Проблемы физики, математики и техники, № 1 (30), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О НЕПОЛУАССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ $\eta_{s,\sigma,k}$

А.Д. Русаков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON NONSEMIASSOCIATIVITY OF POLYADIC OPERATION $\eta_{s,\sigma,k}$

A.D. Rusakou

F. Scorina Gomel State University

Найдены достаточные условия неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n-арной полугруппы $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η.

Ключевые слова*: полиадическая операция, группоид, полугруппа, полуассоциативность, нейтральная последовательность.*

Sufficient conditions of nonsemiassociativity of a polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$ which is determined on a Cartesian power A^k of n-ary $< A, \eta >$ semigroup with substitution σ of a range $\{1, \ldots, k\}$ and n-ary operation η are found.

Keywords*: polyadic operation, groupoid, semigroup, semiassociativity, neutral sequence.*

Введение

Полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ была определена в [1] на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η. Частным случаем полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A. В свою очередь, частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил в [3]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

В [1] доказано, что если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной. В связи со сказанным возникает естественная задача нахождения достаточных условий неассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$. В данной статье установлено, что одним из таких достаточных условий является наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$, содержащей более одного элемента, левой нейтральной последовательности и выполнимость условия $\sigma^l \neq \sigma$. В качестве следствий основного результата получены результаты из [4] об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

Заметим, что l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является частным случаем не только операции $\eta_{s,\sigma,k}$, но и l-арной операции $[\ ]_{l,T,k}$ из [5], где T – фиксированное подмножество подстановок из $\mathbf{S}_k$.

1 Предварительные сведения

Напомним, что n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют *ассоциативной*, если в нём для любого $i = 2, \ldots, n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(x_1 \ldots x_n)x_{n+1} \ldots x_{2n-1})) =$$
$$= \eta(x_1 \ldots x_{i-1}\eta(x_i \ldots x_{i+n-1})x_{i+n} \ldots x_{2n-1}).$$

Если указанное тождество выполняется для $i = n$, то n-арную операцию η называют *полуассоциативной*. Таким образом, n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют полуассоциативной, если в нём выполняется тождество

$$\eta(\eta(x_1 \ldots x_n)x_{n+1} \ldots x_{2n-1})) =$$
$$= \eta(x_1 \ldots x_{n-1}\eta(x_n \ldots x_{2n-1})).$$

Ясно, что ассоциативная n-арная операция является и полуассоциативной.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *левой* (*правой*) *нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}x) = x \ (\eta(xe_1 \ldots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *нейтральной последовательностью*, если она является и левой нейтральной и правой нейтральной.

Элемент e n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$\eta(x\underbrace{e \ldots e}_{n-1}) = \eta(ex\underbrace{e \ldots e}_{n-2}) = \ldots$$
$$\ldots = \eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-2}xe) = \eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}x) = x.$$

Элемент e n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *левой* (*правой*) *единицей*, если

$$\eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x) = x\ (\eta(x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

***Определение* 1.1** [1]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \qquad (1.1)$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) =$$
$$= \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))). \qquad (1.2)$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\sigma,k}$.

Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ описывает следующая

***Теорема* 1.1** [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$
$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}$$
$$\eta\,(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\,\eta(\ldots$$
$$\ldots \eta\,(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots$$
$$\ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \qquad (1.3)$$

***Замечание* 1.1.** Если n-арная операция η ассоциативна, то (1.3) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$
$$= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

***Теорема* 1.2** [1]. *Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.*

***Лемма* 1.1** [6]. *Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) f_σ – *биекция*;

2) *для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \ldots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ *для любого $i \geq 2$*;

4) *если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k})$, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$*;

5) *если $< A, * >$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $< A^k, * >$ с операцией*

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_k) * (y_1, \ldots, y_k) =$$
$$= (x_1 * y_1, \ldots, x_k * y_k).$$

2 Вспомогательные результаты

Приведём пример, показывающий, что если подстановка σ не удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, определенная с помощью (1.1) и (1.2), может быть неассоциативной даже для ассоциативной n-арной операции η.

