Проблемы физики, математики и техники, № 3 (28), 2016

УДК 517.925

ДОПУСТИМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛЭНГФОРДА

Э.В. Мусафиров

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

ADMISSIBLE PERTURBATIONS OF LANGFORD SYSTEM

E.V. Musafirov

Y. Kupala Grodno State University

Получено множество трехмерных систем неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, отражающая функция которых совпадает с отражающей функцией системы Лэнгфорда. Это позволяет сопоставить качественное поведение решений полученных систем и системы Лэнгфорда.

Ключевые слова: *отражающая функция*, *система обыкновенных дифференциальных уравнений*, *бифуркация Хопфа*, *периодическое решение.*

The set of three-dimensional systems of nonautonomous ordinary differential equations for which the reflecting function coincides with reflecting function of the Langford system is obtained. It allows comparing the qualitative behavior of solutions of the obtained systems and Langford system.

Keywords: *reflecting function*, *system of ordinary differential equations*, *Hopf bifurcation*, *periodic solution.*

Введение

Многие процессы, происходящие в окружающем нас мире, моделируются с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Большинство таких систем невозможно проинтегрировать даже в квадратурах и тем более через элементарные функции. В связи с этим встает вопрос об изучении решений таких систем дифференциальных уравнений по виду самих систем (т. е. о применении качественной теории дифференциальных уравнений). Одним из новых инструментов качественной теории дифференциальных уравнений является отражающая функция (ОФ), введенная профессором В.И. Мироненко [1], [2].

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in D \subset \mathbb{R}^n \qquad (0.1)$$

с общим решением в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ ОФ определяется (см. [2, с. 11], а также [1, с. 62]) формулой $F(t,x) := \varphi(-t; t, x)$. Теория ОФ позволяет проводить исследование качественного поведения решений даже неинтегрируемых в замкнутом виде систем несмотря на то, что ОФ определяется (формально) через общее решение этой системы. ОФ позволяет решать такие задачи качественной теории дифференциальных уравнений, как вопросы существования и устойчивости периодических решений [2], существования решений краевых задач [3], вопросы глобального поведения семейств решений дифференциальных систем [1]. Изучению качественного поведения решений дифференциальных уравнений с помощью ОФ посвящены работы J. Zhou, Z. Zhou, Л.А. Альсевич, М.С. Белокурского, В.А. Бельского, Е.В. Варенниковой, П.П. Вересовича, С.В. Майоровской, В.И. Мироненко, В.В. Мироненко, Э.В. Мусафирова и других [4]–[13].

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая условию $F(-t, F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x$, является ОФ множества систем [1]. Все системы с одинаковой ОФ имеют один и тот же оператор сдвига [4, с. 11–13] на любом интервале $(-\alpha;\alpha)$. Поэтому все 2ω-периодические системы с одинаковой ОФ имеют одно и то же отображение за период $[-\omega;\omega]$.

Пусть система (0.1) и система

$$\dot{y} = Y(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, y \in D \subset \mathbb{R}^n \qquad (0.2)$$

имеют одинаковую ОФ $F(t,x)$, и пусть система (0.1) является 2ω-периодической. Тогда, если решение $\phi(t; -\omega, x)$ системы (0.1) и решение $\psi(t; -\omega, x)$ системы (0.2) продолжимы на отрезок $[-\omega, \omega]$, то отображение за период $[-\omega, \omega]$ для системы (0.1) есть

$$\phi(\omega; -\omega, x) \equiv F(-\omega, x) \equiv \psi(\omega; -\omega, x),$$

хотя система (0.2) может быть непериодической. Т. е., между 2ω-периодическими решениями системы (0.1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (0.2) можно установить взаимно однозначное соответствие [1].

Таким образом, решения систем дифференциальных уравнений с одинаковой ОФ имеют много одинаковых качественных свойств. Поэтому при исследовании качественных свойств решений систем целесообразно заменять сложную систему на более простую.

1 Допустимые возмущения системы Лэнгфорда

Находить возмущения дифференциальных систем, не меняющие ОФ (назовем такие возмущения *допустимыми*), позволяет следующее утверждение (см. [12]).

