Проблемы физики, математики и техники, № 3 (28), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ХОЛЛОВЫМИ ДОБАВЛЕНИЯМИ К НОРМАЛИЗАТОРАМ ВЫДЕЛЕННЫХ ПОДГРУПП

Т.В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON SOLVABILITY OF A GROUP WITH HALL SUPPLEMENTS TO NORMALIZERS OF ISOLATED SUBGROUPS

T.V. Borodich

F. Scorina Gomel State University

Пусть G конечная группа и $p \in \pi(G)$. Предположим, что для любого значения $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ нормализаторы силовских q-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями. При этих предположениях доказывается, что группа G разрешима.

Ключевые слова: *конечная группа*, *разрешимая группа*, *нильпотентная группа*, *холлова подгруппа*, *силовская подгруппа*, *нормализатор.*

Let G be finite group and $p \in \pi(G)$. Suppose that for all $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ normalizer Sylow q-subgroups has nilpotent Hall supplement. Under these assumptions, prove that G is solvable.

Keywords: *finite group*, *soluble group*, *nilpotent group*, *Hall subgroup*, *Sylow subgroup*, *normalizer.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Натуральное число, которое является степенью некоторого простого числа, называют примарным.

Добавление к подгруппе X в группе G называется подгруппа Y такая, что $G = XY$. Если $X \cap Y = 1$, то подгруппа Y называется дополнением к подгруппе X в группе G.

Добавление Y к подгруппе X в группе G называется:

– примарным, если порядок Y есть примарное число;

– холловым, если подгруппа Y холлова в группе;

– нильпотентным, если подгруппа Y нильпотентна в группе.

В работе 1968 г. [1] В.А. Ведерников доказал разрешимость группы, у которой порядки всех классов сопряженных силовских подгрупп есть степени простых чисел, теорема 5. Использовалась при доказательстве непростота таких групп, установленная П.И. Трофимовым в 1963 г., [2], теорема 6.

Напомним, что если порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора любой подгруппы из этого класса, то теорему В.А. Ведерникова можно сформулировать так: *если индексы нормализаторов силовских подгрупп в группе G примарны*, *то группа G разрешима.*

В такой формулировке эта теорема доказывалась в работах [3]–[5]. Более тщательное изучение групп с примарными индексами нормализаторов силовских подгрупп проведено Го Веньбином в [6]. В выше перечисленных работах классификация конечных простых групп не использовалась.

Го Веньбинь и Шам в работе 2005 г. [6] показали, что для разрешимости группы достаточно только примарность индексов нормализаторов силовских 2- и 3-подгрупп. Их доказательство основано на теореме Фисман [7], которая использует классификацию конечных простых групп.

В 2009 г. В.С. Монахов и Т.В. Бородич в своей работе [8] установили разрешимость группы G в том случае, когда нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями. Их доказательство основано на теореме Казарина [9], которая использует классификацию конечных простых групп.

Развивая данную тематику доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G группа и $p \in \pi(G)$. Если для любого значения $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ нормализаторы силовских q-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями*, *то группа G разрешима.*

При доказательстве используется теорема Казарина [9].

1 Вспомогательные утверждения

Все обозначения и определения понятны из текста и соответствуют принятым в [10]–[12].

Будем говорить, что подгруппа H не добавляема в группе G, если для любой подгруппы K группы G из условия $G = HK$ следует, что $K = G$. Через E_{p^n}, Z_n, D_n, A_n будем обозначать элементарную абелеву группу порядка p^n, циклическую, диэдральную группы порядка n, знакопеременную группу степени n. Под факторизацией группы будем понимать представление этой группы в виде произведения двух своих собственных подгрупп.

***Пример* 1.1.** *В условиях теоремы нельзя исключить два простых делителя из* $\pi(G)$. *Примером служит простая группа* A_5.

