Проблемы физики, математики и техники, № 4 (29), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОТДЕЛИМЫХ РЕШЕТКАХ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

ON SEPARATED LATTICES OF SATURATED FORMATIONS

N.N. Vorob'ev, A.R. Kuznetsova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Найдены новые серии отделимых решеток насыщенных формаций.

Ключевые слова: *формация, полная решетка формаций, решетка насыщенных формаций,* $\mathfrak{X}$ *-отделимая решетка насыщенных формаций.*

A new series of separated lattices of saturated formations was found.

Keywords: *formation, complete lattice of formations, lattice of saturated formations,* $\mathfrak{X}$ *-separated lattice of saturated formations.*

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Будем рассматривать терминологию из [1]–[4]. Символом $F_p(G)$ обозначают наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G, а символом $O_p(G)$ – наибольшую нормальную p-подгруппу группы G. Через $\pi(G)$ обозначают множество всех простых делителей порядка группы G.

Напомним, что *формацией* называется класс групп, который замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В теории формаций особую роль играют так называемые насыщенные формации. Пусть f – произвольная функция вида

$$f\colon \mathbb{P} \to \{\text{формации групп}\}. \qquad (0.1)$$

Следуя [1], сопоставим функции f класс групп

$$LF(f) = (G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой функции f вида (0.1), то $\mathfrak{F}$ называют *насыщенной формацией* с локальным спутником f [1].

Совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций* [3], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ, и во множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Заметим, что относительно включения $\subseteq$ множество всех насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$ образуют полную решетку (обозначаемую $\mathfrak{F}/_l\, \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$), где $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп.

В 1997 году А.Н. Скибой [3] начали изучаться отделимые решетки формаций. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Согласно [3], полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$*-отделимой*, если для любого терма $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\bigcap, \vee_\Theta\}$, любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы

$$A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$$

найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \xi(\Theta\mathrm{form} A_1, \ldots, \Theta\mathrm{form} A_m).$$

Здесь $\vee_\Theta$ – оператор объединения в решетке Θ.

Свойство отделимости является одним из основных инструментов при изучении решеток классов конечных групп (см. [3], [4]). В монографии [3] доказано, что решетка всех функторно замкнутых n-кратно насыщенных формаций $\mathfrak{G}$-отделима, а решетка всех функторно замкнутых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{S}$-отделима. Впоследствии в работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева [6] была доказана $\mathfrak{G}$-отделимость решетки функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, а в работе Н.Н. Воробьева, А.Н. Скибы и А.А. Царева [7] была установлена $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех ω-композиционных формаций. Отметим, что в работах [5]–[7] свойство отделимости применяется при исследовании тождеств решеток частично насыщенных и частично композиционных формаций.

Целью данной работы является доказательство $\mathfrak{G}$-отделимости решетки $\mathfrak{F}/_l\, \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Основным результатом данной работы является следующая

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация. Тогда решетка* $\mathfrak{F}/_l\, \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ $\mathfrak{G}$*-отделима.*

1 Предварительные сведения

Напомним некоторые известные утверждения и определения, которые потребуются для доказательства основного результата.

Символом $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех формаций из Θ, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.1** [3, лемма 1.2.22]. *Для любой совокупности групп* $\mathfrak{X}$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{X}).$$

***Лемма* 1.2** [8, лемма 2]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = LF(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = LF(f)$, *где* $f = \bigcap_{i\in I} f_i$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех локальных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.2 $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ – локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным*. Следующая лемма дает способ построения минимального локального спутника формации $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}\mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.3** [3, теорема 1.1.5]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}\mathfrak{X}$ *и* f *– минимальный локальный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \mathrm{form}(G / F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$;

3) *если* $\mathfrak{F} = LF(h)$, *то для любого* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *имеет место*

$$f(p) = \mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(A) = 1).$$

***Лемма* 1.4** [3, лемма 4.1.2]. *Пусть* f_i *– минимальный локальный спутник насыщенной формации* $\mathfrak{F}_i$, *где* $i \in I$. *Тогда* $\vee(f_i \mid i \in I)$ *– минимальный локальный спутник формации*

$$\mathfrak{F} = \vee_l(\mathfrak{F}_i \mid i \in I).$$

Напомним, что *полуформацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов.

