

дельно на радиальные бетатронные и радиальные синхротронные колебания. В настоящее время изготавливается аппаратура для измерения амплитуды только синхротронных колебаний при помощи электронно-оптического преобразователя.

В заключение выражаем благодарность Ф. А. Королеву, А. А. Соколову, И. М. Тернову и И. П. Чучалину за участие в постановке работы и обсуждение полученных результатов.

Мы благодарны сотрудникам службы эксплуатации синхротрона, обеспечившим его работу во время измерений.

Поступила в Редакцию 12/VI 1967 г.

Многогрупповая система интегральных уравнений для описания переноса нейтронов

Б. Р. БЕРГЕЛЬСОН, И. А. РУМЯНЦЕВ, Б. З. ТОРЛИН

УДК 539.125.52

Известно, что грубая аппроксимация углового распределения быстрых нейтронов, например с помощью низких приближений P_n -метода или небольшого числа разбиений в S_n -методе, приводит к значительным ошибкам в описании пространственно-энергетического распределения нейтронов. Поэтому при рассмотрении переноса быстрых нейтронов в многогрупповом приближении целесообразно использовать для описания распространения нейтронов в пределах каждой группы непосредственно односкоростное кинетическое уравнение.

В случае плоской многозонной геометрии удобной формой записи кинетического уравнения при проведении машинных расчетов является его интегральное представление, т. е. уравнение Пайерлса.

Для амплитуды n -й гармоники потока нейтронов может быть получено следующее уравнение:

$$\Phi_n^i(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_0^{\delta} \varphi_l^i(z) \Sigma_l^{i \rightarrow i}(z) K_{nl}^i(x, z) dz + Q_n^i(x), \quad (1)$$

где Φ_n^i , φ_l^i — амплитуды n -й и l -й гармоник потока $\varphi^i(x, \mu)$ в i -й группе; $\Sigma_l^{i \rightarrow i}$ — амплитуда l -й гармоники индикатрисы рассеяния, описывающей переходы внутри i -й группы; δ — толщина рассматриваемой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Соколов и др. Сб. «Синхротронное излучение». М., «Наука», 1966.
2. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Сб. «Ускорители элементарных частиц». М., Атомиздат, 1957.
3. F. Gutbrod. Z. Phys., **168**, 177 (1962).
4. M. Sands. Phys. Rev., **97**, 470 (1955).
5. А. А. Воробьев, И. М. Тернов. «Изв. вузов. «Физика», **1**, 236 (1960).
6. А. А. Воробьев, И. М. Тернов. Там же, **4**, 239 (1960).
7. А. А. Воробьев. «Изв. вузов. «Электромеханика», **5**, 106 (1958).
8. M. Sands. Nuovo cimento, **15**, 599 (1960).
9. Ф. А. Королев, О. Ф. Куликов. Сб. «Синхротронное излучение». М., «Наука», 1966.
10. А. Г. Ершов. ЖЭТФ, **42**, 606 (1962).
11. А. А. Воробьев и др. «Атомная энергия», **21**, 435 (1966).

Матрица ослабления

$$K_{nl}^i(x, z) = \begin{cases} \int_0^1 P_n(\mu) P_l(\mu) e^{-\frac{y(x, z)}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} & \text{при } x > z; \\ (-1)^{n+l} \int_0^1 P_n(\mu) P_l(\mu) e^{-\frac{y(x, z)}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} & \text{при } x < z \end{cases} \quad (2)$$

выражается через табулированные функции (интегральные экспоненты). В выражении (2) $P_n(\mu)$, $P_l(\mu)$ — полиномы Лежандра;

$$y^i(|x, z|) = \left| \int_z^x \Sigma^i(t) dt \right|,$$

где Σ^i — полное сечение в i -й группе. Функция $Q_n^i(x)$ описывает переходы в i -ю группу из верхних групп, а также вклад в $\Phi_n^i(x)$ внешних источников нейтронов. Следует отметить, что внешние источники в выражении (1) могут быть заданы в виде любой зависимости от x и μ , в том числе и δ -образной.

