Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (120), 2020

УДК 512.542

О конечных группах с заданной системой абсолютно F-субнормальных подгрупп

А.Г. Коранчук

В работе исследуются свойства конечных групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп являются абсолютно F-субнормальными подгруппами.

Ключевые слова: конечная группа, подгруппа, силовский нормализатор, F-субнормальная подгруппа, абсолютно F-субнормальная подгруппа, наследственная насыщенная формация.

The properties of finite groups in which the normalizers of Sylow subgroups are absolutely F-subnormal subgroups are studied.

Keywords: finite group, subgroup, Sylow normalizer, F-subnormal subgroup, absolutely F-subnormal subgroup, hereditary saturated formation.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Свойства вложения силовских подгрупп и их нормализаторов оказывают большое влияние на строение всей группы. В качестве иллюстрации отметим следующие классические результаты. Группа нильпотентна, если любая её силовская подгруппа является нормальной (субнормальной) в ней. Согласно теореме Глаубермана, если все силовские подгруппы группы самонормализуемы, то группа является p-группой для некоторого простого числа p.

В рамках теории формаций широко известны следующие обобщения субнормальности – понятия F-субнормальной и K-F-субнормальной подгрупп [1], [2]. Пусть F – формация. Напомним, что подгруппа H группы G называется F-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{F} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа H группы G называется K-F-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{F} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В последние годы получен целый ряд значительных результатов, рассматривающих формационные вложения различных систем подгрупп в группу. Важное место в этом направлении занимает исследование проблемы, предложенной А.Ф. Васильевым [3], [4].

Проблема. Пусть F – непустая формация (класс Фиттинга, класс Шунка) групп. Найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы группы G, чтобы G принадлежала F.

Изучению данной проблемы посвящены работы различных авторов. Например, в работах [5]–[7] для насыщенной формации F получены свойства класса групп, у которых силовские подгруппы являются F-субнормальными (K-F-субнормальными). В работах [8]–[15] были найдены приложения полученных классов для решения различных конкретных задач теории групп и их формаций.

На строение конечной группы, помимо силовских подгрупп, также значительно влияют свойства вложения силовских нормализаторов (нормализаторов силовских подгрупп) в группу. В [14] изучались системы подгрупп конечной группы, P-субнормальность (U-субнормальность) которых гарантирует сверхразрешимость всей группы. В частности, доказано, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда ее силовские нормализаторы P-субнормальны (U-субнормальны) в G. В [15] доказано, что если в группе G любой ее силовский нормализатор субмодулярен, то G является сильно сверхразрешимой группой, т. е. сверхразрешимой группой, у которой все силовские подгруппы субмодулярны. В [4] были начаты исследования групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп являются F-субнормальными подгруппами, где F – наследственная насыщенная формация.

Несмотря на полученные результаты, отмеченная выше проблема остается актуальной, поскольку имеются примеры наследственных насыщенных формаций F и групп им не принадлежащих, у которых любая силовская подгруппа (любой силовский нормализатор) являются F-субнормальными, см., например, [4]. В связи с этим нами было введено [16] следующее

Определение [16]. Подгруппа H группы G называется абсолютно K-F-субнормальной (абсолютно F-субнормальной) в G, если любая содержащая ее подгруппа является K-F-субнормальной (соответственно, F-субнормальной) в G.

Пусть F – наследственная формация и G – группа. Тогда подгруппы G, содержащие F-корадикал, являются абсолютно F-субнормальными (K-F-субнормальными) в G, однако, они не исчерпывают все примеры подгрупп с таким свойством.

В работе [16] для наследственной насыщенной формации F были исследованы группы, у которых все силовские подгруппы являются абсолютно K-F-субнормальными.

В [16] был поставлен вопрос: можно ли в теореме 1 отбросить требование разрешимости формации F?

В настоящей работе мы даем частичный ответ на этот вопрос.

