Проблемы физики, математики и техники, № 3 (28), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КОНЕЧНЫХ σ-НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Д.А. Синица[1], **В.Н. Рыжик**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Брянский государственный аграрный университет*, *Кокино*

ON ONE GENERALIZATION OF FINITE σ-NILPOTENT GROUPS

D.A. Sinitsa[1], **V.N. Rizhik**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Bryansk State Agrarian University*, *Kokino*

Пусть G – конечная группа. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ и n – целое число. Положим $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Множество $1 \in \mathcal{H}$ подгрупп из G называется полным холловским σ-множеством в G, если каждый член в $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ является холловской σ_i-подгруппой в G для некоторого σ_i и $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холловскую σ_i-подгруппу из G для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если G обладает полным холловским σ-множеством, то G называется σ-полной. Подгруппа A из G называется: (i) σ-холловской подгруппой G, если $\sigma(A) \cap \sigma(|G:A|) = \varnothing$; (ii) H_σ-нормально вложенной в G, если A является σ-холловской подгруппой некоторой нормальной подгруппы из G. В данной работе изучаются σ-полные группы G, каждая подгруппа которых является H_σ-нормально вложенной в G.

Ключевые слова: *конечная группа*, σ*-холловская подгруппа*, H_σ*-нормально вложенная подгруппа*, $H\sigma E$*-группа.*

Let G be a finite group. Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be a partition of the set of all primes $\mathbb{P}$ and n an integer. Let $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is said to be a complete Hall σ-set of G if every member of $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ is a Hall σ_i-subgroup of G for some σ_i and $\mathcal{H}$ contains exact one Hall σ_i-subgroup of G for every $\sigma_i \in \sigma(G)$. If G possesses a complete Hall σ-set, then it is said to be σ-full. A subgroup A of G is called: (i) a σ-Hall subgroup of G if $\sigma(A) \cap \sigma(|G:A|) = \varnothing$; (ii) H_σ-normally embedded in G if A is a σ-Hall subgroup of some normal subgroup of G. In this paper, we study σ-full groups G whose all subgroups are H_σ-normally embedded in G.

Keywords: *finite group*, σ*-Hall subgroup*, H_σ*-normally embedded subgroup*, $H\sigma E$*-group.*

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными, символ G обозначает конечную группу. Кроме того, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – целое число, символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок G.

В дальнейшем, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; Π – непустое подмножество из σ, $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$.

Пусть

$$\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\} \text{ и } \sigma(G) = \sigma(|G|).$$

Тогда G называется σ*-примарной* [1], [2], если G – σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \sigma$.

Множество $1 \in \mathcal{H}$ подгрупп из G называется *полным холловским* σ*-множеством* в G [3], если каждый член в $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ является холловской σ_i-подгруппой в G для некоторого σ_i и $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холловскую σ_i-подгруппу из G для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если G обладает полным холловским σ-множеством, то G называется σ*-полной*. В дальнейшем мы полагаем, что G является σ-полной группой.

Подгруппа A из G называется [1], [2]:

(i) σ*-холловской* подгруппой G, если

$$\sigma(A) \cap \sigma(|G:A|) = \varnothing;$$

(ii) σ*-субнормальной* в G, если существует такая цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$, что либо A_{i-1} является нормальной в A_i, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной для всех $i = 1, \ldots, t$.

В данной работе нами исследуется следующее понятие.

***Определение* 0.1.** Подгруппа A из G называется H_σ*-нормально вложенной* в G, если A

является σ-холловской подгруппой некоторой нормальной подгруппы из G.

Заметим, что в случае, когда $\sigma = \{\{2\},\{3\},...\}$, понятие H_σ-нормально вложенной подгруппы эквивалентно понятию холловски нормально вложенной подгруппы в [4].