Бесконечная система уравнений (1) строгим образом получена из интегро-дифференциального уравнения Больцмана, записанного в многогрупповом приближении.

Интересно сравнить систему интегральных уравнений (1) с хорошо известной системой дифференциальных уравнений в P_n -методе. Обе системы являются бесконечными и взаимосвязанными, но между ними есть весьма существенное различие. Довольно часто приходится сталкиваться с задачами, когда угловое распределение нейтронов обладает сильной анизотропией, а угловая зависимость индикатрисы описывается конечным и небольшим числом гармоник. В этом случае система (1) становится конечной, в то время как система дифференциальных уравнений в P_n -методе остается бесконечной. В предельном случае изотропного рассеяния на тяжелых ядрах система (1) вырождается в одно интегральное уравнение для $\varphi_0(x)$ (амплитуды остальных гармоник определяются с помощью квадратур). В то же время в P_n -методе приходится сохранять такое число уравнений, которое соответствует числу гармоник, необходимых для удовлетворительного описания углового спектра нейтронов.

Таким образом, в случае сильной анизотропии углового спектра нейтронов система интегральных уравнений (1), вообще говоря, должна обладать определенным преимуществом по сравнению с системой дифференциальных уравнений в P_n -методе.

В настоящей работе было принято транспортное приближение для индикатрисы упругого рассеяния, которое, как известно, является эффективным изотропным рассеянием и может быть записано в виде

$$\Sigma_s(\mu_0, u' \rightarrow u) = a\delta(1 - \mu_0)\delta(u - u') + bf_s(u', u - u'), \quad (3)$$

где μ_0 — косинус угла рассеяния нейтронов, u' , u — летаргия нейтронов до и после рассеяния.

Распределение по энергии (летаргии) упруго рассеянных нейтронов описывается функцией

$$f_s(u', u - u') = \frac{(M+1)^2}{4M} e^{-(u-u')}\gamma(u', u - u'),$$

где γ учитывает анизотропию рассеяния в системе центра инерции.

Транспортное приближение для индикатрисы (3) можно рассматривать как некую разновидность метода «синтетических ядер», разработанного Д. В. Ширковым [1] и использованного им для описания переноса сильно замедленных нейтронов без учета анизотропии рассеяния в системе центра инерции ($\gamma = 1$). В этом методе при нарушении корреляции

между углом рассеяния и потерей энергии осуществляется среднестатистическая корреляция для большого числа соударений.

Коэффициенты a и b в выражении (3) могут быть определены двояким образом:

$$1. \text{ Из условия обеспечения правильного значения нулевой и первой амплитуды разложения угловой зависимости индикатрисы по сферическим гармоникам, т. е. } \Sigma_s(u') \text{ и } \Sigma_s(u')\bar{\mu}_0(u'): \\ a = \frac{\Sigma_s(u')\bar{\mu}_0(u')}{4\pi}; \quad b = \frac{\Sigma_{trs}(u')}{4\pi} = \frac{\Sigma_s(u')[1 - \bar{\mu}_0(u')]}{4\pi}, \quad (4)$$

где $\Sigma_s(u')$ — сечение упругого рассеяния при u' ; $\bar{\mu}_0(u')$ — средний косинус угла рассеяния при u' . В этом случае средняя логарифмическая потеря энергии $\xi(u')$ отличается от истинного значения.

2. Из условия сохранения истинного значения $\Sigma_s(u')\bar{\mu}_0(u')$ и $\Sigma_s(u')\xi(u')$:

$$a = \frac{\Sigma_s(u')\bar{\mu}_0(u')}{4\pi}; \quad b = \frac{\Sigma_s(u')}{4\pi}. \quad (5)$$

В этом случае индикатриса нормируется не на полное сечение рассеяния $\Sigma_s(u')$, а на $\Sigma_s(u') \times [1 + \bar{\mu}_0(u')]$. Для правильной нормировки индикатрисы в аппроксимационную формулу (3) нужно ввести третий член.