***Утверждение* 1.1**. *Пусть вектор-функции* $\Delta_i(t,x)$ $(i=\overline{1,m})$ *являются решениями дифференциального уравнения в частных производных*

$$\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta(t,x)=0. \quad (1.1)$$

Тогда ОФ возмущенной дифференциальной системы вида

$$\dot{x}=X(t,x)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\Delta_i(t,x),\ \ t\in\mathbb{R},\ \ x\in D\subset\mathbb{R}^n$$

совпадает с ОФ системы (0.1), *где* $\alpha_i(t)$ *– произвольные непрерывные скалярные нечетные функции.*

Цель настоящей работы – поиск допустимых возмущений для хорошо изученной системы Лэнгфорда [15]–[19], моделирующей турбулентность в жидкости

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(2a-1)x-y+xz;\\ \dot{y}&=x+(2a-1)y+yz;\\ \dot{z}&=-az-(x^2+y^2+z^2);\ a,x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \quad (1.2)$$

Для этой системы пара $(a_0=1/2,T_0=2\pi)$ является точкой бифуркации Хопфа. Рождающиеся периодические решения системы (1.2) существуют при $a>1/2$ и являются асимптотически орбитально устойчивыми [17].

Получена следующая теорема.

***Теорема* 1.1.** *Пусть* $\alpha_i(t)$, $i=\overline{1,7}$ *– произвольные скалярные непрерывные нечетные функции, тогда:*

1) *ОФ системы* (1.2) *совпадает с ОФ системы*

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+x(z-1)-(x+y-xz)\alpha_1(t)+\\&+y\alpha_2(t)+x(z-1)\alpha_3(t)+\\&+2ax\left(1+\alpha_1(t)+\alpha_3(t)\right),\\ \dot{y}&=x+y(z-1)+x\alpha_1(t)-x\alpha_2(t)+\\&+y\left((z-1)\left(\alpha_1(t)+\alpha_3(t)\right)+\right.\\&\left.+2a\left(1+\alpha_1(t)+\alpha_3(t)\right)\right),\\ \dot{z}&=-\left(x^2+y^2+z^2+az\right)\left(1+\alpha_1(t)+\alpha_3(t)\right);\end{aligned} \quad (1.3)$$

2) *при* $a=2/3$ *ОФ системы* (1.2) *совпадает с ОФ системы*

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x\left(\frac{1}{3}+z\right)-y+\left(x\left(\frac{1}{3}+z\right)-y\right)\alpha_1(t)+\\&+x\left(x^2+y^2\right)(1+3z)\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)\alpha_2(t)+\\&+y\alpha_3(t)+(x+3xz)\alpha_4(t)+\\&+y\left(x^2+y^2\right)\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)\alpha_5(t)+\\&+y\left(x^2+y^2\right)^2\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)^2\alpha_6(t)+\\&+x\left(x^2+y^2\right)^2(1+3z)\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)^2\alpha_7(t),\\ \dot{y}&=x+y\left(\frac{1}{3}+z\right)+\left(x+y\left(\frac{1}{3}+z\right)\right)\alpha_1(t)+\\&+y\left(x^2+y^2\right)(1+3z)\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)\alpha_2(t)-\\&-x\alpha_3(t)+(y+3yz)\alpha_4(t)-\\&-x\left(x^2+y^2\right)\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)\alpha_5(t)-\\&-x\left(x^2+y^2\right)^2\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)^2\alpha_6(t)+\\&+y\left(x^2+y^2\right)^2(1+3z)\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)^2\alpha_7(t),\\ \dot{z}&=-x^2-y^2-\frac{1}{3}z(2+3z)-\\&-\left(x^2+y^2+\frac{1}{3}z(2+3z)\right)\alpha_1(t)-\\&-\left(x^2+y^2\right)\left(3\left(x^2+y^2\right)+4z+6z^2\right)\times\\&\times\left(3x^2+3y^2+z(2+3z)\right)\alpha_2(t)-\\&-\left(3x^2+3y^2+z(2+3z)\right)\alpha_4(t)-\\&-(x^2+y^2)^2(3(x^2+y^2)+4z+6z^2)^2\times\\&\times\left(3x^2+3y^2+z(2+3z)\right)\alpha_7(t).\end{aligned}$$

Доказательство вытекает из утверждения 1.1 последовательной проверкой тождества (1.1) для каждого вектор-множителя при $\alpha_i(t)$.

Замечание. Обычно динамика процессов моделируется на неотрицательной временной полуоси, поэтому требование нечетности функций $\alpha_i(t)$ не является существенным, т. к. функции $\alpha_i(t)$ $(\alpha_i(0)=0)$ можно доопределить непрерывно нечетным образом на отрицательную полуось.

С помощью теории ОФ Теорему 1.1 можно использовать для изучения качественного поведения решений допустимо возмущенных систем. При этом, в частности, характер устойчивости решений, при $t=t_0$, выходящих из одной и той же точки, всех допустимо возмущенных систем такой же, как и у исходной системы.

