УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ОБОБЩЕННО МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ (ОБЗОР). I. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО НОРМАЛЬНЫМИ *n*-МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.А. Ковалева

Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины

FINITE GROUPS WITH GIVEN GENERALIZED MAXIMAL SUBGROUPS (REVIEW). I. FINITE GROUP WITH GENERALIZED NORMAL *n*-MAXIMAL SUBGROUP

V.A. Kovaleva

F. Scorina Gomel State University

Пусть G – конечная группа. Максимальной цепью длины n в G называется всякая цепь вида $H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G$, где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа H из G называется n-максимальной подгруппой в G, если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n. Данный обзор посвящен анализу наиболее известных работ, связанных с исследованиями конечных групп с обощенно нормальными n-максимальными подгруппами.

Ключевые слова: *конечная группа*, *максимальная подгруппа*, *максимальная цепь*, *n-максимальная подгруппа*, *нормальная подгруппа*, *субнормальная подгруппа*, *K-* $\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа*, *перестановочная подгруппа*.

Let G be a finite group. A chain of subgroups $H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G$ of G such that H_i is a maximal subgroup of H_{i-1} for every $i = 1, \ldots, n$ is called a maximal chain of length n. A subgroup H of G is said to be an n-maximal subgroup of G if H is the latest member of some maximal chain of G of length n. In this review, we give the analisis of the most famous papers in which finite groups with generalized normal n-maximal subgroups are developed.

Keywords: *finite group*, *maximal subgroup*, *maximal chain*, *n-maximal subgroup*, *normal subgroup*, *subnormal subgroup*, *K-* $\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup, permutable subgroup*.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными и G обозначает конечную группу. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка G, n обозначает некоторое натуральное число.

Напомним, что собственная подгруппа M из G называется *максимальной подгруппой* в G, если M не содержится ни в какой другой собственной подгруппе из G.

Результаты, связанные с изучением максимальных подгрупп, составили одно из самых содержательных направлений в теории конечных групп. Прежде всего это связано с тем, что многие известные классы групп допускают описание на основе свойств максимальных подгрупп. В частности, Хупперт в работе [1] доказал, что группа является нильпотентной тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт установил, что группа сверхразрешима в том и только в том случае, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами. Дескинсом [2], [3] было доказано, что G является разрешимой тогда и только тогда, когда индекс любой максимальной подгруппы из G совпадает с ее нормальным индексом. Отметим также, что максимальные подгруппы лежат в основе многих важных признаков принадлежности группы выделенному классу групп. Наиболее известными среди них являются теорема Дескинса – Янко – Томпсона [4] о разрешимости группы, обладающей нильпотентной максимальной подгруппой, класс нильпотентности 2-силовских подгрупп которой не превосходит двух, а также теоремы Шмидта [5] и Хупперта [1] о разрешимости групп, все максимальные подгруппы которых являются нильпотентными и сверхразрешимыми соответственно.

По мере развития теории максимальных подгрупп авторами стали предприниматься попытки изучения и применения их обобщений – максимальных цепей и n-максимальных подгрупп. Напомним, что *максимальной цепью длины n* в G называется всякая цепь вида

$$H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G,$$

где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа H из G называется

n-максимальной подгруппой в G, если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n.

Работы, посвященные изучению максимальных цепей и, в частности, n-максимальных подгрупп $(n>1)$, составили обширное направление теории конечных групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Одни из наиболее ранних результатов в этом направлении были получены Хуппертом [1]. Хупперт исследовал группы, все n-максимальные подгруппы которых нормальны для $n=2,3$. Так, в случае, когда $n=2$, было доказано, что группа сверхразрешима; более того, если порядок такой группы имеет по крайней мере три простых делителя, Хуппертом была доказана ее нильпотентность. В случае, когда $n=3$, Хупперт установил, что коммутант группы нильпотентен, ранг группы не превосходит 2 и, если порядок группы имеет по крайней мере три простых делителя, группа сверхразрешима.

В дальнейшем результаты Хупперта получили развитие в работах многих известных математиков. Данный обзор посвящен анализу наиболее известных работ, связанных с исследованиями групп с обобщенно нормальными n-максимальными подгруппами. Используемые в статье обозначения и терминологию можно при необходимости найти в [6]–[8].

1 Группы, все *n*-максимальные подгруппы которых нормальны

Поскольку в [1] Хупперт привел лишь общие характеризации групп, все 3-максимальные подгруппы которых нормальны, вполне естественным развитием его результатов является получение полного описания групп с нормальными n-максимальными подгруппами при $n\geq 3$.

Отметим, что в ненильпотентном случае полное описание групп с нормальными 3-максимальными подгруппами дает следующая теорема, доказанная в работе Луценко и Скибы [9].

***Теорема* 1.1** [9, теорема 4.1]. *Пусть p, q, r – простые числа. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа ненильпотентной группы G является нормальной в G, когда либо $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, $\alpha+\beta+\gamma\leq 3$, либо G изоморфна $SL(2,3)$, либо G – сверхразрешимая группа Шмидта, либо G – сверхразрешимая группа Белоногова одного из следующих типов:*

(1) *$G=P\rtimes Q$, где $|P|=p$, $|Q|=q^{\beta}$ $(\beta\geq 3)$; Q является либо циклической группой, либо абелевой группой типа $(q^{\beta-1},q)$, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_{\beta}(q)$ $(\beta>4)$; $C_Q(P)=\Omega_{\beta-2}(Q)$.*

(2) *$G=P\rtimes Q$, где P – циклическая группа порядка p^2, обе подгруппы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$.*

(3) *$G=(P_1\times P_2)\rtimes Q$, где $|P_1|=|P_2|=p$, P_1Q – группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта.*

(4) *$G=(P\rtimes Q)R$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы в G, $|P|=p$, $|R|=r$, Q – циклическая группа и $F(G)=PR\Phi(Q)$.*

В теореме 1.1 под *группой Белоногова* понимается ненильпотентная разрешимая группа, не являющаяся группой Шмидта, все вторые максимальные подгруппы которой нильпотентны.