***Пример* 0.2.** Заметим, что для любого σ все σ-холловские подгруппы и все нормальные подгруппы некоторой группы S являются H_σ-нормально вложенными в S. Пусть теперь P – простой $\mathbb{F}_{11}(C_7 \rtimes C_3)$-модуль, который является точным для $C_7 \rtimes C_3$. Пусть $G = (P \rtimes (C_7 \rtimes C_3)) \times A_5$. Пусть $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, где $\sigma_1 = \{5,7,11\}$ и $\sigma_2 = \{5,7,11\}'$. Тогда подгруппа $M = (P \rtimes C_7) \times A_5$ нормальна в G и подгруппа B порядка 12 из A_5 является σ-холловской подгруппой в M, следовательно, B является H_σ-нормально вложенной в G. Если же $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, где $\sigma_1 = \{7\}$ и $\sigma_2 = \{7\}'$, то B не является H_σ-нормально вложенной в G.

Напомним, что G *σ-нильпотентна* [5], если $G = H_1 \times \cdots \times H_t$, где $\{1, H_1, ..., H_t\}$ – полное холловское σ-множество в G. Символ $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначает класс всех σ-нильпотентных групп; $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает *σ-нильпотентный* корадикал G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N из G с σ-нильпотентным фактором G/N; $G^{\mathfrak{N}}$ обозначает нильпотентный корадикал G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппа H из G называется $\mathfrak{F}$-проектором G [6, VI, определение 7.8], если $H \in \mathfrak{F}$ и для каждой подгруппы E из G такой, что $H \le E$ и $E/N \in \mathfrak{F}$, следует, что $E = NH$. Подгруппа H из G называется *σ-картеровой подгруппой* G, если H – $\mathfrak{N}_\sigma$-проектор G.

Говорят, что G имеет *силовскую башню*, если G имеет нормальный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < G_t = G,$$

где $|G_i / G_{i-1}|$ – порядок некоторой силовской подгруппы из G для каждого $i \in \{1,...,t\}$. Главный фактор H/K из G называется *σ-центральным* (в G) [1], если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарной группой; в противном случае, H/K называется *σ-эксцентральным* (в G).

Группа G называется *$H\sigma E$-группой*, если $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ-холловская подгруппа в G, причем $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$, D имеет силовскую башню и каждый главный фактор из G ниже D является σ-эксцентральным, M является σ-картеровой подгруппой в G и M действует неприводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе из D.

В данной работе нами доказывается следующий результат.

***Теорема* 0.3.** *Следующие условия эквиваленты*:

(i) *Каждая подгруппа из G является H_σ-нормально вложенной в G.*

(ii) $G = G^{\mathfrak{N}_\sigma} M$ *является $H\sigma E$-группой, где $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – циклическая группа, порядок которой свободен от квадратов, и M – дедекиндова группа.*

(iii) $G = D \rtimes M$, *где D – σ-холловская циклическая подгруппа в G, порядок которой свободен от квадратов, причем $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$, и M – дедекиндова группа.*

***Следствие* 0.4** (Ли, Лиу [7]). *В том и только в том случае каждая подгруппа из G является холловски нормально вложенной в G, когда $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}}$ – циклическая холловская подгруппа из G, порядок которой свободен от квадратов, и M – дедекиндова группа.*

1 Основные леммы

Целое число n называетя Π-*числом*, если $\sigma(n) \subseteq \Pi$. Подгруппа H из G называется *холловской Π-подгруппой* в G [1], если $|H|$ – Π-число и $|G:H|$ – Π'-число. Символ $O_\Pi(G)$ используется для обозначения подгруппы из G, порожденной всеми нормальными Π-подгруппами из G. Группа G называется *σ-разрешимой* [1], [2], если каждый главный фактор из G σ-примарен.