2 Численное решение

Пример. Вышесказанное проиллюстрируем численными решениями с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=0.01$, $z(0)=0.1$ систем (1.2) (рисунки 2.1–2.3) и (1.3) при $a=0.53$ и $\alpha_i(t)=\sin(i\cdot t)$, $i=\overline{1,3}$ (рисунки 2.4–2.6).

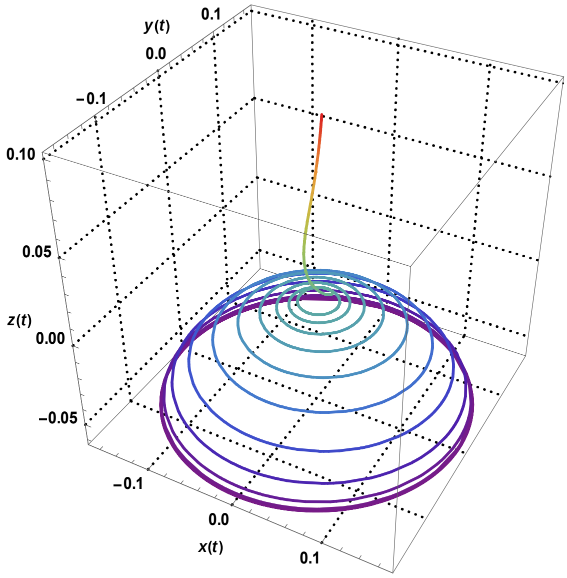
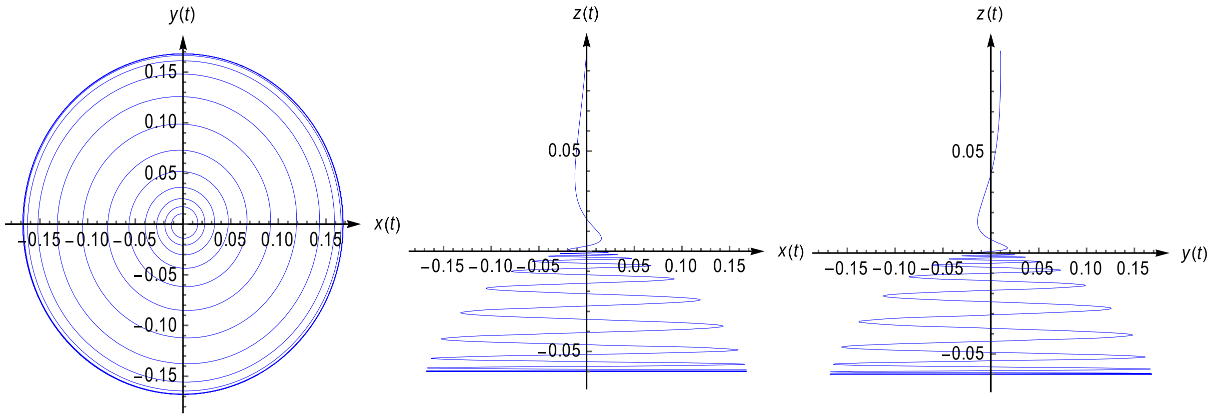
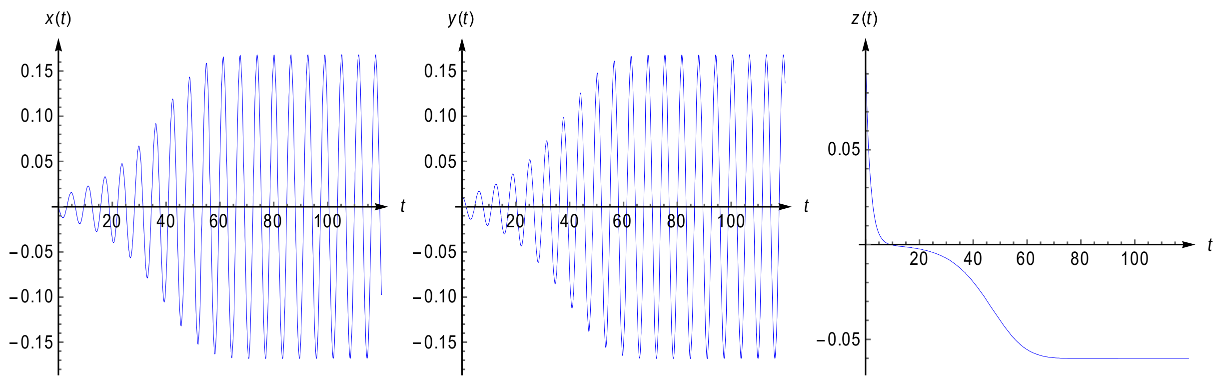