Дальнейшее рассмотрение проведено для коэффициентов a и b , заданных в форме (4).

В соответствии с выражениями (3) и (4) система уравнений (1) вырождается в одно уравнение для интегрального потока, которое записывается следующим образом:

$$\varphi_0^i(x) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^x \psi^i(z) E_1[y_1^i(x, z)] dz + \int_x^\delta \psi^i(z) E_1[y_2^i(x, z)] dz \right\} + R_i \Phi(x). \quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\psi^i(z) = \left[\sum_{h=0}^i \Sigma_{trs}^h(z) f_s^{h \rightarrow i} + \sum_{h=0}^i \Sigma_{in}^h(z) f_{in}^{h \rightarrow i} \right] \varphi_0^h(z);$$

$$y_1^i(x, z) = \int_z^x \Sigma_{tr}^i(u) du; \quad y_2^i(x, z) = \int_x^z \Sigma_{tr}^i(u) du;$$

$$E_1(y) = \int_y^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt;$$

Σ_{tr}^i — полное транспортное сечение в i -й группе.

Функция $\Phi(x)$ определяет вклад в $\varphi_0^i(x)$ нейтронов со спектром R_i , попадающих в рассматриваемую среду извне.

Отличные от нуля члены матрицы переходов в i -ю группу за счет упругого рассеяния

$$\begin{aligned}
 & f_s^{m \rightarrow i} = \frac{(M+1)^2}{4M} \cdot \frac{1}{\Delta u} \times \\
 & \times \int_{u_{i-1}-r}^{u_m} du' \int_{u_{i-1}}^{u'+r} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du; \\
 & f_s^{m+1 \rightarrow i} = \frac{(M+1)^2}{4M} \cdot \frac{1}{\Delta u} \times \\
 & \times \left[\int_{u_m}^{u_{m+1}} du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du - \right. \\
 & \left. - \int_{u_m}^{u_{i-r}} du' \int_{u'+r}^{u_i} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du \right]; \\
 & f_s^{k \rightarrow i} = \frac{(M+1)^2}{4M} \cdot \frac{1}{\Delta u} \times \\
 & \times \int_{u_{k-1}}^{u_k} du' \int_{u_{i-1}}^{u_i} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du \\
 & \text{при } m+2 \leq k \leq i-1; \\
 & f_s^{i \rightarrow i} = \frac{(M+1)^2}{4M} \cdot \frac{1}{\Delta u} \times \\
 & \times \int_{u_{i-1}}^{u_i} du' \int_{u'}^{u_i} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Индекс m определяет номер крайней группы, из которой возможен переход в i -ю группу за счет упругого рассеяния. Нумерация групп растет с ростом летаргии. В выражениях (7) ширина всех групп Δu принята одинаковой. Индекс m -й группы определяется из равенства

$$m = i - 1 - p; \quad r = (p + \alpha) \Delta u,$$

где p — максимальное число групп, через которые нейтрон может быть переброшен в результате упругого рассеяния, а $0 \leq \alpha < 1$; r — максимальная логарифмическая потеря энергии нейтроном при упругом рассеянии.

В случае тяжелых ядер, когда $\frac{r}{\Delta u} < 1$, отличны от нуля лишь два члена матрицы:

$$\begin{aligned}
 & f_s^{i-1 \rightarrow i} = \frac{(M+1)^2}{4M} \cdot \frac{1}{\Delta u} \int_{u_{i-1}-r}^{u_{i-1}} du' \times \\
 & \times \int_{u_{i-1}}^{u'+r} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du = \frac{1}{\Delta u} \xi^{i-1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f_s^{i \rightarrow i} = \frac{(M+1)^2}{4M} \cdot \frac{1}{\Delta u} \times \\
 & \times \left[\int_{u_{i-1}}^{u_i} du' \int_{u'}^{u'+r} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du - \right. \\
 & \left. - \int_{u_{i-r}}^{u_i} du' \int_{u_i}^{u'+r} \gamma(u', u-u') e^{-(u-u')} du \right] = \\
 & = 1 - \frac{1}{\Delta u} \xi^i.
 \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с выражениями (8) функция $\psi^i(z)$ для тяжелых ядер имеет вид