***Лемма* 1.1.** *Пусть H – нормальная подгруппа из G. Если $H / H \cap \Phi(G)$ – Π-группа, то H содержит холловскую Π-подгруппу E и E нормальна в G. Следовательно, если $H / H \cap \Phi(G)$ является σ-нильпотентной группой, то H является σ-нильпотентной группой.*

Доказательство. Пусть $D = O_{\Pi'}(H)$. Тогда, поскольку $H \cap \Phi(G)$ σ-нильпотентна, D является холловской Π'-подгруппой в H. Следовательно, по теореме Шура-Цассенхауза, H имеет холловскую Π-подгруппу, скажем E. Очевидно, что H π'-разрешима, где $\pi' = \cup_{\sigma_i \in \Pi'} \sigma_i$. Значит, любые две холловские Π-подгруппы из H сопряжены. Согласно аргументу Фраттини,

$$G = HN_G(E) = (E(H \cap \Phi(G)))N_G(E) = N_G(E).$$

Следовательно, E нормальна в G. □

***Лемма* 1.2.** *Если каждый главный фактор из G ниже $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ цикличен, то D нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда, ввиду G-изоморфизма $D / D \cap R \simeq DR / R = (G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$, получаем, что каждый главный фактор из G/R ниже DR/R цикличен. Следовательно, ввиду выбора G, $D / D \cap R \simeq DR / R$ нильпотентна. Значит, $R \le D$

и R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Ввиду леммы 1.1, $R \nleq \Phi(G)$, и следовательно, $R = C_R(R)$ по [8, A, теорема 15.2]. Но $|R|$ является простым числом по условию леммы, следовательно, $G/R = G/C_G(R)$ циклична. Поэтому G сверхразрешима, и следовательно, $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ нильпотентна, поскольку $G^{\mathfrak{N}_\sigma} \leq G^{\mathfrak{N}}$. □

Прямые расчеты показывают, что верна следующая лемма.

***Лемма* 1.3.** *Класс всех σ-разрешимых групп замкнут относительно прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Кроме того, любое расширение σ-разрешимой группы с помощью σ-разрешимой группы также является σ-разрешимой группой.*

Пусть A, B и R – подгруппы из G. Тогда A называется *R-перестановочной* с B [9], если для некоторого $x \in R$ мы имеем $AB^x = B^x A$.

Если G содержит такое полное холловское σ-множество $\mathcal{H} = \{1, H_1, \ldots, H_t\}$, что $H_i H_j = H_j H_i$ для всех i, j, то $\{H_1, \ldots, H_t\}$ называется *σ-базисом* в G.

Лемма 1.4 [3, теоремы A и B]. *Пусть G – σ-разрешимая группа. Тогда:*

(i) *G имеет такой σ-базис $\{H_1, \ldots, H_t\}$, что для всякого $i \neq j$ каждая силовская подгруппа из H_i G-перестановочна с каждой силовской подгруппой из H_j.*

(ii) *Для любого Π справедливы следующие утверждения: G имеет холловскую Π-подгруппу E, каждая Π-подгруппа из G содержится в некоторой сопряженной с E подгруппе и E является G-перестановочной с каждой силовской подгруппой из G.*

***Лемма* 1.5.** *Пусть H, E и R – подгруппы из G. Предположим что H является H_σ-нормально вложенной в G и R нормальна в G.*

(1) *Если $H \leq E$, то H является H_σ-нормально вложенной в E.*

(2) *HR/R является H_σ-нормально вложенной в G/R.*

(3) *Если S – нормальная подгруппа в G, то $H \cap S$ является H_σ-нормально вложенной в G.*

(4) *Если $|G:H|$ σ-примарен, то H является либо σ-холловской подгруппой G, либо нормальна в G.*

Доказательство. Пусть V – такая нормальная подгруппа из G, что H является σ-холловской подгруппой в V.

(1) Поскольку H является σ-холловской подгруппой в V и $V \cap E$ нормальна в E, то H является σ-холловской подгруппой в $V \cap E$. Следовательно, H является H_σ-нормально вложенной в E.

(2) Пусть H – π-группа. Поскольку $|V:H|$ – π'-число, то

$$|VR:HR| = |V:H| / |V \cap R : H \cap R|$$

также является π'-числом. Следовательно, HR/R – σ-холловская подгруппа в VR/R и, значит, HR/R является H_σ-субнормально вложенной в G/R.

