Проблемы физики, математики и техники, № 3 (28), 2016
МАТЕМАТИКА
УДК 517.936+531.314.3

ТЕОРЕМА ПУАССОНА ПОСТРОЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

А.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

POISSON THEOREM OF BUILDING AUTONOMOUS INTEGRALS FOR AUTONOMOUS SYSTEMS OF TOTAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.F. Pranevich

Y. Kupala Grodno State University

Рассмотрена автономная система уравнений в полных дифференциалах и соответствующая ей гамильтонова дифференциальная система. Между этими дифференциальными системами установлены аналитические связи существования первых интегралов, наличия частных решений, выполнения условий полной разрешимости. Основываясь на этих связях, для автономной системы уравнений в полных дифференциалах доказана теорема Пуассона о построении стационарных первых интегралов и получены утверждения о наличии дополнительных стационарных первых интегралов.

Ключевые слова: *система уравнений в полных дифференциалах*, *первый интеграл*, *теорема Пуассона.*

The autonomous system of total differential equations and corresponding to it Hamiltonian differential system are considered. The analytical relations (the existence of first integrals and partial solutions, fulfillment of conditions of completely solvability) between these differential systems are established. Using these relations, the Poisson theorem of building autonomous first integrals for autonomous system of total differential equations is proved and statements of the existence of additional autonomous first integrals for this system are obtained.

Keywords: *system of total differential equations*, *first integral*, *Poisson theorem.*

Введение

Среди общих методов интегрирования канонических систем уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(q,p), \ \frac{dp_i}{dt} = -\partial_{q_i} H(q,p), \quad i = 1,\dots,n, \ H \in C^2(D), \ D \subset \mathbb{R}^{2n}, \tag{0.1}$$

особое значение имеет метод Пуассона. Он дает возможность по двум первых интегралам гамильтоновой системы (0.1) находить третий первый интеграл этой системы, а значит, в определенных случаях строить интегральный базис гамильтоновой системы (0.1). Благодаря этому свойству метод Пуассона вошел практически во все монографии и учебники по аналитической механике (см., например, [1, с. 240; 2, с. 184; 3, с. 100]) и сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема Пуассона. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции* $F_1 : D' \to \mathbb{R}$ *и* $F_2 : D' \to \mathbb{R}$ *являются первыми интегралами на области* $D' \subset D$ *гамильтоновой системы* (0.1). *Тогда скобка Пуассона* $[F_1, F_2] : D' \to \mathbb{R}$ *от функций* F_1 *и* F_2 *будет первым интегралом гамильтоновой системы* (0.1).

К.Г. Якоби считал эту теорему наиболее глубоким открытием С.Д. Пуассона и по ее поводу в книге «Лекции по динамике» писал [1, с. 241]: «Это одна из замечательнейших теорем всего интегрального исчисления и, в частном случае, когда положено $H = T - U$, это есть основная теорема аналитической механики. Именно она показывает, что если имеет место теорема живой силы, то из двух интегралов дифференциальных уравнений движения простым дифференцированием вообще можно вывести третий интеграл, отсюда четвертый и т. д., так что либо получатся все интегралы, либо по крайней мере некоторое число их».

Вопрос о применении теоремы Пуассона к интегрированию нормальных обыкновенных автономных дифференциальных систем n-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), \ i = 1,\dots,n, \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

изучался в работах А. Буля [4], П. Аппеля [5] и М.Ф. Шульгина [6]. Так, например, основной результат А. Буля для дифференциальной системы (0.2) выражает [4]

Теорема Буля. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция* $F_1 : \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$ *является первым интегралом на области* $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ *системы* (0.2) *и существуют скалярные функции* $f_i : \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$, *такие, что имеет место система тождеств*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x)\partial_{x_i} f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\partial_{x_i} X_j(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}', \ j = 1,\dots,n.$$

Тогда система (0.2) *имеет дополнительный автономный первый интеграл*

$$F_2 : x \to \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\partial_{x_i} F_1(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

При этом А. Буль показал, что из этой теоремы для случая гамильтоновой системы (0.1) следует теорема Пуассона. А с другой стороны, в работе [5] П. Аппель установил, что теорема Буля может быть получена и из классической теоремы Пуассона.

В.В. Добронравов применил метод неголономных координат к аналитической динамике для голономных систем и создал, в частности, теорию Пуассона в неголономных координатах [7]. Для уравнений в переменных Пуанкаре аналогичная теория была создана Н.Г. Четаевым [8; 9]. На случаи голономных механических систем с избыточными координатами и неголономных механических систем обобщения теоремы Пуассона получены М.Ф. Шульгиным [6].

