Проблемы физики, математики и техники, № 3 (28), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ФАКТОРИЗУЕМЫЕ СУБНОРМАЛЬНЫМИ СВЕРХРАЗРЕШИМЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.С. Монахов[1], **И.К. Чирик**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,*
[2]*Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь*

FINITE FACTORISED GROUPS WHOSE FACTORS ARE SUBNORMAL SUPERSOLVABLE SUBGROUPS

V.S. Monakhov[1], **I.K. Chirik**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus*

Устанавливаются признаки сверхразрешимости конечной группы, факторизуемой субнормальными сверхразрешимыми подгруппами. Анализируются приложения к факторизациям $F(G)$-субнормальными подгруппами.

***Ключевые слова**: конечная группа, сверхразрешимая группа, коммутант, субнормальная подгруппа, факторизуемая группа.*

New criteria of supersolvability for a finite group which is factorised as a product of supersoluble subgroups are obtained. Some applications to the factorization by $F(G)$ -subnormal subgroups are presented.

***Keywords**: finite group, supersolvable group, derived subgroup, subnormal subgroup, factorised group.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]–[2].

Группа, у которой главные факторы имеют простые порядки, называется сверхразрешимой. Первые примеры несверхразрешимых групп, являющихся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп, построили Хупперт [3] и Бэр [4]. Признаки сверхразрешимости таких групп установили Бэр [4], Фризен [5], А.Ф. и Т.И. Васильевы [6], см. теорему 2.5 настоящей работы.

А.Ф. Васильев и В.И. Мурашко [7] предложили следующее определение. Подгруппа H группы G называется $F(G)$ -субнормальной подгруппой, если H субнормальна в $HF(G)$. Здесь и далее $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Заметим, что всякая подгруппа, содержащая $F(G)$, является $F(G)$ -субнормальной. Каждая субнормальная подгруппа группы G также $F(G)$ -субнормальна. Обратное неверно. В симметрической группе S_4 степени 4 подгруппа Фиттинга $F(S_4)$ является элементарной абелевой подгруппой порядка 4. Силовская 2-подгруппа из S_4 содержит $F(S_4)$, но не субнормальна в S_4, [7, пример 1].

А.Ф. Васильев и В.И. Мурашко распространили теорему Бэра [4] на группу $G = AB$, в которой подгруппы A и B $F(G)$ -субнормальны и сверхразрешимы. Они также доказали, что в теореме Фризен [5] условие нормальности сомножителей можно ослабить до $F(G)$-субнормальности только в классе метанильпотентных групп.

В настоящей работе устанавливаются новые признаки сверхразрешимости группы, факторизуемой субнормальными сверхразрешимыми подгруппами, и анализируются их приложения к факторизациям $F(G)$ -субнормальными подгруппами.

1 Вспомогательные результаты

Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p-нильпотентной. Через $Z(G)$ и $\Phi(G)$ обозначают центр и подгруппу Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p' -подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G.

Пусть G – группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k},\ p_1 > p_2 > \ldots > p_k,\ a_i \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G$$

такая, что подгруппа G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i / G_{i-1} изоморфна силовской

p_i-подгруппе из G для всех i. Такие группы называют также дисперсивными по Оре.

***Лемма* 1.1** [2, VI.9.1]. (1) *Каждая минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок.*

(2) *Пусть* N *– нормальная в G подгруппа и* G/N *сверхразрешима. Если* N *либо циклическая, либо* $N \le Z(G)$, *либо* $N \le \Phi(G)$, *то* G *сверхразрешима.*

(3) *Каждая сверхразрешимая группа обладает силовской башней сверхразрешимого типа.*

(4) *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

(5) *Класс* $\mathfrak{U}$ *всех сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией.*

