5. L. Machta. Fallout Program. Quarterly Summary Report, HASL-142, 1964, p. 300.
6. K. Telegadas, R. List. J. Geophys. Res., 69, 4741 (1964).
7. L. Salter. Fallout Program. Quarterly Summary Report, HASL-142, 1964, p. 303.
8. W. Collins. Ibidem, HASL-132, 1963, p. 242.
9. H. Volchok. Ibidem, HASL-165, 1966, p. 312.
10. А. К. Лаврухина и др. Радиохимический анализ. М., Изд-во АН СССР, 1963.
11. J. Devoe. The Radiochemistry of Cadmium, USAEC, NAS-NS 3001 (1960).
12. В. Гиллебранд, Г. Лендель. Практическое руководство по неорганическому анализу. М., ОНТИ, 1935.
13. McCallum, R. Woodward. Nature, **209**, 69 (1966).
14. Fallout Program. Quarterly Summary Report, HASL-173, 1966, p. B-14.

Теорема об интеграле реактивности

УДК 621.039.51.

Э. А. СТУМБУР

Функцию распределения потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})$ в критическом реакторе без посторонних источников можно определить стационарным кинетическим уравнением Больцмана

$$\mathbf{\Omega}\nabla\varphi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\varphi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) = \int dE' \int d\mathbf{\Omega}'\varphi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}')[\chi(E)\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E') + \Sigma_s(\mathbf{r}; E', \mathbf{\Omega}' \longrightarrow E, \mathbf{\Omega})]. \quad (1)$$

В отличие от самого общего случая [1] здесь делается предположение об изотропном спектре деления $\chi(E)$, не зависящем от энергии делящего нейтрона и нормированном на $1/4\pi$. Зависимость $\nu(E)$ неявно входит в $\nu\Sigma_f(E)$, сечение Σ_s включает в себя все виды рассеяния, а источники запаздывающих нейтронов не учитываются.

Граничное условие на внешней поверхности S реактора (считаем ее выпуклой и однородной) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}_S, E, \mathbf{\Omega}) = 0 \text{ при } \mathbf{\Omega n} < 0. \quad (2)$$

Уравнение для сопряженной функции $\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})$ записывается в аналогичном виде [2] с изменением знака градиента в левой части выражения (1) и заменой величин со штрихами в квадратной скобке правой части этого уравнения на величины без штрихов. Граничным условием при этом будет

$$\varphi^+(\mathbf{r}_S, E, \mathbf{\Omega}) = 0 \text{ при } \mathbf{\Omega n} > 0. \quad (3)$$

Назовем **коэффициентом реактивности** материала реактора в точке $\mathbf{r}$ величину

$$K(\mathbf{r}) \equiv \int dE \int d\mathbf{\Omega}\varphi^+\mathbf{\Omega}\nabla\varphi \equiv (\varphi^+, \mathbf{\Omega}\nabla\varphi), \quad (4)$$

где скобками обозначено скалярное произведение в смысле интегрирования по E и $\mathbf{\Omega}$ [3]. Смысл такого определения заключается в том, что $K(\mathbf{r})$ с точностью до знака и «нормирующего» множителя (ЦНД [1], постоянной для каждого данного реактора) описывает объемную плотность изменения $k_{эфф}$ в рамках теории малых возмущений.

Действительно, произведем в критическом реакторе возмущение — изменим сечения в бесконечно малом объеме dV:

$$\left.\begin{aligned} &\delta[\Sigma_t(\mathbf{r}, E)] = -\Sigma_t(\mathbf{r}, E);\\ &\delta[\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E)] = -\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E);\\ &\delta[\Sigma_s(\mathbf{r}; E', \mathbf{\Omega}' \longrightarrow E, \mathbf{\Omega})] =\\ &= -\Sigma_s(\mathbf{r}; E', \mathbf{\Omega}' \longrightarrow E, \mathbf{\Omega}). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Физически это означает, что из объема dV удаляются все вещества. При этом изменение $k_{эфф}$ (согласно теории малых возмущений, когда φ и φ^+ принимаются равными решениям невозмущенных уравнений) подчиняется соотношению [2]

$$-\text{ЦНД}\frac{d}{dV}\left(\frac{1}{k_{эфф}}\right) = \int dE \int d\mathbf{\Omega}\left\{\int dE' \int d\mathbf{\Omega}'[\chi(E)\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E') + \Sigma_s(\mathbf{r}; E', \mathbf{\Omega}' \longrightarrow E, \mathbf{\Omega})]\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\varphi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}') - \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\varphi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\right\} \equiv \{\Sigma\Phi\} = K(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Здесь

$$\text{ЦНД} \equiv \int dV \int dE \int d\mathbf{\Omega} \int dE' \int d\mathbf{\Omega}'\chi(E) \times \nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E')\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\varphi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}')$$

интегральная ценность нейтронов деления; $\{\Sigma\Phi\}$ — условное обозначение интегралов, выражающих $K(\mathbf{r})$ в явной форме.