(3) Очевидно, что $V \cap S$ нормальна в V и в G. Поскольку H является σ-холловской подгруппой в V, $H \cap (V \cap S) = H \cap S$ является σ-холловской подгруппой в $V \cap S$.

(4) Предположим, что H не является нормальной подгруппой в G. Тогда $H < V$. Ввиду условия леммы, $|G:H|$ σ-примарен. Пусть $|G:H|$ – σ_i-число. Тогда $|V:H|$ также является σ_i-числом. Но H – σ-холловская подгруппа в V. Следовательно, H является σ-холловской подгруппой в G. □

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [10, лемма 3.29] или [11, лемма 1.10.10]).

***Лемма* 1.6.** *Пусть H/K – абелев главный фактор из G и V – такая максимальная подгруппа в G, что $K \leq V$ и $HM = G$. Тогда*

$$G/M_G \simeq (H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)).$$

2 Доказательство теоремы 0.3

Доказательство теоремы 0.3. (i)$\Rightarrow$(ii) Предположим, что импликация не верна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$ и $|\sigma(G)| > 1$.

(1) *Условие* (ii) *верно для каждого собственного фактора H/K из G (т. е. такого фактора H/K, что либо $K \neq 1$, либо $H \neq G$)*. Это прямо следует из леммы 1.5 (1) (2) и выбора G.

(2) G *σ-разрешима.*

Ввиду утверждения (1) и леммы 1.3, достаточно показать, что G не проста. Предположим, что это не так. Тогда, поскольку $|\sigma(G)| > 1$, единичная подгруппа является единственной собственной нормальной подгруппой в G. Следовательно, каждая подгруппа из G является σ-холловской подгруппой в G. Значит, если p – наименьший простой делитель $|G|$ и P – силовская p-подгруппа из G, то $|P| = p$, откуда $|G| = p$ по [6, IV, лемма 2.8]. Полученное противоречие показывает, что (2) верно.

(3) *D является циклической группой, порядок которой свободен от квадратов.*

Пусть $p \in \pi(D) \cap \sigma_i$ и пусть P – силовская p-подгруппа из D. Так как G содержит такую нормальную подгруппу E, что $|E| = |G|_{\sigma_i'} p$, то

G/E – σ_i-группа. Следовательно, $D \le E_G \le E$, откуда $|P| = p$. Поэтому G сверхразрешима по [6, IV, лемма 2.8] и, следовательно, каждый главный фактор из G ниже D является циклическим. Следовательно, D нильпотентна по лемме 1.2, и поэтому D является циклической группой, порядок которой свободен от квадратов.

(4) *D является σ-холловской подгруппой в G. Следовательно, D имеет дополнение M в G.*

Предположим, что D не является σ-холловской подгруппой в G. Тогда для некоторого $i \in I$ и для некоторых холловских σ_i-подгрупп U и H_i из D и G, соответственно, следует $1 < U < H_i$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в D. Из утверждения (2) следует, что R – σ_k-группа для некоторого k. Кроме того, $D/R = (G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ-холловская подгруппа в G/R по утверждению (1). Следовательно, UR/R – σ-холловская подгруппа в G/R. Предположим, что $UR/R \ne 1$. Тогда UR/R – холловская σ_i-подгруппа в G/R.

Если $k \ne i$, то, очевидно, U является холловской σ_i-подгруппой в G, что противоречит тому, что $U < H_i$. Если $k = i$, то $R \le U$ и, следовательно, U/R является холловской σ_i-подгруппой в G/R. Следовательно, U является холловской σ_i-подгруппой в G, что противоречит тому, что $U < H_i$. Значит, $UR/R = 1$, и поэтому $U \le R$ и $U = R$. Но, очевидно, $H_i \not\le UR \le D$. Таким образом, $R = U = H_i \cap D$ является холловской σ_i-подгруппой в D.