***Лемма* 1.2.** *Если у группы G фактор-группа по подгруппе Фиттинга является элементарной абелевой* 2*-группой, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Можно считать, что подгруппа Фраттини группы G единична, а $F = F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G/F действует неприводимо на F, то по лемме Шура [2, с.56] фактор-группа G/F циклическая. Поэтому $|G/F| = 2$. Пусть $a \in F$, $a \ne 1$ и b – инволюция из G. Если $a^b \in \langle a \rangle$, то $\langle a \rangle$ – нормальная подгруппа. Если a^b не принадлежит $\langle a \rangle$, то $(a^b a)^b = aa^b = a^b a$ и $\langle a^b a \rangle$ – неединичная нормальная подгруппа. Итак, в любом случае, в группе G имеется нормальная подгруппа простого порядка. Поэтому F – подгруппа простого порядка p и $|G| = 2p$ – сверхразрешима. □

Коммутант группы X обозначается X'. Для подгрупп A и B группы G положим

$$[A,B] = \langle [a,b] \mid a \in A, b \in B \rangle.$$

Ясно, что $G' = [G,G]$. Подгруппу $[A,B]$ называют взаимным коммутантом A и B.

***Лемма* 1.3** [1, 4.8], [9, лемма 4]. *Пусть группа* $G = AB$. *Тогда*:

(1) $[A,B] \lhd G$;

(2) $[A[A,B]/[A,B], B[A,B]/[A,B]] = 1$;

(3) *если* $A_1 \lhd A$, *то* $A_1[A,B] \lhd G$;

(4) $G' = A'B'[A,B]$;

(5) *если* A *и* B *– нормальны в* G *и* $(|G;A|, |G:B|) = 1$, *то* $G' = A'B'$.

Разрешимая группа G называется примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром

$$\mathrm{Core}_G M = \cap_{x \in G} M^x = 1.$$

В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G.

***Лемма* 1.4.** *Предположим, что разрешимая группа G не сверхразрешима, но фактор-группа* G/K *сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в G подгруппы* K. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу* N,

$$N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$$

для некоторого $p \in \pi(G)$;

(2) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

(3) G *– примитивная группа;* $G = [N]M$, *где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;*

(4) N *– элементарная абелева подгруппа порядка* p^n, $n > 1$;

(5) *если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего* $p^n - 1$, *а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению* $p^n \equiv 1(\mathrm{mod}\,|M|)$.

Доказательство. Пусть N_1 и N_2 – две минимальные нормальные в G подгруппы. Тогда $N_1 \cap N_2 = 1$, фактор-группа G/N_i сверхразрешима, $i = 1,2$, и $G = G/(N_1 \cap N_2)$ сверхразрешима, противоречие. Поэтому группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, N – элементарная абелева *p*-подгруппа порядка p^n для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.1 (2) $Z(G) = \Phi(G) = 1$ и $n > 1$. Теперь $F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных в G подгрупп, значит, $N = F(G) = \mathrm{O}_p(G) = C_G(N)$ и $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Поскольку $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа *M* в группе *G*, не содержащая *N*. Ясно, что $G = [N]M$ и M – максимальная подгруппа в группе *G* с единичным ядром. Следовательно, *G* – примитивная группа и *M* действует неприводимо на *N*. Если подгруппа *M* абелева, то согласно [8, I.1.3] подгруппа *M* циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1(\mathrm{mod}\,|M|)$. □

***Лемма* 1.5** [1]. *Пусть H – субнормальная подгруппа группы G. Тогда*:

(1) *если* $H \in \mathfrak{F}$, *где* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, то* $H^G \in \mathfrak{F}$; *в частности, если H нильпотентна, то* H^G *нильпотентна*;

(2) *если H* π*-подгруппа, то* H^G π*-подгруппа*;

(3) *если H p-нильпотентна, то* H^G *p-нильпотентна.*

Здесь и далее $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$ – наименьшая нормальная в *G* подгруппа, содержащая подгруппу H.

2 О произведении субнормальных сверхразрешимых подгрупп

***Лемма* 2.1.** *Пусть группа* $G = AB$ *является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп* A *и* B. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*;

(2) *фактор-группа* $G/F(G)$ *нильпотентна и является произведением двух абелевых подгрупп* $AF(G)/F(G)$ *и* $BF(G)/F(G)$.

