multilayer structures / J. Sukharn [et al.] // *Nanoscale*. – 2019. – Vol. 11. – P. 12582–12588.
3. Фисанов, В.В. Отражение плоских волн от импедансной границы в невзаимной биизотропной среде Теллегена / В.В. Фисанов // *Известия вузов. Физика*. – 2013. – Т. 56, № 5. – С. 69–74.
4. Капшай, В.Н. Прохождение плоских электромагнитных волн через биизотропный слой в биизотропной среде / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, А.Н. Годлевская // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2011. – № 6 (69). – С. 80–87.
5. Капшай, В.Н. Прохождение плоских электромагнитных волн через многослойную биизотропную структуру / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2012. – № 4 (13). – С. 10–14.
6. Капшай, В.Н. Plane electromagnetic wave reflection of a periodic planar biisotropic structure / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2013. – № 6 (81). – С. 189–195.
7. Капшай, В.Н. Multiple reflections method in the problem of inclined electromagnetic wave incidence on the layered planar biisotropic medium / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2015. – № 3 (90). – С. 146–152.
8. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston and London : Artech House, 1994. – 500 p.
9. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела биизотропных сред / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2009. – № 5 (56). – С. 129–133.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 21.04.2020