***Лемма* 1.5** [3, лемма 1.2.21]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– полуформация*, *порожденная* $\mathfrak{X}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}\,\mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.6** [3, лемма 4.1.5]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– полуформация и* $A \in \mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда если* $O_p(A) = 1$, *то* $A \in \mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, *где* $\mathfrak{M}_1 = (G / O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$.

***Лемма* 1.7** [3, лемма 1.3.6]. *Если* $\mathfrak{F} = LF(f)$ *и* $G / O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ *для некоторого* $p \in \pi(G)$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

2 Доказательство теоремы

Доказательство. Пусть $\xi(x_1,\dots,x_m)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_l\}$, $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m$ – произвольные формации из $\mathfrak{F} /_l\, \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $A \in \xi(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m)$. Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee_l\}$ в терм ξ покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1,\dots,m)$, что

$$A \in \xi(\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_m),$$

где $\mathfrak{M}_i = \mathrm{form}A_i$. При $r = 0$, очевидно, $A \in \mathrm{form}A$. Докажем, что данное утверждение верно при $r = 1$.

Если $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $A \in \mathrm{form}A \cap \mathrm{form}A$. Пусть $A \in \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Тогда по лемме 1.1 $\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Следовательно, $A \cong H / N$, где $H \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Значит, группа H имеет нормальные подгруппы $N_1,\dots,N_t$ $(t \ge 2)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{t} N_i = 1 \text{ и } H / N_i \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2,\ i = 1,\dots,t.$$

Заметим, что $H^{\mathfrak{F}_1} \cap H^{\mathfrak{F}_2} = 1$. Значит,

$$H \in \mathrm{R}_0(H / H^{\mathfrak{F}_1}, H / H^{\mathfrak{F}_2}).$$

Отсюда применяя лемму 1.1, получаем

$$A \cong H / N \in \mathrm{QR}_0(H / H^{\mathfrak{F}_1}, H / H^{\mathfrak{F}_2}) =$$
$$= \mathrm{form}(H / H^{\mathfrak{F}_1}, H / H^{\mathfrak{F}_2}) =$$
$$= \mathrm{form}(H / H^{\mathfrak{F}_1}) \vee \mathrm{form}(H / H^{\mathfrak{F}_2}) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2.$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{F}_2$ и $\{p_1,\dots,p_t\} = \pi(A)$. Тогда в виду леммы 1.3 и леммы 1.4

$$A / F_{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee f_2(p_i),$$

где f_j – минимальный локальный спутник формации $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. По доказанному выше найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$ и $A_{i_2} \in f_2(p_i)$, что

$$A / F_{p_i}(A) \in (\mathrm{form}A_{i_1}) \vee (\mathrm{form}A_{i_2}).$$

Заметим, что

$$(\mathrm{form}A_{i_1}) \vee (\mathrm{form}A_{i_2}) = \mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}).$$

Пусть $\mathfrak{M}_1$ – полуформация, порожденная группой A_{i_1}, $\mathfrak{M}_2$ – полуформация, порожденная группой A_{i_2}. Тогда по лемме 1.5 $\mathfrak{M}_1 = (A_1,\dots,A_t)$ и $\mathfrak{M}_2 = (B_1,\dots,B_r)$, для некоторых $A_1,\dots,A_t \in \mathrm{Q}(A_{i_1})$ и $B_1,\dots,B_r \in \mathrm{Q}(A_{i_2})$. Понятно, что $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ – полуформация и

$$A / F_{p_i}(A) \in \mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}) =$$
$$= \mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) = \mathrm{form}(A_1,\dots,A_t;\ B_1,\dots,B_r).$$

Значит, ввиду леммы 1.6 можем считать, что

$$O_{p_i}(A_k) = 1 = O_{p_i}(B_l)$$

для всех $k = 1,\dots,t$ и $l = 1,\dots,r$. Пусть

$$D_{i_1} = A_1 \times \dots \times A_t \text{ и } D_{i_2} = B_1 \times \dots \times B_r.$$

Тогда $O_{p_i}(D_{i_1}) = 1 = O_{p_i}(D_{i_2})$.