В данной группе нормализаторы силовских подгрупп имеют следующие порядки:

$$|N_G(G_2)| = 2^2 3,\ |N_G(G_3)| = 6,\ |N_G(G_5)| = 10.$$

Индексы нормализаторов силовских подгрупп

$$|G : N_G(G_2)| = 5,\ |G : N_G(G_3)| = 2 \cdot 5,$$
$$|G : N_G(G_5)| = 2 \cdot 3.$$

Таким образом, если мы исключим два простых делителя 3 и 5 из $\pi(A_5)$ и рассмотрим $\pi(A_5) \setminus \{3,5\}$, то нормализатор силовской 2-подгруппы обладает циклическим дополнением и условие теоремы для группы A_5 справедливо, противоречие.

***Пример* 1.2.** *В условиях теоремы нельзя рассматривать вместо нильпотентных добавлений к нормализаторам силовских подгрупп разрешимые добавления. Примером служит простая группа* $PSL(2,7)$.

В данной группе нормализаторы силовских подгрупп имеют следующие порядки:

$$|N_G(G_2)| = 2^3,\ |N_G(G_3)| = 2 \cdot 3,\ |N_G(G_7)| = 3 \cdot 7.$$

Индексы нормализаторов силовских подгрупп

$$|G : N_G(G_2)| = 3 \cdot 7,\ |G : N_G(G_3)| = 2^4 7,$$
$$|G : N_G(G_7)| = 2^3.$$

Таким образом, если мы исключим делитель 3, тогда условие теоремы для $\pi(PSL(2,7)) \setminus \{3\}$ условие теоремы справедливо, но группа $PSL(2,7)$ является простой, противоречие.

***Лемма* 1.1** [13, лемма 4]. *Пусть A, B и N – подгруппы группы G, причем A холлова, а N нормальна. Если $G = AB$, то*

$$N = (A \cap N)(B \cap N).$$

***Лемма* 1.2.** *Группа* $G = SL(2,2^n)$, $p \in \pi(G)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ *имеет циклическое дополнение порядка* 2^n+1 *и диэдральное добавление порядка* $2(2^n+1)$;

2) *если p делит* 2^n-1, *то подгруппа* $N_G(G_p)$ *не добавляема в* G;

3) *если p делит* 2^n+1, *то подгруппа* $N_G(G_p) = D_{2(2^n+1)}$ *имеет добавление, изоморфное*

$$N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1};$$

4) *нормализатор силовской p-подгруппы не имеет дополнения в группе* G.

Других факторизаций группы $G = SL(2,2^n)$ *с участием в качестве сомножителей нормализаторов силовских 2- и p-подгрупп нет.*

Доказательство. По теореме 0.8 [14] группа $G = SL(2,2^n)$ допускает только следующие факторизации: $G = N_G(G_2)D_{2(2^n+1)} = N_G(G_2)Z_{2^n+1}$, где $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$. Таким образом, справедливо утверждение 1.

Если p делит 2^n-1, то p не делит 2^n+1 и силовская p-подгруппа содержится в $N_G(G_2)$. Поэтому подгруппа $N_G(G_p)$ не добавляема в G и справедливо утверждение 2.

Пусть p не делит 2^n-1. Тогда p делит 2^n+1 и силовская p-подгруппа содержится в $D_{2(2^n+1)}$. Поэтому $G = SL(2,2^n) = N_G(G_p)N_G(G_2)$ и справедливо утверждение 3. В частности, нормализатор силовской p-подгруппы не имеет дополнения в группе G, т. е. справедливо утверждение 4.

***Лемма* 1.3** [8, лемма 4]. *Группа*

$$G = PSL(2,p^n),\quad p > 2,$$

обладает только следующими факторизациями с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 2-подгруппы:

1) *при* $p^n+1 = 2^k$ *подгруппа* $N_G(G_2) = D_{2^k}$ *имеет дополнение, изоморфное* $[E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$;

2) *при* $p = 11$ *подгруппа* $N_G(G_2) = [E_4]Z_3$ *имеет дополнение, изоморфное* $[Z_{11}]Z_5$.