***Пример* 2.1.** Положим в определении 1.1: A – множество, содержащее более одного элемента; η – 4-арная операция, производная от операции в полугруппе A с операцией $ab = b$ для любых a, $b \in A$;

$$n = 4,\ s = 1,\ l = 4,\ k = 2,\ \sigma = (12) \in \mathbf{S}_2.$$

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Ясно, что $< A, \eta >$ – 4-арная полугруппа с 4-арной операцией

$$\eta(xyzu) = u.$$

Поэтому любая последовательность длины 3, составленная из элементов множества A, является левой нейтральной в 4-арной полугруппе $< A, \eta >$.

Определим согласно (1.1) на A^2 4-арную операцию

$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu}) =$$
$$= \eta_{1,(12),2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) =$$
$$= (\eta(x_1y_{\sigma(1)}z_{\sigma^2(1)}u_{\sigma^3(1)}), \eta(x_2y_{\sigma(2)}z_{\sigma^2(2)}u_{\sigma^3(2)})) =$$
$$= (\eta(x_1y_2z_1u_2), \eta(x_2y_1z_2u_1)) = (u_2, u_1).$$

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{u}$ – те же, что и выше,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2),\ \mathbf{w} = (w_1, w_2),\ \mathbf{p} = (p_1, p_2).$$

Согласно определению 1.1,

$$\eta_{1,(12),2}(\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) =$$
$$= \eta_{1,(12),2}((u_2, u_1)\mathbf{vwp}) =$$
$$= (\eta(u_2v_2w_1p_2), \eta(u_1v_1w_2p_1)) = (p_2, p_1),$$
$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyz}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{uvwp})) =$$
$$= \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyz}(\eta(u_1v_2w_1p_2), \eta(u_2v_1w_2p_1))) =$$
$$= \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyz}(p_2, p_1)) =$$
$$= (\eta(x_1y_2z_1p_1), \eta(x_2y_1z_2p_2)) = (p_1, p_2).$$

Так как A содержит более одного элемента, то p_1 и p_2 можно выбрать так, что $p_1 \neq p_2$. В этом случае

$$\eta_{1,(12),2}(\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) \neq$$
$$\neq \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyz}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{uvwp})).$$

Из этого неравенства вытекает, что 4-арная операция $\eta_{1,(12),2}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

В примере 2.1 4-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает левой нейтральной последовательностью, и для подстановки (12) верно неравенство $(12)^4 \neq (12)$. Покажем, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ левой нейтральной последовательности является достаточным условием неассоциативности l-арной операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$. Для этого нам понадобятся несколько лемм.

Утверждение 5) леммы 1.1 обобщается следующей леммой.

***Лемма* 2.1.** *Если в условиях леммы* 1.1 $< A, \eta >$ *– n-арный группоид, то f_σ – автоморфизм n-арного группоида $< A^k, \eta >$ с n-арной операцией η, которая определяется покомпонентно с помощью операции* η:

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, \eta(x_{1k} \ldots x_{nk})).$$

Доказательство. Так как

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} =$$
$$= (\eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})))^{f_\sigma} =$$
$$= (u_1 = \eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, u_k = \eta(x_{1k} \ldots x_{nk}))^{f_\sigma} =$$
$$= (u_{\sigma(1)} = \eta(x_{1\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma(1)}), \ldots$$
$$\ldots, u_{\sigma(k)} = \eta(x_{1\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma(k)})) =$$
$$= \eta((x_{1\sigma(1)}, \ldots, x_{1\sigma(k)}) \ldots (x_{n\sigma(1)}, \ldots, x_{n\sigma(k)})) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \ \ldots \ \mathbf{x}_n^{f_\sigma}),$$

то

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} = \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \ \ldots \ \mathbf{x}_n^{f_\sigma}),$$

то есть f_σ – автоморфизм n-арного группоида $< A^k, \eta >$. Лемма доказана.

***Замечание* 2.1.** Ясно, что для n-арного группоида $< A, \eta >$ n-арная операция, определённая на декартовой степени A^k покомпонентно с помощью n-арной операции η и обозначаемая тем же символом η, совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\,\varepsilon,\,k}$, где ε – тождественная подстановка. Поэтому, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то по теореме 1.2 $< A^k, \eta >$ – n-арная полугруппа.