$$\begin{aligned}
 \psi^i(z) = & \sum_{\text{зам}}^{i-1} \varphi_0^{i-1}(z) + \sum_{\text{trs}}^i \varphi_0^i(z) - \sum_{\text{зам}}^i \varphi_0^i(z) + \\
 & + \sum_{k=n}^i \sum_{\text{in}}^k f_{\text{in}}^{k \rightarrow i} \varphi_0^k(z),
 \end{aligned}$$

где $\sum_{\text{зам}}^i = \frac{\sum_{\text{зам}}^i \Sigma_{\text{trs}}^i}{\Delta u}$ — сечение замедления в транспортном приближении.

Рассмотрим теперь асимптотический ход решения уравнения (6). Известно, что асимптотическое решение односкоростного кинетического уравнения совпадает с решением элементарного уравнения диффузии [2]. Для плоской геометрии это $e^{-x/L}$, а для сферической — $\frac{1}{r} e^{-r/L}$.

Вдали от границ среды и источников, как внешних, так и внутренних, функция $e^{-x/L}$ является решением и уравнения (6) при условии, что L_i удовлетворяет соотношению

$$\frac{L_i \Sigma^{i \rightarrow i}}{2} \ln \frac{L_i/l_{\text{tr}}^i + 1}{L_i/l_{\text{tr}}^i - 1} = 1, \quad (9)$$

где $\Sigma^{i \rightarrow i} = \Sigma_{\text{trs}}^{i \rightarrow i} + \Sigma_{\text{in}}^{i \rightarrow i}$.

Необходимо отметить, что асимптотический ход решения уравнения (6) справедлив при выполнении условия

$$\frac{x}{l_{\text{tr}}^i} \left(1 - \frac{l_{\text{tr}}^i}{L_i} \right) \gg 1. \quad (10)$$

При слабом поглощении (в рассматриваемом случае поглощение аналогично уводу из группы) $L_i \gg l_{\text{tr}}^i$.

Если поглощение велико, то $L^i \sim l_{\text{tr}}^i$ и, как следует из выражения (10), решение уравнения (6) совпадает с диффузионным лишь на очень больших расстояниях от границ среды и источников.

В рассматриваемой области энергий ($E > > 1 \text{ Мэв}$) сечение увода нейтронов из группы велико по сравнению с сечениями процессов,

при которых нейтроны остаются внутри группы (в случае не слишком большой ширины группы). Поэтому транспорт быстрых нейтронов скорее близок к случаю прямых прострелов, характеризуемому для плоской геометрии предэкспоненциальным множителем $\frac{1}{x}$, чем к чисто диффузионному переносу, для которого тот же множитель равен 1 (для точечного источника соответственно $\frac{1}{r^2}$ и $\frac{1}{r}$).

Этот вывод подтверждается успехом модели сечения выведения, широко используемой для описания переноса быстрых нейтронов с помощью функции прямых прострелов в рамках многогруппового приближения [3]. Однако лишь кинетическое уравнение может дать правильное соотношение между процессами поглощения (увода) и диффузии нейтронов, соотношение, которое изменяется при переходе от группы к группе.

Для иллюстрации предлагаемого многогруппового метода были рассчитаны спектры быстрых нейтронов, сформировавшиеся в результате прохождения слоев свинца, железа и углерода различной толщины. Результаты численного интегрирования многогрупповой системы кинетических уравнений в транспортном приближении (6) приведены в виде гистограмм на рис. 1—3.

Спектры быстрых нейтронов были получены почти для тех же граничных условий и внешних источников, что и экспериментальные данные, приведенные в работе [4]. Эти экспериментальные спектры также представлены на рис. 1—3.