В данной работе теория Пуассона построения стационарных первых интегралов гамильтоновых дифференциальных систем распространена на автономные системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(x)dt_j, \ i = 1,\dots,n, \qquad (0.3)$$

где скалярные функции

$$X_{ij} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \ i = 1,\dots,n, \ j = 1,\dots,m,$$

непрерывно дифференцируемы на области $\mathcal{X}$ из фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Для дифференциальной системы (0.3), используя метод Лиувилля [10, с. 429–430], построим расширенную гамильтонову систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \partial_{y_i} H_j(x,y)dt_j, \ i = 1,\dots,n, \qquad (0.4)$$

$$dy_i = -\sum_{j=1}^{m} \partial_{x_i} H_j(x,y)dt_j, \ i = 1,\dots,n, \qquad (0.5)$$

с гамильтонианами

$$H_j : (x,y) \to \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x)y_i \quad \forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \ j = 1,\dots,m. \qquad (0.6)$$

Гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах (0.4), (0.5) составлена таким образом, что первые *n* дифференциальных уравнений (0.4) образуют систему в полных дифференциалах (0.3), а вторые n дифференциальных уравнений (0.5) составляют вспомогательную систему для определения избыточных переменных $y_1,\dots,y_n$. В развернутом виде вспомогательная дифференциальная система (0.5) есть линейная система уравнений в полных дифференциалах

$$dy_i = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i} X_{kj}(x)y_k dt_j, \ i = 1,\dots,n. \qquad (0.7)$$

Система (0.3) и расширенная гамильтоновая система (0.4), (0.5) индуцируют соответственно автономные линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x)\partial_{x_i} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \ j = 1,\dots,m, \ (0.8)$$

и

$$\mathfrak{G}_j(x,y) = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x)\partial_{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i} X_{kj}(x)y_k\partial_{y_i}$$
$$\forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \ j = 1,\dots,m.$$

С целью однозначного толкования, следуя в основном монографии [11], определим используемые в статье понятия. Систему уравнений в полных дифференциалах (0.3) назовем *вполне разрешимой* на области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}$, если в любой точке $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) единственно [11, с. 17; 12, с. 21].

Система (0.3) вполне разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия Фробениуса [11, с. 19; 12, с. 113; 13, с. 43], которые с помощью скобок Пуассона линейных дифференциальных операторов (0.8) выражаются системой тождеств [11, с. 112–113]

$$[\mathfrak{X}_j(x), \mathfrak{X}_\xi(x)] = \mathcal{O} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \ j = 1,\dots,m, \ \xi = 1,\dots,m, \qquad (0.9)$$

где $\mathcal{O}$ – нулевой линейный дифференциальный оператор первого порядка.

Непрерывно дифференцируемую функцию $F : \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$ назовем *стационарным первым интегралом* на области $\mathcal{X}' \subset X$ системы уравнений в полных дифференциалах (0.3), если

$$\mathfrak{X}_j F(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathcal{X}', \ j = 1,\dots,m. \quad (0.10)$$

Совокупность функционально независимых на области $\mathcal{X}' \subset X$ стационарных первых интегралов $F_\zeta : \mathcal{X}' \to \mathbb{R}, \ \zeta = 1,\dots,k,$ системы (0.3) назовем *базисом стационарных первых интегралов* на области $\mathcal{X}'$ системы (0.3), если у этой системы любой стационарный первый интеграл Ψ можно представить в виде

$$\Psi(x) = \Phi(F_1(x),\dots,F_k(x)) \ \ \forall x \in \mathcal{X}',$$

где Φ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Число k при этом назовем *размерностью* базиса стационарных первых интегралов на области $\mathcal{X}'$ системы (0.3).

Автономная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (0.3) в окрестности любой точки области $\mathcal{X}$ имеет базис стационарных первых интегралов размерности $n-r$, где r – ранг матрицы $X = \|X_{ij}\|_{n\times m}$, $1 \le r \le m$ [11, с. 114]. А в случае неполной разрешимости автономной системы уравнений в полных дифференциалах (0.3) с дефектом d [1, с. 54] ее базис стационарных первых интегралов в окрестности любой точки из области разрешимости имеет размерность $n-r-d$ [11, с. 53–59].

Современное состояние теории интегралов и подробный обзор литературы по этой тематике приведены в монографиях [11; 14–16].