***Лемма* 2.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа, σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k, \ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \ \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}} \ \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}}).$$

Доказательство. Так как, ввиду леммы 1.1,

$$\mathbf{x}_i^{f_\sigma^{i-1}} = \mathbf{x}_i^{f_{\sigma^{i-1}}} = (x_{i\sigma^{i-1}(1)}, \ \ldots, \ x_{i\sigma^{i-1}(k)}),$$

то, используя замечание 1.1 и определение операции η из формулировки леммы 2.1, получим

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \ \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}} \ \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}}) =$$
$$= \eta((x_{11}, \ldots, x_{1k})(x_{2\sigma(1)}, \ldots, x_{2\sigma(k)}) \ldots$$
$$\ldots (x_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, x_{l\sigma^{l-1}(k)})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(1)}) \ldots$$
$$\ldots \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(k)})) = \eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l).$$

Лемма доказана.

***Лемма* 2.3** [6]. *Пусть A – множество, состоящее более чем из одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из $\mathbf{S}_k$. Если $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{x}^{f_\tau}$ для любого $\mathbf{x} \in A^k$, то $\sigma = \tau$.*

***Лемма* 2.4.** *Пусть $e_1 \ldots e_{n-1}$ – нейтральная (правая нейтральная, левая нейтральная) последовательность n-арного группоида $< A, \eta >$,*

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{k}), \ \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{k}), \ \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \ldots, e_{n-1}}_{k}).$$

Тогда $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}$ – нейтральная (правая нейтральная, левая нейтральная) последовательность n-арного группоида $< A^k, \eta >$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k.

Если $e_1 \ldots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n-арного группоида $< A, \eta >$, то положим

$$\eta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{x}) = (y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Так как в n-арном группоиде $< A^k, \eta >$ n-арная операция η определена покомпонентно с помощью n-арной операции η n-арного группоида $< A, \eta >$, то

$$y_j = \eta(e_1 \ldots e_{n-1}x_j),$$

откуда, учитывая левую нейтральность последовательности $e_1 \ldots e_{n-1}$, получаем $y_j = x_j$. Следовательно,

$$\eta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

что означает левую нейтральность последовательности $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}$.

Если $e_1 \ldots e_{n-1}$ – правая нейтральная последовательность n-арного группоида $< A, \eta >$, то положим

$$\eta(\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}) = (z_1, z_2, \ldots, z_k).$$

Тогда

$$z_j = \eta(x_je_1 \ldots e_{n-1}),$$

откуда, учитывая правую нейтральность последовательности $e_1 \ldots e_{n-1}$, получаем $z_j = x_j$. Следовательно,

$$\eta(\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}) = \mathbf{x},$$

что означает правую нейтральность последовательности $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}$. Лемма доказана.

3 Основные результаты

***Теорема* 3.1.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ не выполняется тождество*

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) =$$
$$= \eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1})). \quad (3.1)$$

Доказательство. Если предположить выполнимость в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ тождества из условия теоремы, то ввиду леммы 2.2,

$$\eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \eta(\mathbf{x}_l \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}),$$

откуда

$$\eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^{l}} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{2l-3}} (\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}).$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}$$
$$\mathbf{x}_{s(n-1)+2}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}$$
$$\mathbf{x}_{s(n-1)+2}^{f_\sigma^{s(n-1)+1}} \ldots \mathbf{x}_{2s(n-1)}^{f_\sigma^{2s(n-1)-1}} (\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}).$$

По условию теоремы в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ существует левая нейтральная последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$. Если положить

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{2(n-1)+1} = \ldots$$
$$\ldots = \mathbf{x}_{(2s-1)(n-1)+1} = \mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{k}),$$
$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{2(n-1)+2} = \ldots$$
$$\ldots = \mathbf{x}_{(2s-1)(n-1)+2} = \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{k}),$$

…………………………………………

$$\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{x}_{2(n-1)} = \mathbf{x}_{3(n-1)} = \ldots$$
$$\ldots = \mathbf{x}_{2s(n-1)} = \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \ldots, e_{n-1}}_{k}),$$