***Лемма* 1.4.** *В группе* $PSL(3,q)$, $q < 9$, *нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает добавлением, отличным от всей группы.*

Доказательство. 1) Если $q = 3$, то согласно пункту 2 теоремы 1 [15] группа факторизуется следующим образом $G = AB = AB_1 = CB$, где подгруппы A, B, B_1, C имеют следующие порядки соответственно: $2^4 \cdot 3^3$, $3 \cdot 13$, 13, $2^4 \cdot 3^2$. Согласно [15] $|N_G(G_2)| = 2^4$. По условию леммы $G = N_G(G_2)H$, где H – собственная подгруппа, то $3^3 \cdot 13$ должно делить порядок подгруппы $|H|$. Из приведенных факторизаций получаем, что $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

2) Если $q = 4$, то по пункту 1 теоремы 1 [15] группа не факторизуема. Следовательно $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

3) Если $q = 5,$ то согласно пункту 2 теоремы 1 [15] группа факторизуется следующим образом $G = AB = AB_1,$ где подгруппы

$$|A| = 2^5 \cdot 3 \cdot \cdot 5^3, \ |B| = 3 \cdot 31, \ |B_1| = 31.$$

Согласно [15] $|N_G(G_2)| = 2^5.$ Если $G = N_G(G_2)H,$ где H – собственная подгруппа, то $3 \cdot 5^3 \cdot 31$ должно делить порядок подгруппы H. Из приведенных факторизаций получаем, что $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

4) Если $q = 7,$ то по пункту 1 теоремы 1 [15] группа не факторизуема. Следовательно $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

5) Если $q = 8,$ то согласно пункту 2 теоремы 1 [15] группа факторизуется следующим образом $G = AB = AB_1,$ где подгруппы

$$|A| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot \cdot 7^2, \ |B| = 3 \cdot 73, \ |B_1| = 73.$$

Следовательно $|N_G(G_2)| = 2^9 \cdot 7^2.$ Если $G = N_G(G_2)H,$ где H – собственная подгруппа, то $3^2 \cdot 73$ должно делить порядок подгруппы $|H|$. Из приведенных факторизаций получаем, что $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

Таким образом группа $PSL(3,q),$ $q < 9,$ факторизациями с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 2-подгруппы не обладает.

***Лемма* 1.5.** *Группа* $PSU(3,8^2)$ *не факторизуема.*

Доказательство. Все факторизации группы $PSU(3,q^2)$ известны, они указаны в теореме 2 [15]. При $q \neq 3$ и $q \neq 5$ группа $PSU(3,q^2)$ не факторизуема.

***Лемма* 1.6** [8, лемма 8]. *В группах* $PSp(4,3)$ *и* $PSL(4,2)$ *нормализаторы силовских 2-подгрупп не обладают разрешимыми добавлениями.*

***Лемма* 1.7.** *В группе* M_{11} *нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает добавлением, отличным от всей группы.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1.1 [16], в которой перечислены все факторизации группы M_{11}.

***Лемма* 1.8** [17, теорема 2.3]. *Пусть конечная группа* G *имеет* S_π*-подгруппу* $(2 \in \pi)$ $M = O_2(M) \times O(M)$. *Тогда* G *является* D_π*-группой. Если* $\pi^* = \pi \setminus \{2\} \neq \varnothing,$ *то* G – π^**-разрешима.*

***Лемма* 1.9.** *В простой группе* G *с* $q \in \pi(G) \setminus \{p\},$ *где* $p \in \pi(G),$ *нормализатор силовской* q*-подгруппы не обладает нильпотентным холловым добавлением.*

Доказательство. Пусть G – простая группа с $q \in \pi(G) \setminus \{p\},$ где $p \in \pi(G).$ Возможны следующие случаи:

1) Если $p \notin \{2;3\},$ то группа разрешима по теореме 2 [16].