Рисунок 2.1 – Решение системы Лэнгфорда (1.2) с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=0.01$, $z(0)=0.1$ в фазовом пространстве



(*a*) (*b*) (*c*)

Рисунок 2.2 – Проекции решения системы Лэнгфорда (1.2) с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=0.01$, $z(0)=0.1$ на фазовые плоскости:
(*a*) – на плоскость xOy; (*b*) – на плоскость xOz; (*c*) – на плоскость yOz



(*a*) (*b*) (*c*)

Рисунок 2.3 – Графики компонент решения системы Лэнгфорда (1.2) с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=0.01$, $z(0)=0.1$:
(*a*) – компоненты $x(t)$; (*b*) – компоненты $y(t)$; (*c*) – компоненты $z(t)$

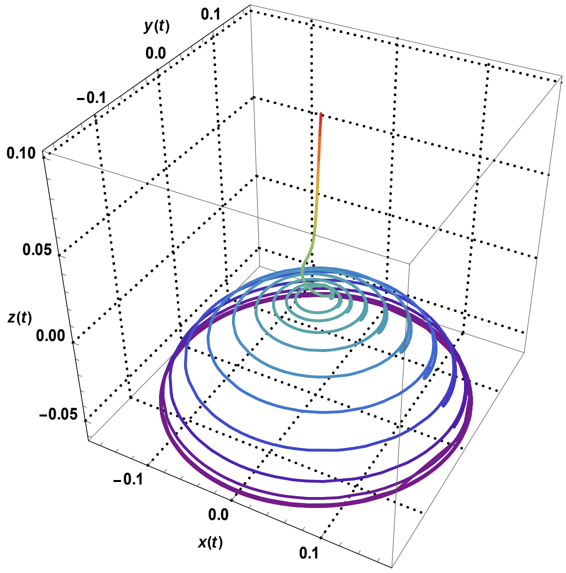
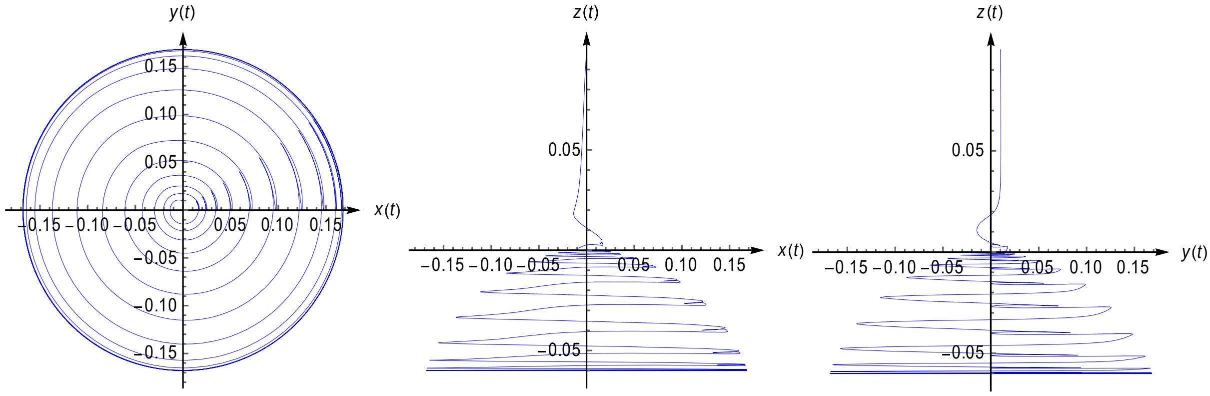
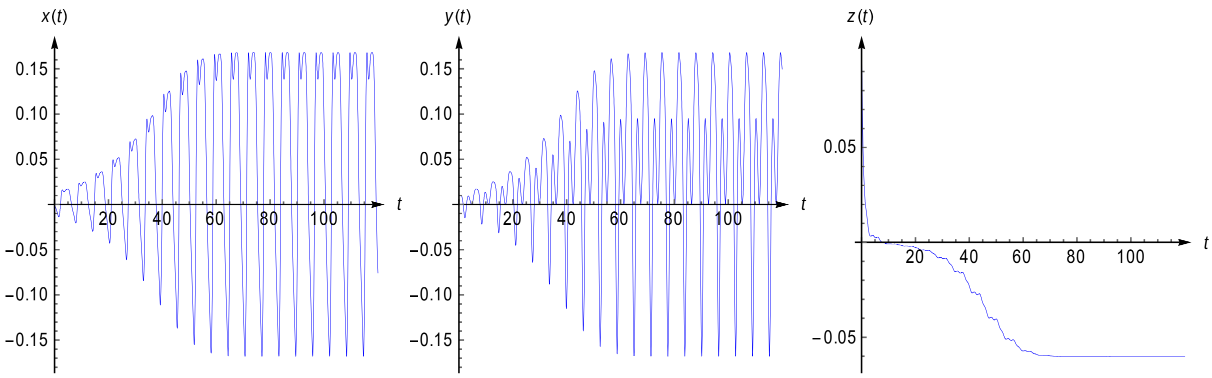