Доказательство. 1. Пусть $p \in \pi(G)$, A_p и B_p – силовские p-подгруппы из A и B соответственно. Предположим, что p – наибольшее в $\pi(G)$. Тогда A_p и B_p по лемме 1.1(3) нормальны в A и B соответственно, и A_pB_p – силовская p-подгруппа группы G, [2, VI.4.7]. Теперь A_p и B_p субнормальны в G, поэтому A_pB_p – нормальная в G силовская p-подгруппа по лемме 1.5(2). По индукции G/A_pB_p имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, поэтому и группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

2. По лемме 1.1 (4)

$$A' \le F(A) \le F(A)^G \le F(G).$$

Следовательно,

$$AF(G)/F(G) \simeq A/(A \cap F(G))$$

абелева и $(AF(G)/F(G))^{G/F(G)}$ нормальна в $G/F(G)$ и нильпотентна по лемме 1.5 (1). Аналогично,

$$B' \le F(B) \le F(B)^G \le F(G),$$

$$BF(G)/F(G) \simeq B/(B \cap F(G)),$$

поэтому $BF(G)/F(G)$ абелева и

$$(BF(G)/F(G))^{G/F(G)}$$

нормальна в $G/F(G)$ и нильпотентна по лемме 1.5 (1). Теперь фактор-группа $G/F(G)$ является произведением двух субнормальных абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$.

Поскольку

$$G/F(G) = $$
$$= (AF(G)/F(G))^{G/F(G)}(BF(G)/F(G))^{G/F(G)},$$

то $G/F(G)$ нильпотентна. □

***Лемма* 2.2.** *Пусть группа* $G = AB$ *является произведением субнормальных подгрупп* A *и* B. *Если* A *сверхразрешима, а* B *нильпотентна, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. По лемме 2.1 (1) силовская p-подгруппа A_pB_p нормальна в G для наибольшего $p \in \pi(G)$. Поскольку условия леммы наследуют все фактор-группы, то G примитивна по лемме 1.4:

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1, \ G = [F]M,$$

$$F = F(G) = A_pB_p = C_G(F),$$

и M – максимальная подгруппа с единичным ядром. Подгруппа M нильпотентна по лемме 2.1 (2). Подгруппу B можно считать по лемме 1.5 (1) нормальной в G, иначе ее можно заменить на нильпотентную нормальную подгруппу B^G. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то $B = F$. Пусть P – минимальная нормальная в A подгруппа. По лемме 1.1 (1) $|P| = p$. Так как $P \le A_p \le F = B$ и B абелева, то P нормальна в G. По индукции G/P сверхразрешима, по лемме 1.1 (2) группа G сверхразрешима. □

***Лемма* 2.3.** *Пусть G – метанильпотентная группа. Тогда и только тогда коммутант* G' *нильпотентен, когда в G существует нормальная нильпотентная подгруппа W такая, что в фактор-группе* G/W *все силовские абелевы.*

Доказательство. Если коммутант G' нильпотентен, то при $G' = W$ в фактор-группе G/W все силовские абелевы. Обратно, пусть в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа W такая, что в фактор-группе G/W все силовские абелевы. Так как G – метанильпотентная группа, то существует нильпотентная нормальная подгруппа K с нильпотентной фактор-группой G/K. Теперь WK – нильпотентная нормальная в G подгруппа и фактор-группа

$$G/WK \simeq (G/K)/(WK/K),$$

$$G/WK \simeq (G/W)/(WK/W)$$

нильпотентна и все ее силовские подгруппы абелевы. Поэтому G/WK абелева, $G' \le WK$ и G' нильпотентна. □

***Лемма* 2.4.** *Пусть группа* $G = AB$ *является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда и только тогда коммутант* G' *нильпотентен, когда в G существует нормальная нильпотентная подгруппа W такая, что в фактор-группе* G/W *все силовские абелевы.*

Доказательство. По лемме 2.1 группа G метанильпотентна, и утверждение следует из леммы 2.3. □

Нам понадобятся известные признаки сверхразрешимости группы, факторизуемой сверхразрешимыми нормальными подгруппами. Сформулируем их в виде одной теоремы.