Скажем, что насыщенная формация F удовлетворяет условию (*), если для каждой группы $G \in$ b(F) такой, что Soc(G) – p-группа для некоторого простого $p \in \pi$(F) выполняется, что G/Soc(G) является N-скованной группой.

Теорема. *Пусть* F *– наследственная насыщенная формация, удовлетворяющая свойству* (*) *и* $\pi = \pi$(F). *Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(1) *Группа G принадлежит* F.

(2) *Каждый силовский нормализатор группы G является абсолютно* F-*субнормальной подгруппой в G и* $\pi(G) \subseteq \pi$(F).

(3) *Любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы G, является* F-*субнормальной подгруппой в G и* $\pi(G) \subseteq \pi$(F).

1. Предварительные сведения. В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [1], [2] и [17]. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа G, где p – простое число, 1 – единичная подгруппа. Через $G = [N]M$ обозначается полупрямое произведение нормальной подгруппы N на подгруппу M. Максимальная подгруппа M группы G обозначается $M < G$.

Лемма 1.1. *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если P – силовская p-подгруппа G и $N \trianglelefteq G$, то $P \cap N$ – силовская p-подгруппа N, PN/N – силовская p-подгруппа G/N и $N_G(PN/N) = N_G(P)N/N$* [17, гл. А, теорема 6.4].

(2) *Если N_1, N_2 – нормальные подгруппы G и P – силовская p-подгруппа G, то $N_1N_2 \cap P = (N_1 \cap P)(N_2 \cap P)$ и $N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P$* [17, гл. А, теорема 6.4].

(3) *Если $N \trianglelefteq G$ и S/N – силовская p-подгруппа G/N, то в G найдется силовская p-подгруппа P такая, что $S/N=PN/N$.*

Класс групп F называется формацией, если 1) F – гомоморф, т. е. из $G \in$ F и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in$ F и 2) из $A, B \trianglelefteq G$, $G/A \in$ F и $G/B \in$ F всегда следует, что $G/A \cap B \in$ F. Через π(F) обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих F. Формация F называется насыщенной, если $G/\Phi(G) \in$ F влечет $G \in$ F. Формация F называется наследственной, если $G \in$F и H – подгруппа из G, то $H \in$ F. Через G^{F} обозначается наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathrm{F}} \in$ F. Границей класса групп H [1], [17] называется класс групп b(H) = (G | $G \notin$ H и $G/N \in$ H всех $1 \neq N \trianglelefteq$ G).

Нам потребуются известные свойства F-субнормальных подгрупп, которые можно найти, например, в монографиях [1], [2].

Лемма 1.2. *Пусть* F *– непустая формация. Пусть H и K – подгруппы группы G, и причем $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H* F-*субнормальна в G, то HN/N* F-*субнормальна в G/N.*

(2) *Если $N \leq H$ и H/N* F-*субнормальна в G/N, то H* F-*субнормальна в G.*

(3) *Если H* F-*субнормальна в G, то HN* F-*субнормальна в G.*

(4) *Если H* F-*субнормальна в $T \leq G$ и T* F-*субнормальна в G, то H* F-*субнормальна в G.*

Лемма 1.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая наследственная формация и* G *– группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальная в* G *подгруппа, то* $H \cap M$ *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальная в* M *подгруппа для любой подгруппы* M *из* G.

(2) *Если* H_1 *и* H_2 *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальные в* G *подгруппы, то* $H_1 \cap H_2$ $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

(3) *Если* H *– подгруппа из* G *и* $G^{\mathfrak{F}} \leq H$, *то* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и группа $G \in \mathfrak{F}$. Тогда подгруппы из G, содержащие $G^{\mathfrak{F}}$, являются абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными в G, однако, они не исчерпывают все примеры подгрупп с таким свойством. Например, $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$ – циклическая подгруппа порядка 4 симметрической группы $G = S_4$ степени 4 является абсолютно $\mathfrak{U}$-субнормальной в G и не содержит $G^{\mathfrak{U}} = \langle(\ ), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\rangle$.