то, в силу утверждения 4) леммы 1.1, последнее равенство принимает вид

$$\eta(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ \ldots \ \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{2s} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ \ldots \ \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{2s} (\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}).$$

Так как, согласно лемме 2.4, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n-арной полугруппы $< A^k, \eta >$, то

$$\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}} = (\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}.$$

А так как f_σ^{l-1} – автоморфизм n-арной полугруппы $< A^k, \eta >$, то из этого равенства следует равенство

$$\mathbf{x}_{2l-1} = \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

которое равносильно равенству

$$\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

где ε – тождественная подстановка. В свою очередь, из этого равенства, в силу утверждения 3) леммы 1.1, следует

$$\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{2l-1}^{f_{\sigma^{l-1}}}.$$

Так как элемент $\mathbf{x}_{2l-1}$ выбран в A^k произвольно, то, применив к полученному равенству лемму 2.3, получим $\varepsilon = \sigma^{l-1}$, то есть $\sigma^l = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

Теорему 3.1 можно переформулировать следующим образом.

***Теорема* 3.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью;* σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *l-арного группоида* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

***Теорема* 3.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью;* σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является ассоциативной;*

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является полуассоциативной;*

3) *подстановка* σ^{l-1} – *тождественная.*

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является полуассоциативной и предположим нетождественность подстановки σ^{l-1}, что равносильно $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда по теореме 3.2 l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ не является полуассоциативной, что невозможно.

3) $\Rightarrow$ 1) Применяется теорема 1.2. Теорема доказана.

***Замечание* 3.1.** Понятно, что утверждения теорем 3.1–3.3 останутся верными, если в их условиях левую нейтральную последовательность заменить нейтральной последовательностью.

Так как для всякой единицы e n-арной полугруппы последовательность $\underbrace{e \ldots e}_{n-1}$ является нейтральной, то из теорем 3.1–3.3 извлекаются следующие следствия.

***Следствие* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента;* σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не выполняется тождество* (3.1), *то есть l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

***Следствие* 3.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента;* σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является ассоциативной;*

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является полуассоциативной;*

3) *подстановка* σ^{l-1} – *тождественная.*

Полагая в теоремах 3.1–3.3 или в следствиях 3.1 и 3.2 $n = 2$, получим следующие следствия.

Следствие 3.3. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *не выполняется тождество*

$$[[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = \\ = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-1}[\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}]_{l,\sigma,k}, \quad (3.2)$$

то есть l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

***Следствие* 3.4** [4]. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной;*

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является полуассоциативной;*

3) *подстановка* σ^{l-1} *– тождественная.*

***Замечание* 3.2.** Понятно, что утверждения следствий 3.1–3.4 останутся верными, если в их условиях левую единицу заменить единицей.

Так как полиадические группы обладают нейтральными последовательностями, то теоремам 3.1–3.3 соответствуют следующие теоремы.

***Теорема* 3.4.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не выполняется тождество* (3.1), *то есть l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

***Теорема* 3.5.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является ассоциативной;*

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является полуассоциативной;*

3) *подстановка* σ^{l-1} *– тождественная.*

Заменяя в следствиях 3.1–3.2 полугруппу группой или полагая в теоремах 3.4–3.5 $n = 2$, получим следующие следствия.

***Следствие* 3.5.** *Пусть A – группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *не выполняется тождество* (3.2), то есть *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.*

***Следствие* 3.6.** *Пусть A – группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной;*

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является полуассоциативной;*

3) *подстановка* σ^{l-1} *– тождественная.*

***Замечание* 3.3.** Ясно, что в теореме 3.1 и во всех утверждениях этого раздела, в формулировках которых присутствует неравенство $\sigma^l \neq \sigma$, подстановка σ не может быть тождественной, а арность l не может быть равной единице, так как и для тождественной подстановки σ и для арности $l = 1$ указанное неравенство неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

2. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

3. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. *Гальмак*, *А.М.* Об ассоциативности полиадических группоидов / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 4–11.

5. *Гальмак*, *А.М.* Обобщенные полиадические операции / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 50–57.

6. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 09.02.17.