Группы с нормальными 4-максимальными подгруппами были исследованы в работе Янко [10]. Янко установил, что простая группа, все 4-максимальные подгруппы которой нормальны, изоморфна группе $PSL(2,p)$, где либо $p=5$, либо p – такое простое число, что $p-1$ и $p+1$ являются произведением не более трех простых чисел и p сравнимо с ± 3 или ± 13 по модулю 40. Кроме того, Янко доказал, что $SL(2,5)$ является единственной неразрешимой непростой группой, в которой все 4-максимальные подгруппы нормальны. Напомним, что *рангом разрешимой группы* называется наибольшее целое число, для которого в группе существует главный фактор порядка p^k для некоторого простого числа p. В случае, когда G разрешима, Янко, обобщив таким образом результаты Хупперта, показал, что ранг G не превышает трех, а в случае, когда $|G|$ имеет по крайней мере 4 простых делителя, G сверхразрешима.

Полное описание неразрешимых групп, все 4-максимальные подгруппы которых нормальны, было получено Берковичем в работе [11].

***Теорема* 1.2** [11, теорема 16]. *Если все 4-максимальные подгруппы неразрешимой группы G нормальны, то G является группой одного из следующих типов:*

(1) *Группа $SL(2,5)$.*

(2) *Γ_3-группа (т. е. для любой собственной разрешимой подгруппы H из G выполнено неравенство $\lambda(H)\leq 3$), причем $\lambda(G)\leq 6$ и выполнены следующие условия:*

(i) *если $\lambda(G)=4$, то $G\simeq PSL(2,5)$;*

(ii) *если $\lambda(G)=5$, то либо $G\simeq PSL(2,11)$, либо $G\simeq PSL(2,13)$;*

(iii) *если $\lambda(G)=6$, то $G\simeq PSL(2,p)$, $\lambda(p-1)=\lambda(p+1)=3$, где p – простое число, не сравнимое с 1 по модулю 5.*

В теореме 1.2 под $\lambda(m)$ понимается сумма показателей канонического разложения числа m. В частности, $\lambda(G)$ – сумма показателей канонического разложения числа $|G|$.

Напомним, что подгруппа H из G называется *строго n-максимальной подгруппой* в G, если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе из G. Понятие строго n-максимальной подгруппы было введено в работе Асаада [12], где отмеченные выше результаты Хупперта [1] и Янко [10] были развиты для строго n-максимальных подгрупп при $n = 2, 3, 4$. Асаад доказал, что группа, все строго 2-максимальные подгруппы которой нормальны, является сверхразрешимой. Полное описание таких групп было получено Луценко и Скибой [13]. Заметим попутно, что исследованию групп со строго n-максимальными подгруппами, посвящена также работа Флавелла [14], в которой была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащей строго 2-максимальную подгруппу, а также описаны группы, в которых эта граница достигается.

Исследованию неразрешимых групп с нормальными пятыми максимальными подгруппами посвящена работа Берковича [15].

2 Группы, все *n*-максимальные подгруппы которых субнормальны

Поскольку понятие субнормальности является обобщением нормальности, то естественной является задача изучения групп, все n-максимальные подгруппы которых субнормальны. В связи с этим следует, прежде всего, отметить не потерявшую свое фундаментальное значение и в настоящее время работу Манна [16], в которой отмеченные выше результаты Хупперта [1] были перенесены не только на субнормальные подгруппы, но и на произвольное n, зависящее только от числа простых делителей порядка группы. В частности, Манном было доказано, что если все n-максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n+1$, то G нильпотентна; если $|\pi(G)| \geq n-1$, то G является φ-дисперсивной для некоторого упорядочения φ множества $\pi(G)$. И, наконец, в случае, когда $|\pi(G)| \geq n$, Манн привел полное описание G.

***Теорема* 2.1** [16, теорема 8]. *Пусть G – разрешимая группа и $|\pi(G)| \geq n$. В том и только в том случае каждая n-максимальная подгруппа из G является субнормальной в G, когда G – группа одного из следующих типов:*

(1) *G – нильпотентная группа.*

(2) *$G = HN$, каждая силовская подгруппа из G является либо циклической, либо нормальной подгруппой в G и выполнены следующие условия*:

(i) *N – нормальная абелева холлова подгруппа в G и все силовские подгруппы из N являются элементарными абелевыми группами*;

(ii) *H является циклической холловой подгруппой в G и $|H|$ является либо степенью простого числа, либо свободным от квадратов числом*;

(iii) $(|N|, |H|) = 1$;

(iv) *если H_p – силовская p-подгруппа из H и N_q – силовская q-подгруппа из N, то H_p индуцирует на N_q неприводимую группу автоморфизмов порядка p или* 1. *В последнем случае $|N_q| = q$.*

Отметим также, что в [16] Манн доказал разрешимость групп, все вторые или все третьи максимальные подгруппы которых субнормальны, а также описал неразрешимые группы с субнормальными 4-максимальными или 5-максимальными подгруппами. Полное описание групп, все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы которых являются субнормальными, получено в отмеченной выше работе Луценко и Скибы [13].

***Теорема* 2.2** [13, лемма 5]. *В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа из G является субнормальной, когда G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

***Теорема* 2.3** [13, теорема 1]. *Пусть p, q, r – различные простые числа, P, Q, R – соответствующие им силовские подгруппы из G. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа из G является субнормальной, когда G либо нильпотентна, либо является группой одного из следующих типов*:

I. *$G = P \rtimes Q$ – группа Шмидта, где либо $P' = 1$, либо $|P'| = p$.*

II. *G – бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов*:

(1) *$G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G, Q – циклическая группа и $P \rtimes \Phi(Q)$ – группа Шмидта*;

(2) *$G = (P \rtimes Q_1) \times C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G, $|C_q| = q$ и PQ_1 – группа Шмидта*;

(3) *$G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G, $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle, |a| = |b| = q$, $P\langle a \rangle$ и $P\langle b \rangle$ – группы Шмидта*;

(4) *$G = P \rtimes Q$, где $|P| = p, p > 2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка* 8;

(5) *$G = (P \rtimes Q_1)C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G, $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1 C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ $(\beta \in \mathbb{N})$, PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1, изоморфной C_q*;

(6) $G = P \rtimes Q$, *где* $\Phi(P)$ *– минимальная нормальная подгруппа в* G, *обе группы* $\Phi(P)Q$ *и* $G/\Phi(P)$ *являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из* Q *совпадает с* $Z(G)$;

(7) G *– подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами*;

(8) $G = (P_1 \times C_p) \rtimes Q$, *где* P_1 *– минимальная нормальная p-подгруппа в* G, $|C_p| = p$, P_1Q *– группа Шмидта, максимальная подгруппа из* Q *содержится в* $Z(G)$ *и* $[C_p, Q] = 1$.