Кроме того, понятно, что

$$A / F_{p_i}(A) \in \mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) =$$
$$= \mathrm{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq \mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}).$$

Пусть Z_{p_i} – группа порядка p_i, $B_{i_1} = Z_{p_i} wrD_{i_1}$, $B_{i_2} = Z_{p_i} wrD_{i_2}$. Ввиду леммы 1.7 $B_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$, $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$. Значит,

$$A_1 = B_{1_1} \times B_{2_1} \times \ldots \times B_{t_1} \in \mathfrak{F}_1,$$

$$A_2 = B_{1_2} \times B_{2_2} \times \ldots \times B_{t_2} \in \mathfrak{F}_2.$$

Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = (l\text{form}A_1) \vee_l (l\text{form}A_2).$$

Для этого достаточно установить, что $A / F_{p_i}(A) \in f(p_i)$, где f – минимальный локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Понятно, что $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Значит, $B_{i_1} / F_{p_i}(B_{i_1}) \in f(p_i)$. Но поскольку $O_{p_i}(D_{i_1}) = 1$, то $B_{i_1} / F_{p_i}(B_{i_1}) \cong D_{i_1}$, т. е. $D_{i_1} \in f(p_i)$. Аналогично убеждаемся, что $D_{i_2} \in f(p_i)$. Следовательно,

$$A / F_{p_i}(A) \in \text{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq f(p_i).$$

Этим самым доказано утверждение теоремы при $r = 1$.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\bigcap, \vee_l\}$ и для термов с меньшим числом вхождений теорема верна. Пусть ξ имеет вид

$$\xi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \Delta \xi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\bigcap, \vee_l\}$, и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \bigcup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ формацию $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через $\mathfrak{H}_2$ – формацию $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда, по доказанному выше, найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$A \in (l\text{form}A_1) \Delta (l\text{form}A_2).$$

Поскольку число операций в терме ξ_1 меньше r, то по индукции найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, B_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$, что

$$A_1 \in \xi_1(l\text{form}B_1, \ldots, l\text{form}B_a).$$

Аналогично, найдутся такие группы $C_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, C_b \in \mathfrak{F}_{j_b}$, что

$$A_2 \in \xi_2(l\text{form}C_1, \ldots, l\text{form}C_b).$$

Пусть $x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a} \in \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\}$ и, вместе с тем,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \bigcap \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \varnothing.$$

Пусть

$$D_{i_k} = \begin{cases} B_k, & \text{если } k < t+1, \\ B_k \times C_q, & \text{где } x_{i_k} = x_{j_q} \text{ для некоторого} \\ & q \in \{1, \ldots, b\} \text{ при } k \geq t+1. \end{cases}$$

Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a}\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_p$ формацию $l\text{form}D_{i_p}$, где $p = 1, \ldots, a$; через $\mathfrak{X}_c$ – формацию $l\text{form}D_{j_c}$, где $c = 1, \ldots, b$.

Итак,

$$A_1 \in \xi_1(l\text{form}B_1, \ldots, l\text{form}B_a) \subseteq$$

$$\subseteq \xi_1(l\text{form}D_{i_1}, \ldots, l\text{form}D_{i_a}) = \xi_1(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_a),$$

$$A_2 \in \xi_2(l\text{form}C_1, \ldots, l\text{form}C_b) \subseteq$$

$$\subseteq \xi_2(l\text{form}D_{j_1}, \ldots, l\text{form}D_{j_b}) = \xi_2(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_b).$$

Значит, найдутся такие формации $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_m$, что

$$A \in \xi_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_a}) \Delta \xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}) = \xi(\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_m),$$

где $\mathfrak{H}_i = l\text{form}K_i$, где $K_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, решетка $\mathfrak{F} /_l \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{N}$ $\mathfrak{G}$-отделима. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

2. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

3. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

4. *Воробьев*, *Н.Н.* Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.

5. *Го*, *Вэньбинь*. Два замечания о тождествах решеток ω-локальных и ω-композиционных формаций конечных групп / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 5 (480). – С. 14–22.

6. *Shemetkov*, *L.A.* On laws of lattices of partially saturated formations / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Asian-European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 155–169.

7. *Воробьев*, *Н.Н.* Тождества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирский матем. журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024.

8. *Скиба*, *А.Н.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

Поступила в редакцию 25.07.16.