***Теорема* 2.5.** *Пусть группа* $G = AB$ *является произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *коммутант* G' *нильпотентен* [4, теорема Бэра];

(2) *группа G содержит нильпотентную нормальную подгруппу W и в фактор-группе* G/W *все силовские подгруппы абелевы* [6, теорема А.Ф. и Т.И. Васильевых];

(3) *индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты* [5, теорема Фризен];

(4) *любая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы из B нормальна в B* [9, теорема 2];

(5) *любая субнормальная в B подгруппа из B нормальна в B* [9, теорема 3];

(6) $A \cap B$ *нильпотентна*;

(7) *B метациклическая.*

Доказательство. 6. Пусть $A \cap B$ нильпотентна. Подгруппы A' и B' нильпотентны по лемме 1.1 (4) и нормальны в G. Так как A и B – нормальные подгруппы группы G, то $[A, B] \le A \cap B$ по лемме 1.3 (1). Следовательно, $[A, B]$ нильпотентна и нормальна в G. По лемме 1.3 (4) коммутант $G' = A'B'[A, B]$. Теперь коммутант G' – нильпотентная подгруппа и группа G сверхразрешима по теореме Бэра.

7. Пусть B метациклическая. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Если подгруппа B нильпотентна, то G сверхразрешима по лемме 2.2. Пусть B ненильпотентна. Тогда $B' \ne 1$ и B' нормальна в G. По условию подгруппа B метациклическая, поэтому B' циклическая. По индукции фактор-группа G/B' сверхразрешима, а по лемме 1.1 (2) группа G сверхразрешима. □

В следующей теореме доказывается, что в первых трех признаках требование нормальности подгрупп A и B можно ослабить до субнормальности.

***Теорема* 2.6.** *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если коммутант G' нильпотентен, то группа G сверхразрешима;*

(2) *если группа G содержит нильпотентную нормальную подгруппу W и в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы*, *то G сверхразрешима*;

(3) *если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты*, *то G сверхразрешима.*

Доказательство. Все три утверждения докажем с помощью индукции по порядку группы. Понятно, что надо считать $A \ne G \ne B$. Так как A и B субнормальны в G, то $A^G \ne G \ne B^G$. Ясно, что $G = A^G B^G$. По тождеству Дедекинда

$$A^G = A(A^G \cap B),\ B^G = (B^G \cap A)B.$$

Подгруппа A и B субнормальны в G, а так как A^G и B^G нормальны в G, то $A^G \cap B$ субнормальна в A^G и $B^G \cap A$ субнормальна в B^G.

Если коммутант G' нильпотентен, то нильпотентны коммутанты $(A^G)'$ и $(B^G)'$. По индукции подгруппы A^G и B^G сверхразрешимы, а по теореме Бэра группа $G = A^G B^G$ сверхразрешима.

Аналогично, если группа G содержит нильпотентную нормальную подгруппу W и в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы, то подгруппы A^G и B^G содержат нильпотентные нормальные подгруппы $W \cap A^G$ и $W \cap B^G$. Поскольку

$$A^G / (A^G \cap W) \simeq A^G W / W \le G / W,$$

$$B^G / (B^G \cap W) \simeq B^G W / W \le G / W,$$

то в фактор-группах $A^G / (A^G \cap W)$ и $B^G / (B^G \cap W)$ все силовские подгруппы абелевы. По индукции подгруппы A^G и B^G сверхразрешимы, а по теореме А.Ф. и Т.И. Васильевых группа $G = A^G B^G$ сверхразрешима.