III. *Порядок G имеет в точности три простых делителя* p, q, r *и G является группой одного из следующих видов*:

(i) $G = (P \times R) \rtimes Q$, *где* P *и* R *– минимальные нормальные подгруппы в* G, Q *– циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = P \rtimes (R \times Q)$, *где* $|R| = r$, $|Q| = q$ *и* $P = F(G)$ *– минимальная нормальная подгруппа в G.*

3 Группы, все *n*-максимальные подгруппы которых обобщенно субнормальны

Результаты исследований групп с субнормальными *n*-максимальными подгруппами стимулировали появление ряда работ, касающихся описания групп с обобщенно субнормальными *n*-максимальными подгруппами. В связи с этим в 2005 году на Гомельском алгебраическом семинаре Шеметковым была поставлена задача изучения групп, все *n*-максимальные подгруппы которых являются обобщенно субнормальными.

Отметим, что еще до выхода работы Манна [16] Поляковым [17] были исследованы группы, каждая *n*-максимальная подгруппа которых является квазидостижимой для $n = 1, 2, 3, 4$. Напомним, что подгруппа *H* из *G* называется *квазидостижимой* в *G*, если для всякой силовской *p*-подгруппы *P* из *G* подгруппа $P \cap H$ является силовской *p*-подгруппой в *H*. Легко показать, что каждая субнормальная подгруппа является квазидостижимой. В своей работе Поляков показал, что в случае, когда $n = 2$, группа с квазидостижимыми *n*-максимальными подгруппами либо нильпотентна, либо является группой Миллера – Морено. В случае, когда $n = 3$, Поляков установил разрешимость группы. Более того, если $n = 3$ и порядок группы имеет более трех простых делителей, была доказана нильпотентность группы. Наконец, в случае, когда $n = 4$, была получена полная классификация таких групп. Позже Ведерниковым [18] было получено описание неразрешимых групп с квазидостижимыми 4-максимальными 2*d*-подгруппами.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Напомним, что подгруппа *H* из *G* называется $\mathfrak{F}$*-субнормальной в смысле Кегеля* [19] или K-$\mathfrak{F}$*-субнормальной* [7, с. 236] в *G*, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_n = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку каждая субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной для всякой формации $\mathfrak{F}$, то естественно получить развитие отмеченных выше результатов о субнормальных *n*-максимальных подгруппах для K-$\mathfrak{F}$-субнормальных *n*-максимальных подгрупп. Так, в работе [20] получено расширение результатов Манна [16] до K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

***Теорема* 3.1** [20, теорема A]. *Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы* G *является* K-$\mathfrak{U}$*-субнормальной в* G *и* $|\pi(G)| \ge n + 2$, *то* G *сверхразрешима.*

***Теорема* 3.2** [20, теорема B]. *Пусть G – разрешимая группа и* $|\pi(G)| \ge n + 1$. *В том и только в том случае все n-максимальные подгруппы из G являются* K-$\mathfrak{U}$*-субнормальными в G, когда G является группой одного из следующих типов:*

I. *G – сверхразрешимая группа.*

II. $G = A \rtimes B$, *где* $A = G^{\mathfrak{U}}$ *– сверхразрешимый корадикал G, A и B – холловы подгруппы в G, G дисперсивна по Оре и выполняются следующие условия:*

(1) *подгруппа A либо имеет вид* $N_1 \times \cdots \times N_t$, *где* N_i *– минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся силовской подгруппой в G* $(i = 1, \ldots, t)$, *либо является силовской p-подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p, причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр A совпадают, каждый главный фактор из G ниже* $\Phi(A)$ *является циклическим и* $A/\Phi(A)$ *является нециклическим главным фактором в G*;

(2) *для каждого простого делителя p порядка A любая n-максимальная подгруппа H из G сверхразрешима и индуцирует на силовской p-подгруппе из A группу автоморфизмов, являющуюся расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей* $p - 1$.

***Теорема* 3.3** [20, теорема C]. *Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G является* K-$\mathfrak{U}$*-субнормальной в* G *и* $|\pi(G)| \ge n$, *то* G *является* φ*-дисперсивной для некоторого упорядочения* φ *множества* $\pi(G)$.

В дальнейшем мы используем символы $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{N}^r$ для обозначения классов всех нильпотентных групп и всех разрешимых групп с нильпотентной длиной, не превышающей r $(r \ge 1)$, соответственно.

В основе доказательства теорем 3.1–3.3 лежит общая теория K-$\mathfrak{F}$-субнормальных *n*-максимальных подгрупп, построенная в работе [21], где доказаны следующие теоремы.

***Теорема* 3.4** [21, теорема C]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – такая наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, что каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима и содержит нормальную силовскую p-подгруппу $G_p \neq 1$ для некоторого простого числа p. В том и только в том случае каждая вторая максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, когда либо $G \in \mathfrak{F}$, либо G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой и $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является минимальной нормальной подгруппой в G.*

Отметим, что упомянутые выше результаты Хупперта [1] и Манна [16] для 2-максимальных подгрупп являются следствиями теоремы 3.4.