1 Аналитические связи между системами

Между первыми интегралами системы уравнений в полных дифференциалах (0.3) и частными решениями вспомогательной дифференциальной системы (0.7) существуют аналитические связи, которые выражает

***Свойство* 1.1.** *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция* $F:\mathcal{X}'\to\mathbb{R}$ *является стационарным первым интегралом на области* $\mathcal{X}'\subset\mathcal{X}$ *системы уравнений в полных дифференциалах* (0.3). *Тогда функции*

$$y_i : x\to\partial_{x_i}F(x)\ \ \forall x\in\mathcal{X}',\ i=1,\ldots,n, \quad (1.1)$$

составляют частное решение вспомогательной системы в полных дифференциалах (0.7).

Доказательство. Функции (1.1) образуют частное решение вспомогательной системы уравнений в полных дифференциалах (0.7) тогда и только тогда, когда на области $\mathcal{X}'$ имеет место система тождеств в дифференциалах

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\partial^2_{x_ix_k}F(x)X_{kj}(x)dt_j+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_i}X_{kj}(x)\partial_{x_k}F(x)dt_j=0,\ i=1,\ldots,n,$$

которая образована подстановкой функций (1.1) в систему (0.7) с учетом системы (0.3).

Эта система тождеств равносильна системе

$$\sum_{j=1}^{m}\partial_{x_i}\left(\sum_{k=1}^{n}X_{kj}(x)\partial_{x_k}F(x)\right)dt_j=0$$
$$\forall x\in\mathcal{X}',\ i=1,\ldots,n,$$

или, используя линейные дифференциальные операторы первого порядка (0.8) и то, что дифференциалы $dt_j,\ j=1,\ldots,m,$ независимы, системе тождеств

$$\partial_{x_i}X_jF(x)=0\ \ \forall x\in\mathcal{X}',\quad i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m. \quad (1.2)$$

Если функция $F:\mathcal{X}'\to\mathbb{R}$ есть первый интеграл системы уравнений в полных дифференциалах (0.3), то выполняется система тождеств (0.10), а значит, имеет место система тождеств (1.2). Свойство доказано.

Установим аналитические связи между первыми интегралами системы (0.3) и, соответствующей ей, расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

***Свойство* 1.2.** *Непрерывно дифференцируемая скалярная функция*

$$\widetilde{F}:(x,y)\to F(x)\ \ \forall(x,y)\in\mathcal{X}'\times\mathbb{R}^n$$

является n-цилиндричным первым интегралом гамильтоновой системы (0.4), (0.5) *тогда и только тогда, когда скалярная функция* $F:x\to F(x)\ \ \forall x\in\mathcal{X}'$ *будет стационарным первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах* (0.3).

Доказательство следует из того, что на области $\mathcal{X}'\times\mathbb{R}^n$ имеем

$$\mathfrak{G}_j\widetilde{F}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}X_{ij}(x)\partial_{x_i}F(x)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_i}X_{kj}(x)y_k\partial_{y_i}F(x)=\mathfrak{X}_jF(x),\ \ j=1,\ldots,m.$$

Связь между полной разрешимостью системы в полных дифференциалах (0.3) и полной разрешимостью расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5) выражает

***Свойство* 1.3.** *Автономная система уравнений в полных дифференциалах* (0.3) *является вполне разрешимой тогда и только тогда, когда гамильтонианы* (0.6) *расширенной дифференциальной системы* (0.4), (0.5) *находятся в инволюции, т. е. скобки Пуассона*

$$[H_\xi(x,y),H_j(x,y)]=0\ \ \forall(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathbb{R}^n,\quad j=1,\ldots,m,\ \xi=1,\ldots,m. \quad (1.3)$$

Доказательство. Система тождеств (1.3) является критерием полной разрешимости [17] гамильтоновой системы (0.4), (0.5). Скобки Пуассона для гамильтонианов (0.6) равны:

$$[H_\xi(x,y),H_j(x,y)]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(\partial_{x_i}H_\xi(x,y)\partial_{y_i}H_j(x,y)-$$
$$-\partial_{y_i}H_\xi(x,y)\partial_{x_i}H_j(x,y)\Big)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_{ij}(x)\partial_{x_i}X_{k\xi}(x)-\sum_{i=1}^{n}X_{i\xi}(x)\partial_{x_i}X_{kj}(x)\right)y_k=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\Big(X_jX_{k\xi}(x)-X_\xi X_{kj}(x)\Big)y_k$$
$$\forall(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathbb{R}^n,\ \ j=1,\ldots,m,\ \ \xi=1,\ldots,m.$$

Следовательно, система тождеств (1.3) равносильна системе тождеств (0.9). Отсюда, по теореме Ф.Г. Фробениуса [11, с. 25], получаем, что система уравнений в полных дифференциалах (0.3) будет вполне разрешимой. Свойство доказано.