Пусть индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты. Так как

$$|G : A| = |G : A^G| \cdot |A^G : A|,$$

$$|G : B| = |G : B^G| \cdot |B^G : B|,$$

то индексы подгрупп A^G и B^G в группе G взаимно просты. Кроме того, $|A^G : A|$ делит $|G : A|$, а $|B^G : B|$ делит $|G : B|$. Из равенств $G = A^G B$ и $G = AB^G$ следует

$$|A^G : A^G \cap B| = |G : B|,$$

$$|B^G : B^G \cap A| = |G : A|,$$

поэтому каждая из пар индексов $|A^G : A|$, $|A^G : A^G \cap B|$ и $|B^G : B|$, $|B^G : B^G \cap A|$ взаимно просты. По индукции подгруппы A^G и B^G сверхразрешимы, а по теореме Фризен группа $G = A^G B^G$ сверхразрешима. □

***Следствие* 2.6.1.** *Пусть A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если A холлова*, *то G сверхразрешима.*

Доказательство. Из равенства $G = AB$ следует, что $|G : B| = |A : A \cap B|$. Поэтому $|G : B|$ делит $|A|$. Так как подгруппа A холлова, то $(|G : A|, |A|) = 1$. Теперь индексы $|G : A|$ и $|G : B|$ взаимно просты, и G будет сверхразрешимой по теореме 2.6 (3). □

Не все признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B переносятся на группы с субнормальными сомножителями. Следующий пример указывает, что нормальность даже одного сомножителя в утверждениях 4–6 теоремы 2.5 нельзя ослабить до субнормальности.

***Пример* 2.1** [4, с. 186]. Пусть $E_{p^2} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – элементарная абелева группа порядка p^2,

$$D = \left\langle c, d \mid c^4 = d^2 = 1, c^d = c^3 \right\rangle -$$

диэдральная группа порядка 8, которая действует на E_{p^2} следующим образом:

$$a^c = b^{-1},\ b^c = a,\ a^d = b,\ b^d = a.$$

Пусть $G=[E_{p^2}]D_8$ – подгруппа из голоморфа E_{p^2}. Рассмотрим подгруппы

$$A=[E_{p^2}](\langle c^2\rangle\times\langle d\rangle),$$
$$H=[E_{p^2}](\langle c^2\rangle\times\langle cd\rangle),$$
$$B=[E_{p^2}](\langle cd\rangle).$$

Подгруппы A и H нормальны в G, поскольку $|G:A|=|G:H|=2$, а B нормальна в H, поэтому B субнормальна в G и $G=AH=AB$. Так как $\langle ab\rangle$ нормальна в A, а $\langle a\rangle$ нормальна в H, то A и H сверхразрешимы. Поскольку $a^{c^2}=a^{-1}$, то коммутант

$$G'=[E_{p^2}]\langle c^2\rangle=A\cap H$$

не нильпотентен и G несверхразрешима. Ясно, что $A\cap B=E_{p^2}$ нильпотентна. Так как

$$a^{cd}=(b^{-1})^d=a^{-1},\ b^{cd}=a^d=b,$$
$$B=([\langle a\rangle]\langle cd\rangle)\times\langle b\rangle,$$

то $G=A([\langle a\rangle]\langle cd\rangle)$, подгруппа $[\langle a\rangle]\langle cd\rangle$ субнормальна в G и удовлетворяет требованиям 4–6 теоремы 2.5. □

Наименьшее натуральное число m, для которого $G^{(m)}=1$, называется производной длиной разрешимой группы G и обозначается $d(G)$. Здесь $G^{(m)}=(G^{(m-1)})'$ – m-коммутант группы G.

***Теорема* 2.7.** *Пусть группа $G=AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $d(G/\Phi(G))\le 2$.*

Доказательство. Если группа G сверхразрешима, то ее коммутант нильпотентен, поэтому $G'\le F(G)$. Так как фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, то $d(G/\Phi(G))\le 2$.