Подгруппу R группы G будем называть промежуточной для $H \leq G$, если $H \leq R \leq G$.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая наследственная формация и* G *– группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппа* H *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *то ее всякая промежуточная подгруппа также абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

(2) *Если* H *– подгруппа из* G *и* $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, *то* H *является абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальной подгруппой группы* G.

(3) *Если* H *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G *и* $K \trianglelefteq G$, *то* HK/K *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G/K.

(4) *Если* $K \trianglelefteq G$, $K \leq H$ *и* H/K *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G/K, *то* H *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

(5) *Если* H *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *то* H *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в любой содержащей ее подгруппе.*

(6) *Если подгруппа* H *абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G *и* R *– подгруппа из* G, *то* $\langle H, R \rangle$ *также абсолютно* $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

Доказательство. (1) Всякая промежуточная подгруппа R абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G подгруппы H является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Так как любая промежуточная подгруппа S подгруппы R является промежуточной подгруппой для H, имеем, что S $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Итак, R абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Утверждение (1) доказано.

(2) Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \leq G$ и $H \leq R \leq G$, то по (3) леммы 1.3 R $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Это означает, что H абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть H абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и $HK/K \leq R/K \leq G/K$. Тогда $H \leq HK \leq R \leq G$, а значит, R $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По (1) леммы 1.2 R/K является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G/K. Следовательно, HK/K абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/R. Утверждение (3) доказано.

(4) Пусть R – подгруппа из G такая, что $H \leq R \leq G$. Из $HK/K \leq R/K \leq G/K$ в силу абсолютной $\mathfrak{F}$-субнормальности подгруппы H/K в G/K следует, что R/K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/K. Теперь из (2) леммы 1.2 вытекает, что R – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G. Следовательно, H абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Утверждение (4) доказано.

(5) Пусть $H \leq R \leq G$, где H – абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа. Если $H \leq T \leq R$, то T – промежуточная подгруппа для H. Следовательно, T $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По (1) леммы 1.3 $T \cap R$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в R. Это означает, что H является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в R. Утверждение (5) доказано.

(6) Если H абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то для любой $R \leq G$ из $H \leq \langle H, R \rangle \leq G$ по (1) леммы следует (6). Лемма доказана. □

2. Доказательства основных результатов. Установим справедливость импликации (1) $\Rightarrow$ (2). Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – формация, имеем, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $G^{\mathfrak{F}} = 1$. Ввиду наследственности $\mathfrak{F}$ по (2) леммы 1.4 любой силовский нормализатор группы G является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G подгруппой. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть P – силовская подгруппа G и $M < G$ такая, что $N_G(P) \subseteq M$. По (2) $N_G(P)$ абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда ввиду (1) леммы 1.4 и из $N_G(P) \subseteq M < G$ следует, что M является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) доказана.

Установим справедливость (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть в группе G любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор из G, F-субнормальна в G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathrm{F})$, но сама G не принадлежит F. Выберем среди них группу G наименьшего порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что $N = G$. Тогда G является простой группой и $G^{\mathrm{F}} = G$. Если N – абелева группа, то G – группа простого порядка. Из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathrm{F})$ и наследственности F следует, что $G \in \mathrm{F}$. Получили противоречие.

Будем считать, что $N = G$ – неабелева простая группа. Пусть P – некоторая силовская подгруппа G. Так как $N = G$ – неабелева простая группа и является минимальной нормальной подгруппой в G, то $N_G(P) \neq G$. Тогда найдется максимальная подгруппа $M <\cdot G$ такая, что $N_G(P) \subseteq M$. По условию (3) M является F-субнормальной подгруппой в G. Тогда $G^{\mathrm{F}} \subseteq M$. Отсюда и из простоты неабелевой группы G следует, что $G^{\mathrm{F}} = 1$, а значит, G принадлежит F. Получили противоречие с выбором группы G.