Интегралом реактивности назовем функционал J, представляющий интеграл величины $K(\mathbf{r})$ по всему объему реактора:

$$J \equiv \int K(\mathbf{r})\,dV \equiv \int(\varphi^+, \mathbf{\Omega}\nabla\varphi)\,dV. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим градиент $\nabla K(\mathbf{r})$, представив его в форме

$$\nabla K(\mathbf{r}) = \{\Sigma\nabla\Phi\} + \{\Phi\nabla\Sigma\}, \quad (8)$$

где

$$\{\Sigma\nabla\Phi\} \equiv \int dE \int d\mathbf{\Omega} \int dE' \int d\mathbf{\Omega}'\{[\chi(E)\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E') + \Sigma_s(\mathbf{r}; E', \mathbf{\Omega}' \longrightarrow E, \mathbf{\Omega})]\operatorname{grad}[\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\varphi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}')]\} - \int dE \int d\mathbf{\Omega}\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\operatorname{grad}[\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\varphi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})]; \quad (9)$$

$$\{\Phi\nabla\Sigma\} \equiv \int dE \int d\mathbf{\Omega} \int dE' \int d\mathbf{\Omega}'\{\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}) \times \varphi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}')\operatorname{grad}[\chi(E)\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E') + \Sigma_s(\mathbf{r}; E', \mathbf{\Omega}' \longrightarrow E, \mathbf{\Omega})]\} - \int dE \int d\mathbf{\Omega}\varphi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\varphi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})\operatorname{grad}\Sigma_t(\mathbf{r}, E). \quad (10)$$

Величина $\{\Sigma\nabla\Phi\}$ может быть получена еще одним способом: если умножить уравнение (1) на $\nabla\varphi^+$, а сопряженное уравнение — на $\nabla\varphi$, затем результаты сложить и проинтегрировать по E и $\mathbf{\Omega}$, то получим

$$(\nabla\varphi^+, \mathbf{\Omega}\nabla\varphi) - (\nabla\varphi, \mathbf{\Omega}\nabla\varphi^+) = \{\Sigma\nabla\Phi\}. \quad (11)$$

Теперь рассмотрим скалярное произведение (в смысле обычных векторов) $\mathbf{r}$ и ∇K, пользуясь для $K(\mathbf{r})$ определением (4):

$$\mathbf{r}\nabla K = (\mathbf{r}\nabla\varphi^+, \mathbf{\Omega}\nabla\varphi) + (\varphi^+, \mathbf{r}\nabla(\mathbf{\Omega}\nabla\varphi)). \quad (12)$$

Применив векторное тождество

$$\mathbf{r}\nabla(\mathbf{\Omega}\nabla\varphi) = \mathbf{\Omega}\nabla(\mathbf{r}\nabla\varphi) - \mathbf{\Omega}\nabla\varphi, \quad (13)$$

представим интеграл по всему объему реактора от второго члена в выражении (12) следующим образом [4]:

$$\int (\varphi^+, \mathbf{r}\nabla(\mathbf{\Omega}\nabla\varphi))\, dV = \int dS \int dE \int d\mathbf{\Omega}\, (\mathbf{\Omega n})\, \varphi^+ (\mathbf{r}\nabla\varphi) - $$
$$- \int (\mathbf{r}\nabla\varphi, \mathbf{\Omega}\nabla\varphi^+)\, dV - \int (\varphi^+, \mathbf{\Omega}\nabla\varphi)\, dV. \quad (14)$$

Здесь первый интеграл в правой части берется по внешней поверхности реактора, интегрирование по E и $\mathbf{\Omega}$ записано в явной форме, а скобки указывают обычное скалярное произведение векторов.