2 Первые интегралы

Построение первых интегралов системы (0.3) по первым интегралам гамильтоновой системы (0.4), (0.5) основано на теоремах 2.1–2.5 и следствии 2.1.

***Теорема* 2.1.** *Пусть непрерывно дифференцируемые функции*

$$F_1:(x,y)\to F_1(x)\ \ \forall(x,y)\in\mathcal{X}'\times\mathbb{R}^n\ \ \textit{и}$$
$$F_2:(x,y)\to F_2(x,y)\ \ \forall(x,y)\in\mathcal{X}'\times\mathcal{Y},\ \ \mathcal{Y}\subset\mathbb{R}^n,$$

являются первыми интегралами расширенной гамильтоновой системы уравнений в полных *дифференциалах* (0.4), (0.5). *Тогда скалярная функция*

$$F : x \to F_2(x, y)_{|y=\partial_x F_1(x)} \quad \forall x \in \mathcal{X}' \qquad (2.1)$$

будет стационарным первым интегралом системы в полных дифференциалах (0.3).

Доказательство. По свойству 1.2, скалярная функция $F_1 : \mathcal{X}' \to \mathbb{R}$ будет первым интегралом системы (0.3). Тогда, с учетом того, что функции (1.1) составляют частное решение (свойство 1.1) вспомогательной системы (0.7), вычислим дифференциал функции (2.1) в силу системы уравнений в полных дифференциалах (0.3):

$$dF(x)_{|(1.1)} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F_2(x, y)_{|y=\partial_x F_1(x)} \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(x) dt_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} F_2(x, y)_{|y=\partial_x F_1(x)} \left(-\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i} X_{kj}(x) y_k \right) dt_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x) \partial_{x_i} F_2(x, y) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i} X_{kj}(x) y_k \partial_{y_i} F_2(x, y) \Bigg)_{|y=\partial_x F_1(x)} dt_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{G}_j F_2(x, y)_{|y=\partial_x F_1(x)} dt_j \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

Отсюда, на основании того, что функция $F_2 : \mathcal{X}' \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ есть первый интеграл расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5), имеем:

$$dF(x)_{|(1.1)} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

то есть, скалярная функция (2.1) является стационарным первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3). Теорема доказана.

Теорема 2.1 указывает способ построения дополнительного первого интеграла F системы в полных дифференциалах (0.3) по первому интегралу (свойство 1.2) F_1 системы (0.3) и первому интегралу F_2 расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

Применим теорему 2.1 к построению первых интегралов систем уравнений в полных дифференциалах (0.3), обладающих циклическими переменными. При этом будем использовать следующее понятие: если функции $X_{ij} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n,$ $j = 1, \ldots, m,$ входящие в задание системы (0.3), являются цилиндричными по зависимой переменной $x_\zeta, \zeta \in \{1, \ldots, n\},$ то переменную x_ζ для системы (0.3) назовем *циклической*.

***Свойство* 2.1.** *Если переменная* $x_\zeta, \zeta \in \{1, \ldots, n\},$ *для системы в полных дифференциалах* (0.3) *является циклической, то* $(2n-1)$ *-цилиндрическая функция*

$$F : (x, y) \to y_\zeta \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n$$

будет первым интегралом расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

Действительно, производные Ли функции F в силу системы (0.4), (0.5) равны

$$\mathfrak{G}_j F(x, y) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_\zeta} X_{ij}(x) y_i = 0$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \ \ j = 1, \ldots, m.$$

На основании теоремы 2.1, свойств 1.2 и 2.1 получаем следующее утверждение.

***Теорема* 2.2.** *Пусть функция*

$$F : x \to F(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}'$$

является первым интегралом системы (0.3) *с циклической переменной* $x_\zeta, \zeta \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда функция*

$$F_1 : x \to \partial_{x_\zeta} F(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}', \ \zeta \in \{1, \ldots, n\},$$

будет первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3).

Используя теорему 2.2 получаем, что если первый интеграл $F : x \to F(x) \ \forall x \in \mathcal{X}'$ дифференциальной системы (0.3) бесконечное число раз непрерывно дифференцируем по циклической для системы (0.3) переменной $x_\zeta, \zeta \in \{1, \ldots, n\},$ то скалярные функции

$$F_k : x \to \partial_{x_\zeta}^k F_{k-1}(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}', \ k = 2, 3, \ldots,$$

также будут первыми интегралами системы уравнений в полных дифференциалах (0.3).