Будем считать, что $N \neq G$. Пусть M/N – максимальная подгруппа группы G/N, которая содержит некоторый силовский нормализатор $N_{G/N}(S/N)$ для некоторой силовской p-подгруппы S/N группы G/N. Тогда по (3) леммы 1.1 в G найдется силовская p-подгруппа R такая, что $S/N= RN/N$. Применяя (1) леммы 1.1, получаем $N_{G/N}(S/N) = N_G(R)N/N \subseteq M/N$. Так как максимальная подгруппа M является абсолютно F-субнормальной в G, получаем по (3) леммы 1.4 M/N также является абсолютно F-субнормальной в G/N. Из $|G/N| < |G|$ ввиду выбора группы G следует, что $G/N \in \mathrm{F}$.

Предположим, что в G имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа $K \neq N$. Так как F – формация, из $G/N \in \mathrm{F}$ и $G/K \in \mathrm{F}$ следует, что $G/N \cap K \sqcup G \in \mathrm{F}$. Получили противоречие с выбором группы G. Таким образом, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $N \subseteq \Phi(G)$. Поэтому из $G/\Phi(G) \sqcup G/N/\Phi(G)/N \in \mathrm{F}$ и насыщенности F следует, что $G \in \mathrm{F}$. Это противоречит выбору G. Следовательно, $\Phi(G) = 1$ и $N = G^{\mathrm{F}}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N – абелева группа. Тогда $|N| = p^{\alpha}$, где p – некоторое простое число. В этом случае $G = [N]M$, где $N = C_G(N) = G^{\mathrm{F}} = \mathrm{F}(G)$ и M – некоторая максимальная подгруппа группы G. Если M – p-группа, то G – p-группа и из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathrm{F})$ и насыщенности F следует, что $G \in \mathrm{F}$. Противоречие.

Тогда $G = [N]M$ ненильпотентна и по лемме A.13.6 из [17] $O_p(M) = 1$. Заметим, что $G = [N]M \in \mathrm{b}(\mathrm{F})$. Пусть $F = F(M)$ – подгруппа Фиттинга группы M. Ввиду условия (*) для F получаем, что M является N-скованной, а значит, $F \neq 1$ и $C_G(F) \subseteq F$. Пусть F_q – силовская q-подгруппа из F. Тогда q ≠ p, NG(Fq) = M и, значит, CG(Fq) ⊆ M. Пусть NG(Mq) ∩ N = S. Тогда $S \subseteq C_G(M_q) \subseteq C_G(F_q) \subseteq M$ а, значит, $S \subseteq N \cap M = 1$, т. е. $S = 1$. Рассмотрим группу $L = N_G(M_q)[N]$. Тогда $L = G \cap L = M[N] \cap L = (M\cap L)[N]$. Отсюда $M \cap L \sqcup L/N \sqcup N_G(M_q)$. Тогда $M \cap L$ q-замкнута и содержит некоторую силовскую q-подгруппу из G, т. е. $M \cap L \subseteq N_M(G_q) \subseteq N_G(G_q)$. Так как $|M \cap L| = |N_G(M_q)|$ и M_q является силовской q-подгруппой группы G, а нормализаторы силовских подгрупп группы G сопряжены в G и, значит, имеют один и тот же порядок, то $M \cap L = N_G(G_q)$. Следовательно, $N_G(G_q) \subseteq M$ для некоторой силовской q-подгруппы G_q из G.

Ввиду условия (3) теоремы M является F-субнормальной подгруппой в G. Так как $M \in \mathrm{F}$ и $N = G^{\mathrm{F}}$, по предложению 6.1.11 из [1] следует, что $G \in \mathrm{F}$. Получили противоречие с выбором G.