Обратно, пусть группа $G=AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и $d(G/\Phi(G))\le 2$. Согласно лемме 2.1 (2) фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна и является произведением абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$. По теореме Ито [1, 4.9] $d(G/F(G))\le 2$. Фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, поэтому

$$d(F(G))=1+\max_{r\in\pi(\Phi(G))}d((\Phi(G))_r),$$
$$d(G)\le 3+\max_{r\in\pi(\Phi(G))}d((\Phi(G))_r).$$

В частности, $d(G/\Phi(G))\le 3$. Если $d(G/\Phi(G))=1$, то G нильпотентна. Если $d(G/\Phi(G))=2$, то $(G/\Phi(G))'$ абелева. Поскольку

$$(G/\Phi(G))'=G'\Phi(G)/\Phi(G)\simeq G'/G'\cap\Phi(G),$$

то G' нильпотентна [1, 3.24] и G сверхразрешима по теореме 2.6 (1). □

***Следствие* 2.7.1.** *Пусть группа $G=AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если группа G несверхразрешима, то $d(G/\Phi(G))=3$.*

***Теорема* 2.8.** *Пусть группа $G=AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $(G_r)'\le F(G)$ для каждого $r\in\pi(G:F(G)A)\cap\pi(G:F(G)B)$.*

Доказательство. Пусть группа G сверхразрешима. Тогда коммутант G' нильпотентен, $G'\le F(G)$ и $G/F(G)$ абелева. Поэтому $(G_r)'\le F(G)$ для каждого $r\in\pi(G)$.

Обратно, пусть $(G_r)'\le F(G)$ для каждого $r\in\pi(G:F(G)A)\cap\pi(G:F(G)B)$. Если

$$q\notin\pi(G:F(G)A)\cap\pi(G:F(G)B),$$

то $q\notin\pi(G:F(G)A)$ или $q\notin\pi(G:F(G)B)$. Поскольку $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$ абелевы по лемме 2.1 (2), то $G_qF(G)/F(G)$ абелева. Если

$$q\in\pi(G:F(G)A)\cap\pi(G:F(G)B),$$

то $G_qF(G)/F(G)$ абелева по условию. По лемме 2.1 (2) группа $G/F(G)$ нильпотентна, поэтому она абелева и $G'\le F(G)$. Теперь G сверхразрешима по теореме 2.6 (1). □

3 О произведении $F(G)$-субнормальных сверхразрешимых подгрупп

***Лемма* 3.1.** *Пусть G – метанильпотентная группа. Тогда и только тогда подгруппа H субнормальна в G, когда H является $F(G)$-субнормальной подгруппой в G.*

Доказательство. Если H субнормальна, то она $F(G)$-субнормальна. Обратно, пусть H является $F(G)$-субнормальной подгруппой в G. Тогда H субнормальна в $HF(G)$. Так как $G/F(G)$ нильпотентна, то $HF(G)$ субнормальна в G. Теперь H субнормальна в G. □

Это наблюдение позволяет в метанильпотентных группах требование субнормальности заменять $F(G)$-субнормальностью. Например, если в теоремах 2.6–2.8 условие субнормальности подгрупп A и B заменить $F(G)$-субнормальностью и дополнительно предположить, что группа G метанильпотентна, то группа G будет сверхразрешимой.

Следующий пример указывает, что разрешимая группа нильпотентной длины 3, факторизуемая $F(G)$-субнормальными подгруппами, одна из которых сверхразрешима, а другая нильпотентна, может быть несверхразрешимой.

***Пример* 3.1.** В группе $\mathrm{SL}(3,3)$ матрицы

$$a=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$c=b^a=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&1\\0&0&2\end{pmatrix},$$

удовлетворяют соотношениям:

$$a^3=b^2=1,\ bc=cb,\ c^a=bc,\ (bc)^a=b.$$

Подгруппа $\langle b,c\rangle$ является минимальной нормальной в группе $\langle a,b\rangle$ подгруппой порядка 4 и совпадает со своим централизатором. По [2, II.8.17] группа $\langle a,b\rangle=[\langle b,c\rangle]\langle a\rangle$ изоморфна знакопеременной группе степени 4. Пусть E – элементарная абелева группа порядка 3^3 и $G=[E]\langle a,b\rangle$ – группа из голоморфа. Рассматривая E как векторное пространство размерности 3 над полем из 3 элементов, а a и b как линейные преобразования получаем, что $\langle a,b\rangle$ действует неприводимо на E, подгруппа E является минимальной нормальной и $E=F(G)$. В частности, группа G несверхразрешима.