Покажем теперь, что $R \not\le \Phi(G)$. Действительно, предположим, что $R \le \Phi(G)$. Тогда $D \ne R$ по лемме 1.1, поскольку $D \ne 1$. С другой стороны, D/R является σ_i'-группой, так как $R = U$ является холловской σ_i-подгруппой в D. Следовательно, $O_{\sigma_i'}(D) \ne 1$ по лемме 1.1. Но $O_{\sigma_i'}(D)$ – характеристическая подгруппа в D, следовательно, она нормальна в G. Значит, G содержит такую минимальную нормальную подгруппу L, что $L \ne R$ и $L \le D$. Полученное противоречие показывает, что $R \not\le \Phi(G)$.

Пусть S – такая максимальная подгруппа из G, что $RS = G$. Тогда $|G:S|$ – σ_i-число. Также, очевидно, что S не является σ-холловской подгруппой в G. Следовательно, S нормальна в G по лемме 1.5 (4) и G/S является σ_i-группой. Значит, $R \le D \le S$ и $G = RS = S$. Полученное противоречие завершает доказательство (5).

(5) *M – дедекиндова группа.*

Пусть L – произвольная подгруппа из M. Рассмотрим подгруппу LD. Ввиду условия теоремы, LD является σ-холловской подгруппой некоторой нормальной подгруппы V из G. Тогда, поскольку G/D σ-нильпотентна, LD/D σ-субнормальна в G/D по [1, лемма 2.6 (6)] значит, LD σ-субнормальна в G по [1, лемма 2.6 (5)]. Следовательно, LD σ-субнормальна в V по [1, лемма 2.6 (1)]. Но тогда LD нормальна в V по [1, лемма 2.6 (10)] и, следовательно, является характеристической подгруппой в V. Следовательно, LD является нормальной подгруппой в G. Но тогда $L = M \cap LD$ нормальна в M.

(6) *Каждая собственная подгруппа E из G, содержащая M, не является нормальной в G, и поэтому каждая такая подгруппа является σ-холловской подгруппой в G.*

Предположим, что E является нормальной в G. Поскольку D нильпотентна по (3),

$$G/E = DM/E = DE/E \simeq D/D \cap E$$

является σ-нильпотентной, откуда $D \le E$. Следовательно, $E = M(D \cap E) = MD = G$, противоречие. Пусть теперь B – некоторая подгруппа из G, содержащая M. Ввиду условия теоремы, G содержит такую нормальную подгруппу W, что B является σ-холловской подгруппой в W. Но тогда $W = G$, и следовательно, B является σ-холловской подгруппой в G.

(7) $|\pi(D)| = |\sigma(D)|$. *Следовательно, D разрешима и M действует неприводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе из D.*

Пусть $p \in \sigma_i \in \sigma(D)$. Тогда из леммы 1.4, аргумента Фраттини и утверждений (2) и (5) следует, что для некоторой силовской p-подгруппы P из G имеет место $PM = MP$. Следовательно, MP является σ-холловской подгруппой в G по утверждению (6). Значит, $\sigma_i = \{p\}$, откуда $|\pi(D)| = |\sigma(D)|$. Следовательно, D разрешима, поскольку G σ-разрешима по утверждению (2), и M действует неприводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе из D по утверждению (6).

(8) *M является σ-картеровой подгруппой в G.*

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в D, и E – подгруппа из G, содержащая M. Нам нужно показать, что $E = E^{\mathfrak{N}_\sigma}M$. Из утверждения (1) следует, что RM/R является σ-картеровой подгруппой в G/R, значит,

$$ER/R = (ER/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}(RM/R).$$

Следовательно, $ER = E^{\mathfrak{N}_\sigma}MR$, поскольку $(ER/R)^{\mathfrak{N}_\sigma} = E^{\mathfrak{N}_\sigma}R/R$. Из утверждения (7) следует, что R является p-группой для некоторого простого числа p. Более того, из утверждений (4), (6) и (7) следует, что R, E и $E^{\mathfrak{N}_\sigma}M$ являются σ-холловскими подгруппами в G. Следовательно, если $R \nleq E$, то E и $E^{\mathfrak{N}_\sigma}M$ являются холловскими p'-подгруппами в $ER = E^{\mathfrak{N}_\sigma}MR$, откуда $E = E^{\mathfrak{N}_\sigma}M$. Предположим, наконец, что $R \le E$ и $R \nleq E^{\mathfrak{N}_\sigma}M$. Тогда $R \cap E^{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$. С другой стороны, поскольку $DE / D \simeq E / D \cap E$ σ-нильпотентна, то $E^{\mathfrak{N}_\sigma} \le D$ и, следовательно, $M \cap E^{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$. Следовательно,