***Теорема* 3.5** [21, теорема A]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – такая r-кратно насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^{r+1}$ для некоторого $r \geq 0$. Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n+r+1$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

***Теорема* 3.6** [21, теорема B]. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ – такая насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, где F – канонический локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть G – разрешимая группа с $|\pi(G)| \geq n+1$. В том и только в том случае все n-максимальные подгруппы из G являются K-$\mathfrak{F}$-субнормальными в G, когда G – группа одного из следующих типов:*

I. $G \in \mathfrak{F}$.

II. $G = A \rtimes B$, *где $A = G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, A и B – холловы подгруппы в G, G дисперсивна по Оре и выполняются следующие условия:*

(1) *подгруппа A либо имеет вид $N_1 \times \cdots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся силовской подгруппой в G $(i = 1, \ldots, t)$, либо является силовской p-подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p, причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр A совпадают и $A/\Phi(A)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G;*

(2) *для каждого простого делителя p порядка A любая n-максимальная подгруппа H из G принадлежит $\mathfrak{F}$ и индуцирует на силовской p-подгруппе из A группу автоморфизмов, содержащуюся в $F(p)$.*

***Теорема* 3.7** [21, теорема D]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – такая насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G является K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n$, то G φ-дисперсивна для некоторого упорядочения φ множества $\pi(G)$.*

Теоремы 3.1–3.3 позволяют не только развить результаты Манна, но и получить полное описание групп, все 3-максимальные подгруппы которых K-$\mathfrak{U}$-субнормальны [22]–[24]. В частности, для бипримарных групп справедлив следующий результат.

***Теорема* 3.8** [23, теорема 1.2]. *Пусть $|\pi(G)| = 2$, p и q – различные простые делители $|G|$, P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа из G соответственно. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа из G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, когда либо G сверхразрешима, либо выполнены следующие условия:*

(I) *Если G не имеет нормальных силовских подгрупп и $O^p(G) \neq G$, то $G^{\mathfrak{U}} \leq P$, Q – такая циклическая группа, что $[Q^q, G^{\mathfrak{U}}] = 1$ и p делит $q-1$. Более того, в этом случае $G^{\mathfrak{U}}Q$ является максимальной подгруппой в G и Q индуцирует на $G^{\mathfrak{U}}$ неприводимую группу автоморфизмов.*

(II) *Если P является нормальной подгруппой в G, то справедливы следующие утверждения:*

(i) *каждая 2-максимальная подгруппа из Q индуцирует на P абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$. Каждая максимальная подгруппа из Q индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой экспоненты, делящей $p-1$;*

(ii) *если P является минимальной нормальной подгруппой в G и q не делит $p-1$, то Q является циклической группой и $Z(G)$ является подгруппой в Q, причем $|Q : Z(G)| \in \{q, q^2\}$. Более того, если G не является минимальной несверхразрешимой группой, то q^2 делит $p^{q-1}-1$;*

(iii) *если $\Phi(P) \neq 1$, то $G^{\mathfrak{U}} = P$ и $P/\Phi(P)$ – нециклический главный фактор в G. Более того, если G является минимальной несверхразрешимой группой, то $|\Phi(P)| = p$. Если G не является минимальной несверхразрешимой группой, то $\Phi(P)Q$ – минимальная несверхразрешимая группа с абелевым сверхразрешимым корадикалом и, следовательно, $\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в G;*

(iv) *если P не является минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(P) = 1$, то $P = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 – минимальные нормальные подгруппы в G и по крайней мере одна из этих подгрупп не является циклической.*

Еще одним обобщением понятия субнормальной подгруппы является понятие K-$\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы, введенное Васильевым, Васильевой и Тютяновым [25]. Подгруппа H из G называется *K-$\mathbb{P}$-субнормальной* в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_n = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число, $i = 1,...,n$. Описанию групп, заданные 2-максимальные подгруппы которых являются K-$\mathbb{P}$-субнормальными, посвящены работы [26], [27], где получены следующие результаты.

***Теорема* 3.9** [26, 27]. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *G либо сверхразрешима, либо является минимальной несверхразрешимой группой с абелевым сверхразрешимым корадикалом.*

(2) *Каждая 2-максимальная подгруппа из G является K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

(3) *Каждая строго 2-максимальная подгруппа из G является K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

(4) *Если T – такая 2-максимальная подгруппа из G, что T не является перестановочной с некоторой 2-максимальной подгруппой из G, то T является K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

Теорема 3.9 позволяет обобщить отмеченные выше результаты Хупперта [1], Манна [16] и Асаада [12], а также результат Агравала [28] (см. ниже, раздел 4).

Отметим, что одним из новых активно развивающихся направлений современной теории конечных групп, начало которому было положено Скибой в работах [29]–[33], является исследование структуры группы с заданными арифметическими свойствами. Одним из ключевых понятий данного направления является такое обобщение понятия субнормальной подгруппы, как σ-субнормальная подгруппа [29], [30]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \ne j$. Группа G называется *σ-примарной*, если G – σ_i-группа для некоторого $i \in I$. Подгруппа A из G называется *σ-субнормальной* в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = G,$$

что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ σ-примарна для всех $i = 1,...,n$. В работе [34] Скиба установил σ-разрешимость группы, каждая 3-максимальная подгруппа которой σ-субнормальна, обобщив таким образом результат Хупперта [1] (группа называется *σ-разрешимой*, если каждый ее главный фактор σ-примарен [29], [30], [34]).

4 Группы, каждая *n*-максимальная подгруппа которых перестановочна с заданными системами подгрупп

Напомним, что подгруппы A и B из G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Поскольку каждая нормальная подгруппа из G перестановочна со всеми подгруппами из G, то для развития отмеченных выше результатов Хупперта [1] можно рассмотреть группы, *n*-максимальные подгруппы которых перестановочны с некоторыми подгруппами данных групп. Так, например, в одной из работ Княгиной и Монахова [35] были изучены группы, каждая *n*-максимальная подгруппа которых перестановочна с любой подгруппой Шмидта.

***Теорема* 4.1** [35, теорема 1]. *Пусть p – простое число. Если каждая n-максимальная подгруппа p-разрешимой группы G перестановочна с любой p-нильпотентной pd-подгруппой Шмидта из G, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *если $n \in \{1,2,3\}$, то p-нильпотентная длина G не превышает* 1;

(ii) *если $n \ge 4$, то p-нильпотентная длина G не превышает $n-2$.*

***Теорема* 4.2** [35, теорема 2]. *Если каждая n-максимальная подгруппа из G перестановочна с каждой подгруппой Шмидта из G, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *если $n \in \{1,2,3\}$, то G метанильпотентна*;

(ii) *если $n \ge 4$ и G разрешима, то нильпотентная длина G не превышает $n-1$.*

В [35] также было установлено, что в случае, когда каждая *n*-максимальная подгруппа ($n \in \{1,2,3\}$) из G перестановочна с любой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка из G, G разрешима.