2. Пусть N – неабелева группа. Тогда $N = A_1 \times \cdots \times A_n$ – прямое произведение попарно изоморфных простых неабелевых групп A_i. Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, где p – некоторое простое число, делящее порядок N. Тогда по (1) леммы 1.1 $S = P \cap N$ – силовская p-подгруппа N. Пусть $x \in N_G(P)$. Тогда $P^x = P$. Из $S \trianglelefteq P$, $S^x \subseteq P$ и $S^x \subseteq N$ следует, что подгруппа $S^x = (P \cap N)^x = P^x \cap N^x$. Поскольку $S = S^x$, тогда $x \in N_G(S)$ и $N_G(P) \subseteq N_G(\mathrm{s})$. Заметим, что по лемме Фраттини$\cdot N_G(S)N = G$, причем $N_G(S) \neq G$. Тогда $N_G(P) \subseteq N_G(S) \subseteq M$, где M – некоторая максимальная подгруппа G. Следовательно, $NM = G$. Из $N_G(P) \subseteq M$, ввиду условия (3) теоремы M следует, что M является F-субнормальной подгруппой в G. Получили противоречие с $G = NM$ и $N = G^{\mathrm{F}}$.

Предположим, что $N_G(S) = G$. Тогда S является нормальной подгруппой в G. Получили противоречие с тем, что $S \subset N$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа. Теорема доказана. □

3. Заключительные замечания. Теорема позволяет строить примеры не обязательно разрешимых наследственных формаций с отмеченным выше свойством.

Следствие. *Пусть* F *– наследственная насыщенная формация и* $\pi = \pi$(F). *Если* F *разрешима или граница* b(F) *состоит только из примитивных групп типа* 2, *то следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(1) *Группа G принадлежит* F.

(2) *Если* $\pi(G) \subseteq \pi$(F) *и каждый силовский нормализатор группы G является абсолютно* F-*субнормальной подгруппой в G.*

(3) *Если* $\pi(G) \subseteq \pi$(F) *и любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы G является* F-*субнормальной подгруппой в G.*

Пусть F = Sπform G, где $G \simeq A_5$ знакопеременная группа степени 5, причем $\pi = \pi(G)$. Как показано в работе [18, с. 51] (см. также пример 6.3.14 из [1]) F является наследственной насыщенной формацией и ее граница b(F) состоит только из примитивных групп типа 2.

Литература

1. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.

2. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 2003. – 254 с.

3. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных F-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

4. Васильев, А.Ф. Конечные группы с сильно K-F-субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 66–71.

5. Васильева, Т.И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.

6. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

7. Васильев, А.Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

8. Семенчук, В.Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Мат. заметки. – 2011. – Т. 89, № 1. – С. 104–108.

9. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

10. Мурашко, В.И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами/ В.И. Мурашко // Сиб. мат. журн. 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1354–1353.

11. Murashka, V.I. On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups / V.I. Murashka // Asian-European J. Math. – 2018. – Vol. 11, № 3. – 1850043 (8 pages).

12. Монахов, В.С. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами / В.С. Монахов, И.Л. Сохор // Сиб. мат. журн. 2017 – Т. 58, № 4 – С. 851–863.

13. Ballester-Bolinches, A. On products of generalised supersoluble finite groups / A. Ballester-Bolinches, W.M. Fakieh, M.C. Pedraza-Aguilera // Mediterr. J. Math [Electronic resource]. – Vol. 16, № 2. – Access mode : https://doi.org/10.1007/s00009-019-1323-0. – Date of access : 02.04.2020.

14. Kniahina, V.N. On supersolvability of finite groups with P-subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

15. Васильев, В.А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп / В.А. Васильев // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. – 2016. – № 2 (91). – С. 17–21.

16. Васильев, А.Ф. Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, А.Г. Мельченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 44–50.

17. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 898 p.

18. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы / Ин-т математики Акад. наук Украины ; редкол.: Н.С. Черников [и др.]. – Киев, 1993. – С. 27–54.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 11.05.2020