При расчете было использовано десятигрупповое приближение в интервале энергий 0,945—11,5 Мэв с шириной группы 0,25 в шкале логарифмов. Групповые константы и матрица неупругих переходов определялись по данным работы [5].

Распределение интегрального потока нейтронов в случае графита (см. рис. 1) рассчитывалось двумя способами:

1. Графит — тяжелая среда; значения $f_s^{k \rightarrow i}$ определялись согласно выражениям (8) по данным работы [4].

2. Графит — легкая среда; значения $f_s^{k \rightarrow i}$ вычислялись по формулам (7) с учетом анизотропии рассеяния на ядрах углерода при помощи данных, приведенных в работе [6] в виде значений коэффициентов разложения

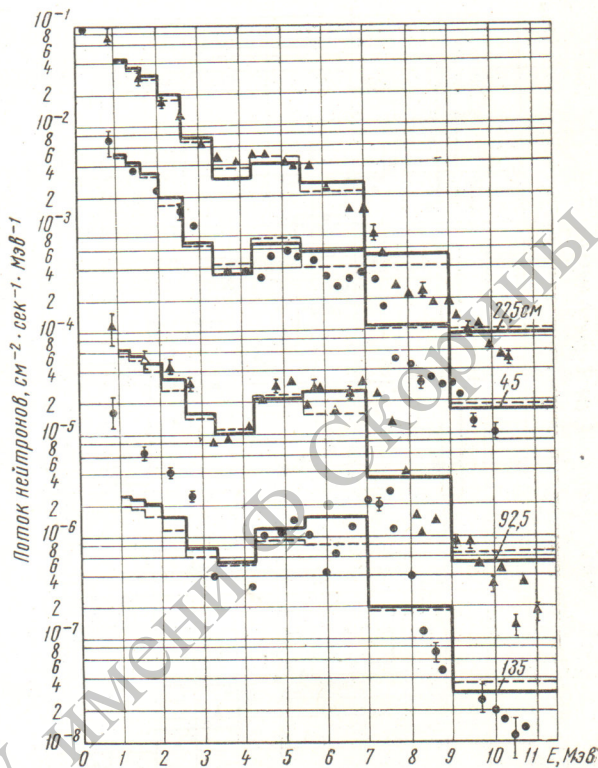


Рис. 1. Спектры быстрых нейтронов в графите: — — — — — тяжелая среда; - - - - - легкая среда.

$\gamma_v(u')$ функции $\gamma(u', u - u')$ по полиномам Лежандра:

$$\gamma(u', u - u') = \sum_{v=0}^n (2v+1) \gamma_v(u') P_v(\eta);$$

$$\eta = 1 - \frac{(M+1)^2}{2M} [1 - e^{-(u-u')}].$$

Система групповых уравнений (6) интегрировалась на машине М-20 методом итераций.

Время счета при δ до 10 l_{tr} не превышало нескольких минут. Следует отметить, что на уменьшение затрачиваемого машинного времени при сохранении точности счета повлияло несколько операций, в том числе избавление с помощью замены переменных $z - x = t^3$ от особенности подынтегральной функции в уравнении (6) в точке $z = x$ и аппроксимация кубической параболой не самой функции $\Phi_0^i(x)$, а ее логарифма.

Ход расчетных кривых на рис. 1—3 указывает на хорошее совпадение с экспериментальными данными при энергиях $E \geq 2$ Мэв. При меньших энергиях наблюдается отклонение, которое увеличивается с ростом толщины