2) Пусть $p = 3.$ В этом случае группа разрешима или $2 \in \pi(G)$ и группа G является произведением разрешимой подгруппы $N_G(G_2)$ и нильпотентного добавления, поэтому применима теорема Казарина [9]. По этой теореме группа G принадлежит следующему списку простых групп: $PSL(2,q),$ $q > 3;$ $PSL(3,q),$ $q < 9;$ $PSL(4,2);$ $M_{11};$ $PSp_4(3);$ $PSU(3,8).$ В виду лемм 1.3–1.7 нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает холловым нильпотентным добавлением во всех перечисленных группах, за исключением группы $SL(2,2^n).$ По лемме 1.2 нормализатор силовской 2-подгруппы имеет циклическое дополнение порядка $2^n + 1$ и диэдральное добавление порядка $2(2^n + 1).$ Так как диэдральная подгруппа порядка $2(2^n + 1)$ не нильпотентна, тогда нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает холловым нильпотентным добавлением. В случае, когда нормализатор силовской 2-подгруппы имеет циклическое дополнение порядка $2^n + 1,$ дополнение будет холловым нильпотентным, когда $2^n + 1 = r^s,$ где $s \geq 1.$ В этом случае найдется простой делитель $q \in \pi(G) \setminus \{3\},$ $q \neq 2.$ По лемме 1.2 нормализатор $N_G(G_q)$ имеет добавление, когда q делит $2^n + 1,$ добавление изоморфно подгруппе $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n - 1},$ но оно не нильпотентно. Таким образом, условие теоремы в этом случае справедливо.

3) Пусть $p = 2.$ В этом случае имеем, что группа $G = N_G(G_q)H,$ где H – нильпотентная холлова подгруппа. Если подгруппа H нечетного порядка, то группа G – 2-нильпотентна по тереме А.С. Кондратьева [18]. Если подгруппа H четного порядка, то по лемме 1.8 подгруппа $H = G_2.$ Следовательно группа имеет вид $G = N_G(G_q)G_2.$ Тогда для любого значения r из $\pi(G) \setminus \{2\},$ порядок силовской r-подгруппы $|G_r|$ делит порядок $|N_G(G_q)|,$ значит

$$G_r \subseteq N_G(G_q).$$

Не теряя общности мы получаем, что для любого значения $r \in \pi(G) \setminus \{2,3\}$ подгруппа $G_r \subseteq N_G(G_3).$ Согласно теореме 2 [19] группа разрешима или изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,7);$ $PSU(3,q),$ где q – нечетно, $q \equiv -1 (mod 4),$ $q - 1 = 3m$ и $(3,m) = 1;$ $PSU(3,q),$ где q – четно, $q - 1 = 3m$ и $(3,m) = 1;$ $Sz(2^{2n+1}).$ Согласно примеру 1.2 группа $PSL(2,7)$ исключается. Согласно теореме 2 [15] группа $PSU(3,q)$

факторизуется, если $q=3$ или $q=5$, и не факторизуется в противном случае. Если $q=3$ или $q=5$, то нарушается условие $q-1=3m$. Следовательно группу $PSU(3,q)$ исключаем из рассмотрения. Согласно лемме 1.3 [20] группа Сузуки $Sz(2^{2n+1})$ не факторизуется. Полученное противоречие доказывает лемму.

***Следствие* 1.1.** *Если в группе* G *с* $q\in\pi(G)\setminus\{p\}$, *где* $p\in\pi(G)$, *нормализатор силовской q-подгруппы обладает нильпотентным холловым добавлением, то группа G непроста.*

***Следствие* 1.2.** *Пусть G группа и нечетное число* $p\in\pi(G)$. *Если для любого значения* $q\in\pi(G)\setminus\{p\}$ *нормализатор силовской q-подгруппы обладает разрешимым добавлением, то группа* G *изоморфна* $SL(2,2^n)$, *где 3 делит* 2^n+1 *и* $p^l=2^n-1$.

2 Доказательство основного результата

Теорема. *Пусть* G *группа и* $p\in\pi(G)$. *Если для любого значения* $q\in\pi(G)\setminus\{p\}$ *нормализаторы силовских q-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями, то группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что G – не простая группа и пусть N – её нормальная нетривиальная подгруппа. Пусть G_p – силовская p-подгруппа группы G. Тогда $N_p=G_p\cap N$ – силовская p-подгруппа в N. По условию $G=N_G(G_p)K$, где K – холлово нильпотентное добавление к $N_G(G_p)$. По лемме 1.1

$$N=(N\cap N_G(G_p))(N\cap K).$$

Подгруппа $N\cap K$ является холловой в K. Так как K холлова нильпотентная подгруппа в G, тогда $(N\cap K)$ холлова нильпотентная подгруппа в N. Кроме того, $N_p=G_p\cap N$ – нормальная подгруппа в $N\cap N_G(G_p)$, поэтому

$$N\cap N_G(G_p)\subseteq N_N(N_p) \text{ и } N=N_N(N_p)(N\cap K),$$

где $(N\cap K)$ холлово нильпотентное добавление к $N_N(N_p)$ в N.