Рисунок 2.4 – Решение системы (1.3) при $a = 0.53$, $\alpha_i(t) = \sin(i \cdot t)$, $i = \overline{1,3}$ и начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$ в фазовом пространстве



(a) (b) (c)

Рисунок 2.5 – Проекции решения системы (1.3) при $a = 0.53$, $\alpha_i(t) = \sin(i \cdot t)$ и начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$ на фазовые плоскости:
(a) – на плоскость xOy; (b) – на плоскость xOz; (c) – на плоскость yOz



(a) (b) (c)

Рисунок 2.6 – Графики компонент решения системы (1.3) при $a = 0.53$, $\alpha_i(t) = \sin(i \cdot t)$, $i = \overline{1,3}$ и начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$:
(a) – компоненты $x(t)$; (b) – компоненты $y(t)$; (c) – компоненты $z(t)$

Заключение

Полученно множество нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ОФ которых совпадает с ОФ системы Лэнгфорда. Одинаковая ОФ этих систем обуславливает совпадение некоторых качественных свойств поведения их решений, что позволяет использовать результаты исследования качественного поведения решений хорошо изученной системы Лэнгфорда для изучения более сложных по своей природе нестационарных возмущенных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.

2. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986. – 76 с.

3. *Мироненко*, *В.И.* Метод отражающей функции для краевых задач / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 774–779.

4. *Zhou*, *J.* The differential systems with the same reflecting function / J. Zhou // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – Vol. 218, № 7. – P. 3144–3148.

5. *Zhou*, *Z.* On the first integral and equivalence of nonlinear differential equations / Z. Zhou // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – Vol. 268. – P. 295–302.

6. *Альсевич*, *Л.А.* Явное вычисление отображения за период для линейных систем с блочным строением отражающей матрицы / Л.А. Альсевич, О.А. Кастрица // Известия национальнай академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2003. – № 3. – С. 23–25.

7. *Белокурский*, *М.С.* О совпадении отражающих функций квазипериодической и периодической дифференциальных систем / М.С. Белокурский // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 58–61.

8. *Бельский*, *В.А.* О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции / В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 79–85.

9. *Варенникова*, *Е.В.* О решениях двухточечной краевой задачи для одной неавтономной дифференциальной системы с квадратичной по фазовым переменным правой частью / Е.В. Варенникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1 (18). – С. 39–42.

10. *Вересович*, *П.П.* Отражающая функция одной двумерной дифференциальной системы / П.П. Вересович // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 65–67.

11. *Майоровская*, *С.В.* Отражающая функция и периодичность решений одной неавтономной кубической системы / С.В. Майоровская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 92–93.

12. *Mironenko*, *V.I.* How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematics Letters. – 2009. – Vol. 22, № 9. – P. 1356–1359.

13. *Мусафиров*, *Э.В.* Нестационарные дифференциальные системы, эквивалентные системе Лотки – Вольтерра с логистической поправкой / Э.В. Мусафиров // Наука Красноярья. – 2012. – № 1 (01). – С. 97–104.

14. *Красносельский*, *М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

15. *Даймонд*, *Ф.* Анализ сходимости дискретных и проекционных процедур построения циклов в задаче о бифуркации Хопфа / Ф. Даймонд, Н.И. Матвеенко, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 9. – С. 3–12.

16. *Казанцева*, *Т.Е.* Некоторые замечания о модифицированных системах типа Лэнгфорда / Т.Е. Казанцева, В.В. Мачулис // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. – 2013. – № 4. – С. 12–16.

17. *Красносельский*, *М.А.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа / М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 12. – С. 15–24.

18. *Красносельский*, *М.А.* Функционализации параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа / М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 11. – С. 22–28.

19. *Кузнецов*, *Н.А.* Алгоритм исследования устойчивости периодических колебаний в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа / Н.А. Кузнецов, М.Г. Юмагулов, И.В. Шарафутдинов // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 12. – С. 47–52.

Автор выражает благодарность за оказанную помощь ресурсному центру «СКИФ» Гродненского государственного университета им. Я. Купалы.

Поступила в редакцию 26.05.16.