Из соотношений (11), (12), (14) и обозначений (7) и (8) следует:

$$J = -\int \mathbf{r}\{\Phi\nabla\Sigma\}\, dV + \int dS \int dE \int d\mathbf{\Omega}\, (\mathbf{\Omega n})\, \varphi^+ (\mathbf{r}\nabla\varphi). \quad (15)$$

Если учесть граничные условия (2) и (3), то поверхностный интеграл

$$\int dS \int dE \int d\mathbf{\Omega}\, (\mathbf{\Omega n})\, \varphi^+ (\mathbf{r}\nabla\varphi) = \int K(\mathbf{r})\, (\mathbf{rn})\, dS. \quad (16)$$

Вместе с тем, если рассматривать $\nabla\Sigma$ как градиент от обобщенной функции координат (в смысле Соболева — Шварца [5]), то на поверхности реактора

$$\{\Phi\langle\nabla\Sigma\rangle_S\} = -\mathbf{n}\{\Phi\Sigma\}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_S) = -\mathbf{n}K(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_S).$$

Тогда выражение (15) можно записать в компактной форме:

$$J = -\int \mathbf{r}\{\Phi\langle\nabla\Sigma\rangle\}\, dV, \quad (17)$$

где угловыми скобками обозначен градиент от обобщенной функции $\Sigma(\mathbf{r})$, который автоматически дает второй интеграл выражения (15), а при наличии и внутри реактора областей со скачками свойств на их границах позволяет корректно описать вклад этих областей в интеграл реактивности.

Таким образом, для практически важных случаев, когда весь реактор состоит из отдельных гомогенных областей, можно сформулировать следующую теорему: **«Интеграл реактивности для критической системы равен утроенной сумме скачков ΔK_j коэффициентов реактивности на поверхностях его гомогенных областей (включая и наружную границу реактора), умноженных на объемы V_j, ограниченные этими поверхностями»**. Действительно, на каждой поверхности S_j, разделяющей две среды, имеем

$$\{\Phi\langle\nabla\Sigma\rangle_{S_j}\} = -\mathbf{n}\{\Phi(\Sigma_{int} - \Sigma_{ext})\}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_j}) \equiv$$
$$\equiv -\mathbf{n}\Delta K_j\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_j}).$$

Отсюда следует (согласно известному равенству [4]):

$$\int\limits_{V_j} (\mathbf{rn})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_j})\, dV = \oint\limits_{S_j} (\mathbf{rn})\, dS = 3V_j;$$

в этом случае интеграл реактивности

$$J = 3\sum_j \overline{\Delta K}_j V_j. \quad (18)$$

Разумеется, скачки $\overline{\Delta K}_j$ должны быть соответственно усреднены по всей поверхности S_j каждой гомогенной области.

В некоторых частных случаях теорема принимает весьма прозрачную форму. Так, для гомогенного сферического реактора без отражателя

$$\int\limits_0^q K(r)\, r^2\, dr = K(q)\, q^3, \quad (19)$$

где q — критический радиус. Для сферического реактора с гомогенной активной зоной радиуса ρ и при наружном радиусе отражателя R

$$\int\limits_0^\rho K_{\text{а. з}}(r)\, r^2\, dr + \int\limits_\rho^R K_{\text{о}}(r)\, r^2\, dr =$$
$$= [K_{\text{а. з}}(\rho) - K_{\text{о}}(\rho)]\,\rho^3 + K_{\text{о}}(R)\, R^3, \quad (20)$$

где $K_{\text{а. з}}(r)$ и $K_{\text{о}}(r)$ — коэффициенты реактивности для материалов активной зоны и отражателя соответственно.

Сформулированная выше теорема в общей форме (17) или в практически важном частном виде (18) может быть использована при анализе различных теоретических и экспериментальных реакторных проблем. Например, для определения потоков на границах сред, зависимостей критических размеров от пористости активной зоны или отражателя, проверки методики гомогенизации в гетерогенных системах, проверки многогрупповых численных расчетов и т. д.

Поступило в Редакцию 13/III 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Усачев. В сб. «Реакторостроение и теория реакторов». М., Изд-во АН СССР, 1955 г.
2. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
3. Г. И. Марчук, В. В. Орлов. В сб. «Нейтронная физика». М., Госатомиздат, 1961.
4. Н. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., ГОНТИ, 1938.
5. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Второй специальный курс. М., «Наука», 1965.