Рассмотрим подгруппу $H=[E]\langle b,c\rangle$. Она имеет порядок $3^3\cdot 4$ и ее силовская 2-подгруппа $\langle b,c\rangle$ элементарная абелева. По лемме 1.2 подгруппа H сверхразрешима. Теперь группа $G=H\langle a\rangle$, где $F(G)\le H$ и $\langle a\rangle$ субнормальна в $E\langle a\rangle$, т. е. подгруппы H и $\langle a\rangle$ $F(G)$-субнормальны. Таким образом, несверхразрешимая группа $G=H\langle a\rangle$ факторизуется $F(G)$-субнормальными подгруппами, одна из которых сверхразрешима, а другая имеет простой порядок. □

***Пример* 3.2.** $\mathrm{PSL}(2,7)=AB$ является произведением сверхразрешимой подгруппы A порядка 21 и подгруппы B порядка 8. Индексы подгрупп A и B взаимно просты. Поскольку $F(\mathrm{PSL}(2,7))=1$, то подгруппы A и B являются $F(G)$-субнормальными. □

Этот пример указывает, что группа, являющаяся произведением $F(G)$-субнормальных сверхразрешимых подгрупп взаимно простых индексов, может быть простой неабелевой группой. Следующий пример показывает, что в пунктах 2 и 3 теоремы 2.6 субнормальность сомножителей A и B нельзя заменить $F(G)$-субнормальностью.

***Пример* 3.3.** В группе $\mathrm{GL}(2,7)$ матрицы

$$a=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},$$

удовлетворяют соотношениям: $a^2=b^3=1,\ aba=b^2$. Поэтому $\langle a,b\rangle$ является неабелевой группой порядка 6, она изоморфна симметрической группе S_3 степени 3. Пусть E – элементарная абелева группа порядка 7^2 и $G=[E]\langle a,b\rangle$ – группа из голоморфа. Рассматривая E как векторное пространство размерности 2 над полем из 7 элементов, а a и b как линейные преобразования, получаем, что $\langle a,b\rangle$ действует неприводимо на E, подгруппа E является минимальной нормальной и $E=F(G)$. В частности, группа G несверхразрешима. Согласно [8, I.1.10] подгруппы $[E]\langle a\rangle$ и $[E]\langle b\rangle$ сверхразрешимы, а их индексы, они равны 3 и 2, взаимно просты. Так как $F(G)=E$, то $[E]\langle a\rangle$ и $[E]\langle b\rangle$ $F(G)$-субнормальны и

$$G=([E]\langle a\rangle)([E]\langle b\rangle).$$

Заметим, что в группе $G=[E]S_3$ все силовские подгруппы абелевы. □

Таким образом, из трех утверждений теоремы 2.6 только в теореме Бэра нормальность сомножителей можно ослабить до $F(G)$-субнормальности [7, теорема 2].

***Лемма* 3.2.** *Если в разрешимой группе G каждая силовская подгруппа $F(G)$-субнормальна, то G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что G – ненильпотентая группа и воспользуемся индукцией по порядку группы. Так как

$$F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G),$$

$$F(G/Z(G))=F(G)/Z(G),$$

то условия теоремы переносятся на $G/\Phi(G)$ и $G/Z(G)$, значит, можно считать $\Phi(G)=Z(G)=1$. Пусть H – произвольная ненормальная в G максимальная подгруппа. По теореме В.А. Ведерникова [10] существует силовская в G подгруппа P такая, что $N_G(P)\le H$, см. также [11]. По условию P является $F(G)$-субнормальной подгруппой в G, поэтому $F(G)\le N_G(P)\le H$ и $F(G)$ содержится в пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп, которое изучил Гашюц [12], см., также [2, с. 276]. Он установил, что

$$\Delta(G)/\Phi(G)=Z(G/\Phi(G)).$$

Теперь $F(G)\le Z(G)=1$, противоречие. □

Лемма 3.2 позволяет доказать следующую теорему А.Ф. Васильева и В.И. Мурашко.