Группы с S-квазинормальными n-максимальными подгруппами. Подгруппа H из G называется *квазинормальной* в G, если H перестановочна со всеми подгруппами из G. Группы, все *n*-максимальные подгруппы которых являются квазинормальными, были рассмотрены еще в отмеченной выше работе Манна [16]. Так, в [16] было установлено, что если каждая *n*-максимальная подгруппа разрешимой группы G является квазинормальной в G, то ранг G не превышает $n-1$; более того, при $|\pi(G)| \ge n-k+1$ для некоторого $k \ge 1$, ранг G не превышает k. Ранее в работе Берковича [36] было получено описание групп с квазинормальными 4-максимальными разрешимыми подгруппами.

Одним из обобщений понятия квазинормальной подгруппы является понятие *S*-квазинормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа H из G называется *S-квазинормальной* в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G.

Рассматривая группы, все *n*-максимальные подгруппы которых являются *S*-квазинормальными, Агравал в работе [28] получил следующие результаты, которые, как несложно заметить, обобщают отмеченные во введении и разделах 1 и 2 и результаты Хупперта, Янко и Манна.

***Теорема* 4.3** [28, теорема 2.1]. *Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является S-квазинормальной в G, то G сверхразрешима. Более того, если* $|G|$ *имеет по крайней мере три простых делителя, то G нильпотентна.*

***Теорема* 4.4** [28, теорема 2.2]. *Если каждая 3-максимальная подгруппа из G является S-квазинормальной в G, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *если* $|\pi(G)| \geq 3$, *то* G *сверхразрешима*;

(ii) *коммутант G нильпотентен*;

(iii) *ранг G не превышает двух.*

***Теорема* 4.5** [28, теорема 2.3]. *Если каждая 4-максимальная подгруппа разрешимой группы G является S-квазинормальной в G, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *если* $|\pi(G)| \geq 4$, *то* G *сверхразрешима*;

(ii) *ранг G не превышает трех.*

В дальнейшем в работе Луценко и Скибы [9] было получено полное описание групп, у которых все 3-максимальные подгруппы являются *S*-квазинормальными. Было установлено, что каждая 3-максимальная подгруппа из *G* является *S*-квазинормальной в *G* в том и только в том случае, когда либо *G* нильпотентна, либо

$$|G| = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}, \ \ \alpha+\beta+\gamma \leq 3$$

(p, q, r – различные простые делители порядка *G*), либо G изоморфна группе $SL(2,3)$, либо G является сверхразрешимой группой Шмидта, либо *G* – сверхразрешимая группа Белоногова одного из типов, описанных в теореме 1.1.

Отметим также работы [37], [38], в которых были рассмотрены группы с обобщенно *S*-квазинормальными подгруппами. В [37] В. Го и Скибой были получены критерии сверхразрешимости групп в терминах *s*-вложенных 2-максимальных подгрупп. Подгруппа *H* из G называется *s-вложенной* в *G*, если в *G* найдется такая *S*-квазинормальная подгруппа T, что $T \cap H \leq H_{sG}$ и $HT = H^{sG}$, где H^{sG} – пересечение всех *S*-квазинормальных подгрупп из *G*, содержащих *H*, и H_{sG} – подгруппа из H, порожденная всеми теми подгруппами из *H*, которые являются *S*-квазинормальными в *G*. Доказана следующая

***Теорема* 4.6** [37, теорема F]. *В том и только в том случае G сверхразрешима, когда каждая вторая максимальная подгруппа E из G, индекс которой* $|G:E|$ *не является простым числом, имеет циклическое добавление в* E^{sG} *и является s-вложенной в G.*

В [38] найдены характеризации *p*-нильпотентных групп, вторые максимальные подгруппы которых являются π-квазинормально вложенными (подгруппа *H* из *G* называется π*-квазинормально вложенной* в *G*, если для всякого простого делителя *p* порядка *H* силовская *p*-подгруппа из *H* является также силовской *p*-подгруппой в некоторой *S*-квазинормальной подгруппе из *G*).

Отметим, что еще в работе Пальчика [39] было получено описание группы, все вторые максимальные подгруппы которой перестановочны с ее дисперсивной π-холловой подгруппой, а также установлена π-разрешимость группы, содержащей дисперсивную π-холлову подгруппу, перестановочную со всеми 3-максимальными подгруппами. Более того, в этой же работе Пальчик, рассматривая группы, содержащие дисперсивную π-холлову подгруппу, доказал, что в случае, когда такая подгруппа перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами, группа является либо π-разрешимой, либо изоморфна одной из неразрешимых групп, все 4-максимальные подгруппы которых нормальны (см. теорему 1.2). Исследования Пальчика были продолжены в его совместной с Конторовичем работе [40], где было установлено, что группа, дисперсивная π-холлова подгруппа которой перестановочна со всеми 5-максимальными подгруппами, является либо π-разрешимой, либо изоморфной одной из неразрешимых групп, все 5-максимальные подгруппы которых нормальны (см. работу Берковича [15]).

Группы, все n-максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми максимальными подгруппами. Поляковым в работе [41] была доказана сверхразрешимость групп, все 2-максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми максимальными подгруппами. Кроме того, в этой же работе Поляков доказал разрешимость группы, каждая 3-максимальная подгруппа которой перестановочна со всеми максимальными подгруппами. В связи с этими результатами возникли задачи описания групп, каждая *n*-максимальная подгруппа которых перестановочна со всеми максимальными подгруппами при $n = 2,3.$ Такие задачи были решены в работах В. Го, Легчековой и Скибы [42], [43]. В частности, для ненильпотентных групп, все 3-максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми максимальными подгруппами, получена следующая классификационная теорема.

***Теорема* 4.7** [43, теорема 3.1]. *Пусть* p, q, r – *простые числа. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа ненильпотентной группы G перестановочна со всеми максимальными подгруппами из G, когда либо* $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, $\alpha+\beta+\gamma \leq 3$, *либо G изоморфна* $SL(2,3)$, *либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов*:

(1) $G = P \rtimes M$, *где* $|P| = p$ *и M – такая группа с циклическими силовскими подгруппами, что* $|M| = rq^{\alpha}$, *где* $\alpha > 1$, $q \neq p$, *подгруппа* M_G *является* q*-замкнутой и* $|M : M_G| = q$.