***Теорема* 2.3** (теорема Пуассона). *Пусть первыми интегралами расширенной гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах* (0.4), (0.5) *являются дважды непрерывно дифференцируемые функции*

$$F_1 : (x, y) \to F_1(x) \ \ \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n \ \ и$$

$$F_2 : (x, y) \to F_2(x, y) \ \ \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}, \ \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n.$$

Тогда скобка Пуассона

$$F : x \to [F_1(x), F_2(x, y)]_{|y=\partial_x F_1(x)} \quad \forall x \in \mathcal{X}' \quad (2.2)$$

будет первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3).

Доказательство. По теореме Пуассона для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах, доказанной И.С. Аржаных в работе [17], скалярная функция (скобка Пуассона двух первых интегралов)

$$\widetilde{F}(x, y) = [F_1(x), F_2(x, y)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F_1(x) \partial_{y_i} F_2(x, y) \ \ \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}$$

будет первым интегралом расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

Используя первые интегралы

$$F_1 : \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \text{и} \ \widetilde{F} : \mathcal{X}' \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$$

расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5), по теореме 2.1, строим первый интеграл (2.2) системы уравнений в полных дифференциалах (0.3). Теорема доказана.

Теорема Пуассона указывает способ, посредством которого по одному известному первому интегралу (свойство 1.2) системы (0.3) и одному известному первому интегралу гамильтоновой системы (0.4), (0.5) можно найти дополнительный (второй) первый интеграл системы (0.3). Последовательное применение теоремы Пуассона дает возможность нахождения некоторого количества функционально независимых первых интегралов системы (0.3), а в «благоприятных» случаях и базис первых интегралов системы (0.3).

Для доказательства многомерного аналога теоремы А. Буля (теорема 2.4) понадобится

***Свойство* 2.2.** *Расширенная гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах* (0.4), (0.5) *имеет автономный линейный по импульсам первый интеграл*

$$\widetilde{F}(x,y) \to \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i \quad \forall (x,y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n,$$

если и только если функции

$$f_i : \mathcal{X}' \to \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, n,$$

удовлетворяют системе тождеств

$$[\mathfrak{X}_j(x), \mathfrak{F}(x)] = \mathcal{O} \ \ \forall x \in \mathcal{X}', \ \ j = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где линейный дифференциальный оператор

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \partial_{x_i} \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

Доказательство. Функция $\widetilde{F}$ является линейным по импульсам первым интегралом гамильтоновой системы (0.4), (0.5), если и только если имеет место система тождеств

$$\mathfrak{G}_j \widetilde{F}(x,y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathfrak{X}_j f_i(x) - \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} X_{ij}(x) f_k(x) \right) y_i = 0$$

$$\forall (x,y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n, \ \ j = 1, \dots, m,$$

что равносильно операторной системе тождеств (2.3). Свойство доказано.

***Теорема* 2.4.** *Пусть функция*

$$F : x \to F(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}'$$

является автономным первым интегралом системы в полных дифференциалах (0.3). *Тогда система тождеств* (2.3) *будет необходимым и достаточным условием существования у системы в полных дифференциалах* (0.3) *дополнительного автономного первого интеграла вида*

$$\widetilde{F} : x \to \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \partial_{x_i} F(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}'.$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.1, свойств 2.2 и 1.2.

Используя теорему 2.4, получаем следующие утверждения по построению первых интегралов систем уравнений в полных дифференциалах, имеющих симметрии.

***Теорема* 2.5.** *Пусть функция*

$$F : x \to F(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}'$$

является первым интегралом автономной системы уравнений в полных дифференциалах (0.3)*, а индуцированные ею линейные дифференциальные операторы первого порядка* $\mathfrak{X}_j$, $j = 1, \dots, m$, *симметричны с оператором* $\mathfrak{X}_\xi$, $\xi \in \{1, \dots, m\}$, *т. е. имеет место операторная система тождеств*

$$[\mathfrak{X}_j(x), \mathfrak{X}_\xi(x)] = \mathcal{O}$$
$$\forall x \in \mathcal{X}, \ \ j = 1, \dots, m, \ \ \xi \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.4)$$

Тогда скалярная функция

$$F_\xi : x \to \sum_{i=1}^{n} X_{i\xi}(x) \partial_{x_i} F(x)$$
$$\forall x \in \mathcal{X}', \ \ \xi \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.5)$$

будет дополнительным первым интегралом дифференциальной системы (0.3).