***Теорема* 3.3** [7, теорема 1]. *Пусть группа $G=AB$ является произведением нильпотентных подгрупп A и B. Если A и B $F(G)$-субнормальны, то G нильпотентна.*

Доказательство. Группа G разрешима по теореме Виландта – Кегеля. Согласно [2, VI.4.7] для каждого $p\in\pi(G)$ и силовских p-подгрупп A_p и B_p из A и B соответственно произведение

A_pB_p является силовской p-подгруппой группы G. По условию A субнормальна в $AF(G)$, поэтому A_p субнормальна в $A_pF(G)$. Аналогично, B_p субнормальна в $B_pF(G)$. Теперь A_pB_p субнормальна в $A_pB_pF(G)$ и G нильпотентна по лемме 3.2. □

***Лемма* 3.4.** *Пусть группа* $G = AB$ *– произведение* $F(G)$ *-субнормальных подгрупп* A *и* B. *Если подгруппы* A', B' *и* $[A, B]$ *нильпотентны, то* G' *нильпотентна.*

Доказательство. По лемме 1.3 (4) коммутант $G' = A'B'[A, B]$. Так как $F(G') \le F(G)$ и подгруппа A' субнормальна в $AF(G)$, то A' субнормальна в $A'F(G')$, значит, A' $F(G')$-субнормальна в G'. Пусть $H = B'[A, B]$. Так как подгруппа $[A, B]$ нормальна в группе G и нильпотентна, то

$$[A, B] \le F(H) \cap F(G),$$
$$F(H) = (F(H) \cap B')[A, B].$$

По условию B субнормальна в $BF(G)$, поэтому B' субнормальна в $BF(G)$. Поскольку

$$B'F(H) = B'((F(H) \cap B')[A, B]) =$$
$$= B'[A, B] \le B'F(G) \le BF(G),$$

то B' субнормальна в $B'F(H)$, т. е. подгруппа B' $F(H)$-субнормальна в H. Теперь, подгруппа $H = B'[A, B]$ нильпотентна по лемме 3.3. Так как $F(G') \le F(G)$ и подгруппа B' субнормальна в $BF(G)$, то B' субнормальна в $B'F(G')$. Поэтому подгруппа H $F(G')$-субнормальна в G'. Теперь, $G' = A'H$ нильпотентна по лемме 3.3. □

Теперь из теоремы А.Ф. Васильева и В.И. Мурашко [7, теорема 2] получается

***Следствие* 3.4.1.** *Пусть группа* $G = AB$ *является произведением* $F(G)$ *-субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *группа G сверхразрешима*;

(2) *коммутант* G' *нильпотентен*;

(3) *подгруппа* $[A, B]$ *нильпотентна.*

Доказательство. В [7, теорема 2] доказана эквивалентность утв. (1) и (2). Утв. (2) и (3) эквивалентны в силу лемм 1.1 (4), 1.3 (4) и 3.4. □

***Следствие* 3.4.2.** *Пусть группа* $G = AB$ *является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *группа G сверхразрешима*;

(2) *коммутант* G' *нильпотентен*;

(3) *подгруппа* $[A, B]$ *нильпотентна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.
3. *Huppert*, B. Monomialle darstellung endlicher gruppen / B. Huppert // Nagoya Math. J. – 1953. – Vol. 3. – P. 93–94.
4. *Baer*, *R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
5. *Friesen*, *D.* Products of normal supersolvable subgroups / D. Freisen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, № 1. – P. 46–48.
6. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 11 (426). – С. 10–14.
7. *Мурашко*, *В.И.* О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2012. – № 4 (70). – С. 24–27.
8. Between Nilpotent and Soluble / H.G Bray [et al.]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.
9. *Монахов*, *В.С.* О p-сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 256–267.
10. *Ведерников*, *В.А.* О π-свойствах конечных групп / В.А. Ведерников // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: сб. науч. ст. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 13–19.
11. *Gritsuk*, *D.V.* About maximal subgroup of a finite solvable group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – Vol. 3, № 2. – P. 129–134.
12. *Gaschütz*, W. Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 160–170.

Поступила в редакцию 19.04.16.