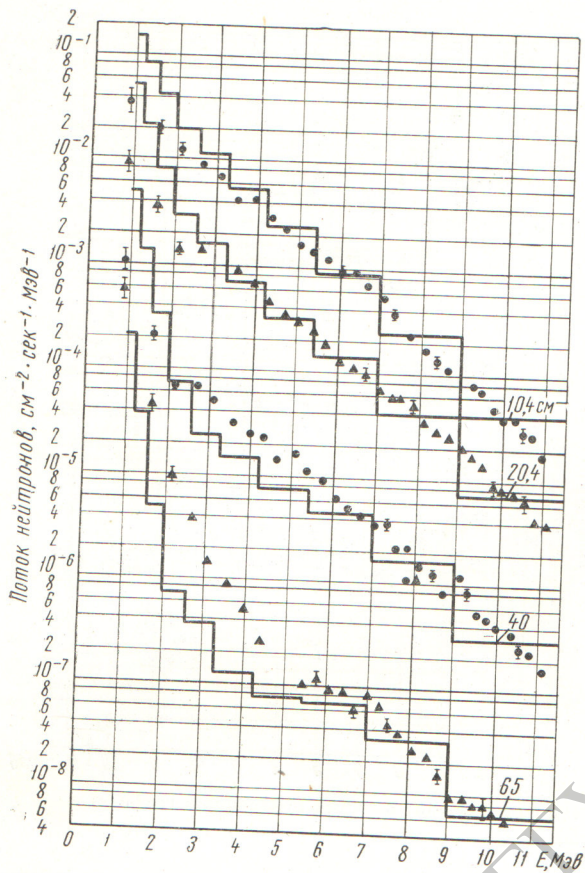


Рис. 2. Спектры быстрых нейтронов в железе.

ослабляющего барьера. Это расхождение может быть связано с невозможностью точного описания геометрии эксперимента, а также с неточностью экспериментальных данных при низких энергиях, на что указывают сами авторы работы [3]. Следует также отметить, что в расчетах использовались групповые константы, определенные без учета резонансной блокировки сечений. Этот эффект может оказаться существенным при глубоких проникновениях быстрых нейтронов в такие среды, как углерод и железо, для которых резонансный

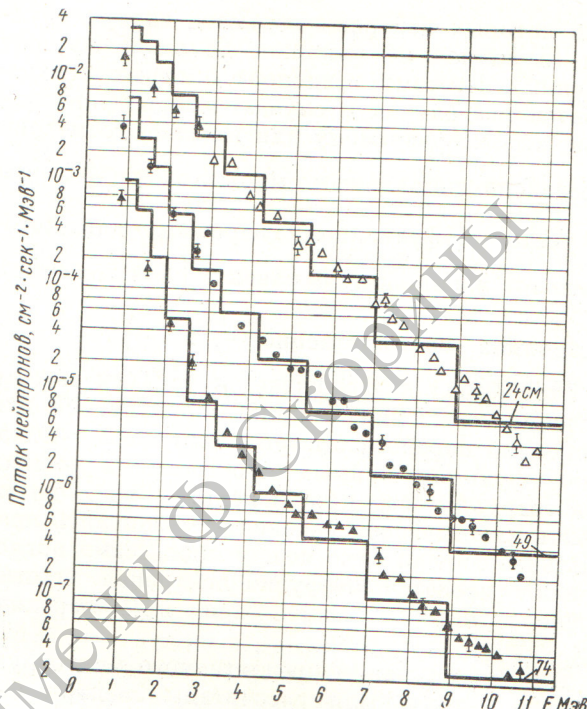


Рис. 3. Спектры быстрых нейтронов в свинце.

ход сечения наблюдается при $E > 2$ Мэв и $E < 2,5$ Мэв соответственно [7].

Поступила в Редакцию 31/X 1966 г.
В окончательной редакции 12/VI 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Ширков. В сб. «Физика и теплотехника реакторов». М., Атомиздат, 1958, стр. 57.
2. А. Д. Галанин. Теория атомных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.
3. J. Butler. The status of theoretical methods for reactor shield design. AEEW-R361, 1964.
4. Yu. A. Egorov. Reactor shielding. Vienna, IAEA, 1964, p. 108.
5. И. В. Гордеев и др. Ядерно-физические константы. М., Госатомиздат, 1963.
6. G. Joanon. Nucl. Sci. and Engng, 13, 171 (1962).
7. D. Hughes, R. Schwartz. Neutron Cross Section. BNL-325, 1958.