(2) $G = P \rtimes Q$, *где* $|P| = p$, Q *– циклическая q-группа с* $|Q| > q^2$ $(q \neq p)$ *и* $|Q : Q_G| = q^2$.

(3) $G = PQ$, *где* $|P| = p$, Q *– циклическая q-группа с* $|Q| > q^2$ $(q \neq p)$, $|Q : Q_G| = q$ *и все отличные от* Q_G *максимальные подгруппы из* Q *являются циклическими.*

В [43] также было получено описание примитивных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами. Заметим, что в дальнейшем в [44] было получено полное описание ненильпотентных групп, каждая 2-максимальная подгруппа которых перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами. Продолжая исследования работ В. Го, Легчековой и Скибы [42]–[44] и решая таким образом задачи, поставленные Монаховым и Тавгенем [45, вопросы 3.9 и 3.10], В. Го, Луценко и Скиба [46] описали ненильпотентные группы, любые две 2-максимальные или 3-максимальные подгруппы которых перестановочны. Было доказано, что все вторые максимальные подгруппы из *G* перестановочны в том и только в том случае, когда *G* является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Для случая же, когда все третьи максимальные подгруппы перестановочны, было получено 14 видов таких групп.

Берковичем [11] были изучены такие группы *G*, все четвертые максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми своими сопряжениями в *G*. Было установлено, что все такие группы относятся к одному из типов, описанных в теореме 1.2. Кроме того, в этой же работе Берковичем было доказано, что в случае, когда каждая 4-максимальная подгруппа из *G* перестановочна со всеми подгруппами из Ф, где Ф – множество всех силовских подгрупп из *G*, взятых по одной для каждого простого делителя порядка *G*, все 4-максимальные подгруппы из *G* нормальны.

Группы с X-перестановочными n-максимальными подгруппами. Одним из обобщений перестановочности подгрупп из *G* является свойство *X*-перестановочности, где *X* – некоторое непустое подмножество из *G*. Напомним, что подгруппа *H* из *G* называется *X-перестановочной с подгруппой E* из *G*, если найдется такой элемент $x \in X$, что $HE^x = E^x H$. В частности, подгруппа *H* называется *X-перестановочной* в *G*, если *H* является *X*-перестановочной с каждой подгруппой из *G*.

В случае, когда *X* – подгруппа Фиттинга, исследованию групп, все *n*-максимальные подгруппы которых являются *X*-перестановочными с некоторыми системами подгрупп группы, посвящены, в частности, упомянутые выше работы В. Го, Легчековой и Скибы [42], [43]. В [42] была установлена метанильпотентность группы, каждая 2-максимальная подгруппа которой *X*-перестановочна со всеми максимальными подгруппами. В [43] авторами была доказана разрешимость группы, каждая 3-максимальная подгруппа которой *X*-перестановочна со всеми ее максимальными подгруппами.

Заслуживают внимание также работы, в которых авторы получили новые характеризации групп с обобщенно *X*-перестановочными *n*-максимальными подгруппами (см., например, [47]–[50]). В частности, в работах Скибы, В. Го и К.П. Шама [47]–[49] были получены характеризации сверхразрешимых групп в терминах *X*-полуперестановочных, X_m-полуперестановочных, *c*-перестановочных, *Q*-вложенных и условно перестановочных 2-максимальных подгрупп.

Группы, все n-максимальные подгруппы которых* σ*-перестановочны. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Множество $\mathcal{H}$ подгрупп из *G* называется *полным холловым* σ*-множеством* в *G* [51], если каждый член $\neq 1$ из $\mathcal{H}$ является холловой σ_i-подгруппой в *G* для некоторого $\sigma_i \in \sigma$ и $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холлову σ_i-подгруппу из *G* для каждого *I* такого, что $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing$. В работе Скибы [30] было введено следующее обобщение перестановочной подгруппы. Подгруппа *A* из *G* называется σ*-перестановочной* в *G*, если *G* содержит такое полное холлово σ-множество $\mathcal{H}$, что *A* является $\mathcal{H}^G$-перестановочной в *G*, т. е. $AH^x = H^x A$ для всех $x \in G$ и всех $H \in \mathcal{H}$. В случае, когда каждая *n*-максимальная подгруппа разрешимой группы *G* σ-перестановочна, Скибой [34] получен следующий результат.

***Теорема* 4.8** [34, теорема 8.23]. *Пусть каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G* σ*-перестановочна в G. Если в G существует такое полное холлово* σ*-множество* $\mathcal{H}$, *что для всякого члена H из* $\mathcal{H}$ *ранг H не превосходит n* – 1, *то ранг G также не превосходит n* – 1.

Заметим, что теорема 4.8 позволяет обобщить отмеченные выше результаты Хупперта [1], Янко [10], Манна [16] и Агравала [28].

5 Некоторые другие результаты о группах с обобщенно нормальными *n*-максимальными подгруппами

Рассмотрим еще несколько интересных результатов, связанных с исследованиями групп с обобщенно нормальными *n*-максимальными подгруппами.

Подгруппа *H* из *G* называется *модулярной*, если $\langle X, H \cap Z \rangle = \langle X, H \rangle \cap Z$ для всех $X \leq Z \leq G$ и $\langle H, Y \cap Z \rangle = \langle H, Y \rangle \cap Z$ для всех таких подгрупп

Y, Z из G, что $H \leq Z$. Развивая результаты Хупперта [1], Р. Шмидт [52] получил описание групп, каждая n-максимальная подгруппа которых является модулярной для $n = 2, 3, 4$. В частности, в [52] было установлено, что группа, у которой все вторые максимальные подгруппы являются модулярными, сверхразрешима. В случаях же, когда $n = 3$ и $n = 4$, получены следующие классификационные теоремы.

***Теорема* 5.1** [52, теорема 3]. *Если все* 3*-максимальные подгруппы из G являются модулярными, то G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – сверхразрешимая группа.*

(2) $|G| = p^2 q$, *где* p *и* q *– простые числа.*

(3) *G является полупрямым произведением группы кватернионов порядка* 8 *и ее группы автоморфизмов порядка* 3.