Доказательство. Из доказательства свойства 1.3 следует, что система тождеств (2.4) равносильна на области $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^n$ системе тождеств

$$[H_\xi(x,y), H_j(x,y)] = 0, \ \ j = 1, \dots, m, \ \ \xi \in \{1, \dots, m\}.$$

Отсюда, по определению первого интеграла гамильтоновой системы, получаем, что гамильтониан

$$H_\xi : (x,y) \to \sum_{i=1}^{n} X_{i\xi}(x) y_i$$
$$\forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \ \ \xi \in \{1, \dots, m\},$$

будет первым интегралом системы Гамильтона (0.4), (0.5), соответствующей системе (0.3).

На основании свойства 1.2 и теоремы 2.1 получаем, что функция (2.5) является первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3). Теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Пусть функция*

$$F : x \to F(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}'$$

является первым интегралом автономной вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (0.3). *Тогда функции*

$$F_j : x \to \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(x) \partial_{x_i} F(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}', \ \ j = 1, \dots, m,$$

будут первыми интегралами автономной вполне разрешимой системы (0.3).

Заключение

В работе между системой уравнений в полных дифференциалах (0.3) и гамильтоновой дифференциальной системой (0.4), (0.5) установлены аналитические связи наличия частных решений (свойство 1.1), существования первых интегралов (свойство 1.2), выполнения условий полной разрешимости (свойство 1.3). Основываясь на этих связях, для дифференциальной системы (0.3) получено утверждение (теорема 2.1) о нахождении первого интеграла по двум первым интегралам гамильтоновой системы (0.4), (0.5), доказана теорема Пуассона о построении стационарных первых интегралов (теорема 2.3), приведены положения о существовании дополнительных первых интегралов (теоремы 2.4 и 2.5, следствие 2.1), а также исследован вопрос (теорема 2.2) о наличии первых интегралов у дифференциальной системы (0.3), обладающей циклическими переменными.

Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории многомерных дифференциальных уравнений и в аналитической механике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якоби*, *К.* Лекции по динамике / К. Якоби. – Л.-М.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936. – 272 с.
2. *Арнольд*, *В.И.* Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
3. *Гантмахер*, *Ф.Р.* Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
4. *Buhl*, *A.* Sur les formes linéares aux dérivées partielles d'une intégrale d'une systémes d'equations différentielles simultanees qui sont aussi des intégrales de ce systéme / A. Buhl // Comptes rendus. – 1901. – T. 132. – P. 313–316.
5. *Appell*, *P.* Sur le théoreme de Poisson et un théoreme de Buhl / P. Appell // Comptes rendus. – 1901. – T. 132. – P. 317–319.
6. *Шульгин*, *М.Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании / М.Ф. Шульгин. – Ташкент: САГУ, 1958. – 184 с.
7. *Добронравов*, *В.В.* Аналитическая динамика в неголономных координатах / В.В. Добронравов // Ученые записки МГУ. – 1948. – Вып. 122, механика. – Т. 2. – С. 77–182.
8. *Четаев*, *Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре / Н.Г. Четаев // ДАН СССР. Сер А. – 1928. – № 7. – С. 103–104.
9. *Четаев*, *Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре / Н.Г. Четаев // Прикладная математика и механика. – 1941. – Т. 5. – С. 259–261.
10. *Аппель*, *П.* Теоретическая механика: в 2 т. / П. Аппель. – М.: Гос. из-во физ.-мат. лит., 1960. – Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. – 486 с.
11. *Горбузов*, *В.Н.* Интегралы дифференциальных систем / В.Н. Горбузов. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.
12. *Гайшун*, *И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
13. *Амелькин*, *В.В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения / В.В. Амелькин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.
14. *Козлов*, *В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике / В.В. Козлов. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. – 432 с.
15. *Goriely*, *A.* Integrability and nonintegrability of dynamical systems / A. Goriely. – World Scientific: Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. – Vol. 19. – 436 p.
16. *Проневич*, *А.Ф.* R-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах/ А.Ф.Проневич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 104 с.
17. *Аржаных*, *И.С.* Об интегрировании канонической системы уравнений в точных дифференциалах / И.С. Аржаных // Успехи матем. наук. – 1953. – Т. VIII, вып. 3 (55). – С. 99–104.

Поступила в редакцию 28.03.16.