Пусть G_pN/N – силовская p-подгруппа в группе G/N. Так как $G=N_G(G_p)K$ и

$$N_G(G_p)N/N=N_{G/N}(G_pN/N),$$

то $G/N=(N_{G/N}(G_pN/N))(KN/N)$.

Поскольку N холлово нильпотентное добавление к $N_G(G_p)$ в группе G, тогда $KN/N\simeq$ $\simeq K/K\cap N$ холлово нильпотентное добавление к $N_{G/N}(G_pN/N)$ в G/N.

Таким образом подгруппа N и фактор-группа G/N удовлетворяют условию теоремы и по индукции они разрешимы. Поэтому сама группа G разрешима.

Пусть G – простая группа. По лемме 1.9 группа, удовлетворяющая условию теоремы, не проста.

Следствие. *Пусть* G *группа и* $p\in\pi(G)$. *Если для любого значения* $q\in\pi(G)\setminus\{p\}$ *индекс нормализатора каждой силовской q-подгруппы примерен, то группа* G *разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ведерников*, *В.А.* О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / В.А. Ведерников // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. VIII, № 6. – С. 1236–1244.
2. *Трофимов*, *П.И.* О признаках непростоты и разрешимости конечных групп / П.И. Трофимов // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. II, № 6. – С. 876–881.
3. *Buchthal*, *D.* On factorized groups / D. Buchthal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 183. – P. 425–432.
4. *Zhang*, *J.* Sylow numbers of finite groups / J. Zhang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 176. – P. 111–123.
5. *Guo*, *W.* Finite groups with given indices of normalizers of Sylow subgroups / W. Guo // Siberian Math. J. – 1996. – Vol. 37. – P. 207–214.
6. *Guo*, *W.* A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2-, 3-sugroups are prime power induces / W. Guo, K.P. Shum // Journal of Applied Algebra and Discrete Structures. – 2005. – Vol. 3, № 1. – P. 1–9.
7. *Fisman*, *E.* On the product of two finite solvable groups / *E. Fisman* // J. Algebra. – 1983. – Vol. 80. – P. 517–536.
8. *Монахов*, *В.С.* О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / В.С. Монахов, Т.В. Бородич // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 2. – С. 227–233.
9. *Kazarin*, *L.S.* Groups which are the product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. – Vol. 14, № 6. – P. 1001–1066.
10. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 208 с.
11. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978. – 272 с.
12. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / *B. Huppert*. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967. – 792 s.
13. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы с холловыми добавлениями к примитивным подгруппам / В.С. Монахов // Сибирский матем. журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 359–368.

14. *Монахов*, *В.С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 70–100.

15. *Blaum*, *M.* Factorizations of the simple groups $PSL(3,q)$ and $PSU(3,q^2)$ / M. Blaum // Arch. Math. – 1983. – Vol. 40. – P. 8–13.

16. *Giudici*, *M.* Factorisations of sparadic simple groups / M. Giudici // Journal of Algebra. – 2006. – Vol. 304. – P. 311–324.

17. *Казарин*, *Л.С.* Автоморфизмы, факторизации и теоремы типа Силова / Л.С. Казарин // Матем. сборник. – 1983. – Т. 120 (162), № 2. – С. 190–199.

18. *Кондратьев*, *А.С.* Критерий 2-нильпотентности конечных групп / А.С. Кондратьев // Подгрупповая структура групп. Свердловск. – 1988. – С. 82–84.

19. *Тютянов*, *В.Н.* Конечные группы с бипримарными холловыми подгруппами и их факторизации / В.Н. Тютянов, Т.В. Тихоненко. – Гомель: ГГУ, 2010. – 7 с. – (Препринт / Гомел. гос. ун-т).

20. *Монахов*, *В.С.* Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп / В.С. Монахов // В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1978. – С. 50–63.

Поступила в редакцию 28.03.16.