***Теорема* 5.2** [52, теорема 4]. *Если все* 4*-максимальные подгруппы из G являются модулярными, то справедливы следующие утверждения:*

(i) *Если G – простая неабелева группа, то* $G \simeq PSL(2, p)$, *где либо* $p = 5$, *либо* p *– такое простое число, что* $p-1$ *и* $p+1$ *имеют не более трех простых делителей и* p *сравнимо с* ± 3 *или* ± 13 *по модулю 40.*

(ii) *Если G – непростая неразрешимая группа, то* $G \simeq SL(2,5)$.

(iii) *Если G разрешима, то она является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – сверхразрешимая группа*;

(2) $|G|$ *имеет не более четырех простых делителей*;

(3) *G является полупрямым произведением группы кватернионов* Q_8 *порядка 8 и группы A порядка* $3p$, *где* $p \geq 3$ *– простое число и A индуцирует на* Q_8 *группу автоморфизмов порядка* 3;

(4) $G = U \times J$, $|J| = 2$ *и* U *является полупрямым произведением группы кватернионов порядка* 8 *и ее группы автоморфизмов порядка* 3;

(5) *G – группа представлений симметрической группы* S_4, *имеющая только одну инволюцию* ($|G| = 48$ *и G порождается элементами* a, b_i, *для которых* $a^2 = [b_i, a] = 1$ *и* $b_i^2 = (b_1 b_2)^3 = (b_2 b_3)^3 = [b_1, b_3] = a$ $(i = 1, 2, 3)$).

В дальнейшем в работе Харламовой и Решко [53] для произвольного натурального числа *n* было установлено, что *p*-длина группы, все *n*-максимальные подгруппы которой являются либо модулярными, либо *p*-субнормальными, не превышает *n* (подгруппа *H* из *G* называется *p-субнормальной* в *G*, если для каждой силовской *p*-подгруппы G_p из *G* пересечение $H \cap G_p$ является силовской *p*-подгруппой в *H*).

Исследованию групп с обобщенно нормальными *n*-максимальными подгруппами посвящены также работы Уначева [54], [55], Ш. Ли [56] и Даниэлло [57]. Введя понятие независимой подгруппы, Уначев в работах [54], [55] исследовал группы с независимыми максимальными и 2-максимальными подгруппами, а также привел описание неразрешимых групп, все 3-максимальные или 4-максимальные подгруппы которых независимы (подгруппа *H* из *G* называется *независимой*, если $N_G(T) \leq N_G(H)$ для всякой неединичной подгруппы *T* из *H*). Ш. Ли [56] была получена классификация ненильпотентных групп *G*, все 2-максимальные подгруппы *E* которых являются *TI*-*подгруппами* (для всех элементов $g \in G$ выполнено $E \cap E^x = 1$ или $E \cap E^x = E$). Одним из результатов работы [56] является следующая

***Теорема* 5.3** [56, теорема 2]. *В том и только в том случае каждая* 2*-максимальная подгруппа ненильпотентной группы G является TI-подгруппой, когда G – группа одного из следующих типов*:

(1) $G = PQ$ *– группа Миллера – Морено, где* $P = \langle x \rangle$ *– силовская p-подгруппа из G, Q – нормальная силовская q-подгруппа из G, p и q – различные простые числа.*

(2) *G – неабелева группа порядка* pq^2 *или* pqr, *где* p, q *и* r *– различные простые числа.*

(3) $G = PH$ *– группа Фробениуса с ядром P, являющимся элементарной абелевой группой, и дополнением H. Каждая максимальная подгруппа из H действует неприводимо на P, и H является либо циклической группой, либо прямым произведением циклической группы нечетного порядка и группы кватернионов* Q_8 *порядка* 8.

(4) *G изоморфна симметрической группе* S_4 *степени* 4.

(5) $G = PSL(2,5)$.

Даниэлло в работе [57] были исследованы группы с дуально пронормальными *n*-максимальными подгруппами. Подгруппа *H* из *G* называется *дуально пронормальной*, если $F(\langle H, H^x \rangle) \leq H$ для всех $x \in G$. В [57] установлено, что группа с дуально пронормальными 2-максимальными подгруппами является либо нильпотентной, либо сверхразрешимой группой Шмидта, причем все вторые максимальные подгруппы такой группы нормальны. В случае, когда 3-максимальные подгруппы группы являются дуально пронормальными, в [57] была доказана нормальность всех таких подгрупп. Более того, для сверхразрешимых групп с дуально пронормальными 3-максимальными подгруппами была получена полная классификация. Отметим, наконец, что в случае, когда группа является метанильпотентной, Даниэлло показал, что каждая ее

n-максимальная подгруппа является дуально пронормальной в том и только в том случае, когда она является нормальной.

Пусть H/K – фактор группы G и E – подгруппа из G. Напомним, что E *покрывает* H/K, если $EH = EK$; E *изолирует* H/K, если $E \cap H = E \cap K$. В связи с тем, что любая нормальная подгруппа из G изолирует каждый главный фактор из G, непосредственное отношение к исследованиям групп с обобщенно нормальными n-максимальными подгруппами имеет работа Баллестера-Болинше, Эскуэрро и Скибы [58]. В [58] была получена полная классификация таких групп G, в которых все вторые максимальные подгруппы силовских p-подгрупп (для фиксированного простого делителя p порядка G) покрывают либо изолируют все главные факторы из G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert*, *B*. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

2. *Deskins*, *W.E*. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Sympos. Pure Math. – 1959. – Vol. 1. – P. 100–104.

3. *Deskins*, *W.E*. A note on the index complex of maximal subgroups / W.E. Deskins // Arch. Math. – 1990. – Vol. 54. – P. 236–240.

4. *Janko*, *Z*. Finite groups with a nilpotent maximal subgroup / Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1964. – Vol. 4. – P. 449–451.

5. *Шмидт*, *О.Ю*. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

6. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

7. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

8. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

9. *Луценко*, *Ю.В*. Строение конечных групп с S-квазинормальными третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Укр. матем. ж. – 2009. – Т. 61, № 12. – С. 1630–1639.