$$E^{\mathfrak{N}_\sigma} \cap RM = (E^{\mathfrak{N}_\sigma} \cap R)(E^{\mathfrak{N}_\sigma} \cap M) = 1.$$

Тогда $E / E^{\mathfrak{N}_\sigma} = E^{\mathfrak{N}_\sigma}MR / E^{\mathfrak{N}_\sigma} \simeq MR$ σ-нильпотентна. Значит, $M \le C_G(R)$. Предположим, что $C_G(R) < G$, и пусть $C_G(R) \le W < G$, где G/W – главный фактор из G. Из утверждения (2) следует, что G/W σ-примарна, значит, $D \le W$. Но тогда $G = DM \le W < G$, противоречие. Следовательно, $C_G(R) = G$, т. е. $R \le Z(G)$. Пусть V – дополнение к R в D. Тогда V является холловской нормальной подгруппой в D, поэтому V характеристична в D. Следовательно, V нормальна в G и $G/V \simeq RM$ σ-нильпотентна, откуда $D \le V < D$. Полученное противоречие завершает доказательство (8). □

(9) *D обладает силовской башней.*

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в D. Тогда R является p-группой для некоторого простого числа p по утверждению (7). Кроме того, из аргумента Фраттини следует, что в D существует такая силовская p-подгруппа P, что $M \le N_G(P)$ и $R = P$, поскольку M действует неприводимо на P по утверждению (7). С другой стороны, по утверждению (1), D/R обладает силовской башней. Следовательно, получаем (9).

(10) *Каждый главный фактор из G ниже D является σ-эксцентральным.*

Пусть H/K – главный фактор из G ниже D. Тогда H/K является p-группой для некоторого простого числа p по утверждению (7). Ввиду аргумента Фраттини, существуют силовская p-подгруппа P и p-дополнение E из D такие, что $M \le N_G(P)$ и $M \le N_G(E)$. Тогда $M \le N_G(P \cap K)$ и $M \le N_G(P \cap H)$. Следовательно, $P \cap K = 1$ и $P \cap H = P$ по утверждению (7), и поэтому $H = K \rtimes P$. Пусть $V = EM$. Тогда $K \le V$ и $HV = G$, значит, V является максимальной подгруппой в G. Следовательно,

$$G / V_G \simeq (H/K) \rtimes (G / C_G(H/K))$$

по лемме 1.6. Значит, если H/K σ-централен, то $D \le V_G$, что невозможно, поскольку, очевидно, p не делит $|V|$. Таким образом, получаем (10).

Заключительное противоречие для (i) $\Rightarrow$ (ii). Из утверждений (4), (6)–(10) следует, что G является $H\sigma E$-группой. Следовательно, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Пусть A – некоторая подгруппа из G. Тогда DA нормальна в G, поскольку DA/D нормальна в $G/D \simeq M$. С другой стороны, поскольку $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ и D является σ-холловской подгруппой в G, H является σ-холловской подгруппой в DA. Следовательно, A является H_σ-нормально вложенной в G. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
2. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – DOI :10.1007/s40304-016-0088-z.
3. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
4. *Li*, *S.* On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 3360–3367.
5. *Guo*, *W.* Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.
6. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.
7. *Li*, *S.* On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. – 2013. – Vol. 388. – P. 1–9.
8. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
9. *Guo*, *W.* *X*-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
10. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989.
11. *Guo*, *W.* The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – New York-Dordrecht-Boston-London-Beijing: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

Поступила в редакцию 05.07.16.