10. *Janko*, *Z*. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.

11. *Беркович*, *Я.Г*. О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы / Я.Г. Беркович // Изв. АН СССР. – 1964. – Т. 156, № 6. – С. 1255–1257.

12. *Asaad*, *M*. Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal / M. Asaad // Acta Math. Hung. – 1989. – Vol. 54, № 1–2. – P. 9–27.

13. Луценко, Ю.В. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 680–688.

14. *Flavell*, *P*. Overgroups of second maximal subgroups / P. Flavell // Arch. Math. – 1995. – Vol. 64. – P. 277–282.

15. *Беркович*, *Я.Г*. Подгрупповая характеризация некоторых конечных групп / Я.Г. Беркович // Докл. АН БССР. – 1996. – Т. 169, № 3. – С. 499–502.

16. *Mann*, *A*. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

17. *Поляков*, *Л.Я*. Максимальные и нормальные ряды конечных групп / Л.Я. Поляков // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 2. – С. 294–297.

18. *Ведерников*, *В.А*. О конечных группах с перестановочными подгруппами / В.А. Ведерников // Докл. АН БССР. – 1967. – Т. 2, № 12. – С. 1057–1059.

19. *Kegel*, *O.H*. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

20. *Ковалева*, *В.А*. Конечные разрешимые группы, у которых все n-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Сибир. матем. ж. – 2013. – Т. 54, № 1. – Р. 86–97.

21. *Kovaleva*, *V.A*. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17. – P. 273–290.

22. *Ковалева*, *В.А*. Finite groups with all n-maximal $(n = 2,3)$ subgroups K-$\mathfrak{U}$-subnormal / В.А. Ковалева, С. Йи // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 59–64.

23. *Kovaleva*, *V.A*. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal / V.A. Kovaleva, X. Yi // Acta Math. Hung. – 2015. – Vol. 146, №1. – P. 47–55.

24. *Ковалева*, *В.А*. Конечные группы с заданными системами K-U-субнормальных подгрупп // Укр. матем. ж. – 2016. – Т. 68, № 1. – С. 52–63.

25. *Васильев*, *А.Ф*. О K-$\mathbb{P}$-субнормальных погруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

26. *Kovaleva*, *V.A*. Finite groups with all 2-maximal subgroups K-$\mathbb{P}$-subnormal / V.A. Kovaleva // Math. Sci. Res. J. – 2013. – Vol. 17, № 6. – P. 150–155.

27. *Kovaleva*, *V.A*. Finite groups with generalized $\mathbb{P}$-subnormal second maximal subgroups / V.A. Kovaleva // Asian-European J. Math. – 2014. – Vol. 7, № 3. – P. 1450047-1-1450047-8.

28. *Agrawal*, *R.K*. The influence on a finite group of its permutable subgroups / R.K. Agrawal // Canad. Math. Bull. – 1974. – Vol. 17, № 2. – P. 159–165.

29. *Skiba*, *A.N*. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

30. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

31. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

32. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.

33. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.

34. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Comm. in Math. and Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

35. *Княгина*, *В.Н.* О перестановочности *n*-максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 3. – P. 125–130.

36. *Беркович*, *Я.Г.* О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы II / Я.Г. Беркович // Изв. АН СССР. – 1965. – Т. 29. – С. 527–552.

37. *Guo*, *W.* Finite groups with given *s*-embedded and *n*-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.

38. Li, Y. On *p*-nilpotency of finite groups with some subgroups π-quasinormally embedded / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // Acta Math. Hung. – 2005. – Vol. 108, № 4. – P. 283–298.

39. *Пальчик*, *Э.М.* О группах, все *i*-максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. I / Э.М. Пальчик // Изв. АН БССР. – 1968. – № 1. – С. 45–48.

40. *Пальчик*, *Э.М.* О группах, все *i*-максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой. II / Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович // Изв. АН БССР. – 1969. – № 3. – С. 51–57.

41. *Поляков*, *Л.Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75–88.

42. *Легчекова*, *Е.В.* Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 1012–1017.

43. *Го*, *В.* Конечные группы, в которых каждая третья максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами / В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2009. – Т.86, № 3. – С. 350–359.

44. *Guo*, *W.* The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Comm. in Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 2446–2456.

45. *Skiba*, *A.N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2006. – Т. 36, № 3. – С. 12–31.

46. *Го*, *В.* О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны / В. Го, Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Сибир. матем. ж. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1255–1268.

47. *Guo*, *W.* Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull. Math. – 2004. – Vol. 29, № 2. – P. 240–254.

48. *Guo*, *W.* *X*-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.

49. *Guo*, *W.* Finite groups with some system of X_m-semipermutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Math. Nachr. – 2010. – Vol. 283, № 11. – P. 1603–1612.

50. *Li*, *B.* New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Sci. in China, Serias A: Math. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 827–841.

51. *Guo*, *W.* Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.

52. *Schmidt*, *R.* Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen / R. Schmidt // Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1969. – Vol. 34, № 1–2. – P. 115–125.

53. *Решко*, *К.А.* О *p*-длине произвольной конечной группы / К.А. Решко, В.И. Харламова // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 419–427.

54. *Уначев*, *Х.Я.* Конечные группы, любая *i*-максимальная подгруппа которых независима / Х.Я. Уначев // Сибир. матем. ж. – 1971. – Т. 12, № 4. – С. 926–930.

55. *Уначев*, *Х.Я.* О конечных группах, четвертые максимальные подгруппы которых независимы / Х.Я. Уначев // Алгебра и теория чисел. – Нальчик, 1977. – № 2. – С. 127–138.

56. *Li*, *Sh.* Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups / Sh. Li // Math. Proc. Royal Irish Academy. – 2000. – Vol. 100A, № 1. – P. 65–71.

57. *D'Aniello*, *A.* Groups in which *n*-maximal subgroups are dualpronormal / D'Aniello Alma // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1990. – Vol. 84. – P. 83–90.

58. *Ballester-Bolinches*, *A.* On second maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.N. Skiba // J. Pure and Appl. Algebra. – 2011. – Vol. 215, № 4. – P. 705–714.

Поступила в редакцию 31.05.16.