

УДК 511.542

КОНЕЧНЫЕ ОБОБЩЕННО C -СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ И ИХ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Е.Н. Мысловец, А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GENERALIZED C -SUPERSOLUBLE GROUPS AND THEIR MUTUALLY PERMUTABLE PRODUCTS

E.N. Myslovets, A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Конечная группа G называется ca - \mathfrak{F} -группой, если каждый ее неабелевый главный фактор является простой группой и $H/K \times C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ для каждого абелевого главного фактора группы G . В работе найдена структура конечной ca - \mathfrak{F} -группы при предположении, что \mathfrak{F} является насыщенной формацией разрешимых групп. Изучены свойства произведений взаимно перестановочных ca - \mathfrak{F} -групп.

Ключевые слова: конечная группа, ca - \mathfrak{F} -группа, композиционная формация, взаимно перестановочное произведение подгрупп.

Let \mathfrak{F} be a class of groups. A finite group G is called a ca - \mathfrak{F} -group if its every non-abelian chief factor is simple and $H/K \times C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ for every abelian chief factor H/K of G . In this paper the structure of finite ca - \mathfrak{F} -groups under the assumption that \mathfrak{F} is a soluble saturated formation is found. Properties of mutually permutable products of finite ca - \mathfrak{F} -groups are studied.

Keywords: finite group, ca - \mathfrak{F} -group, composition formation, mutually permutable products of subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие композиционной формации было впервые введено Л.А. Шеметковым в [1] и Р. Бэром в неопубликованной рукописи (отмечено в [2, IV, С. 370]). Всякая насыщенная формация является композиционной. Класс всех квазинильпотентных групп является примером ненасыщенной композиционной формации. Го Вэньбинем и А.Н. Скибой в [3], [4] было предложено интересное обобщение квазинильпотентности – конструкция квази- \mathfrak{F} -групп. В [3] они доказали, что класс всех квази- \mathfrak{F} -групп является композиционной формацией, если \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. В [3], [4] были также рассмотрены некоторые приложения формации квази- \mathfrak{F} -групп.

В.А. Ведерников в [5] ввел понятие c -сверхразрешимой группы. Напомним, что группа G называется c -сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого изоморфны простым группам. В [6] А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой было доказано, что класс \mathfrak{U}_c всех c -сверхразрешимых групп является композиционной, но ненасыщенной формацией. В [7] Д. Робинсон установил структурные свойства c -сверхразрешимых групп (в терминологии [7] SC -групп).

В [8] было введено следующее обобщение c -сверхразрешимости.

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Напомним [9], что главный фактор H/K группы G называется \mathfrak{F} -центральным, если $H/K \times G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$.

Определение 0.1 [8]. Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Будем говорить, что группа G является ca - \mathfrak{F} -группой, если ее каждый неабелевый главный фактор является простой группой, а каждый абелевый главный фактор H/K \mathfrak{F} -централен.

Класс всех ca - \mathfrak{F} -групп обозначается через \mathfrak{F}_{ca} . В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, получим формацию \mathfrak{U}_c всех c -сверхразрешимых групп. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{NA}$, получим формацию \mathfrak{NA}_{ca} , состоящую из всех групп G , у которых неабелевые главные факторы изоморфны простым группам, а для каждого абелевого главного фактора H/K группы G группа автоморфизмов $Aut_G(H/K)$ абелева. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, то класс \mathfrak{F}_{ca} совпадает с классом всех $SNAC$ -групп [7], т. е. классом всех групп, у которых неабелевые главные факторы – простые группы.

Класс всех ca - \mathfrak{F} -групп образует композиционную формацию [8]. Также в [8] были установлены свойства произведений нормальных ca - \mathfrak{F} -подгрупп.

Напомним [9, §8], что через $Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$ обозначается \mathfrak{F} -гиперцентр группы G – произведение всех нормальных подгрупп H из G , нормальные G -допустимые факторы которых \mathfrak{F} -центральны в G .

Следующая теорема является расширением результата Робинсона [7] для случая, когда \mathfrak{F} – разрешимая насыщенная формация.

Теорема А. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая насыщенная формация. Группа G является sa - \mathfrak{F} -группой тогда и только тогда, когда G удовлетворяет следующим утверждениям:

- 1) $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{S}}$;
- 2) если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то $G^{\mathfrak{F}} / Z(G^{\mathfrak{F}})$ является прямым произведением G -инвариантных неабелевых простых групп;
- 3) $Z(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Следуя работе [10], группу $G = HK$ будем называть произведением взаимно перестановочных подгрупп H и K , если H перестановочна с любой подгруппой из K , а K перестановочна с любой подгруппой из H . Взаимно перестановочные произведения сверхразрешимых и s -сверхразрешимых подгрупп изучались во многих работах различных авторов (см. монографию [11]). Ряд работ был посвящен рассмотрению случая, когда группа $G = HK$ является произведением взаимно перестановочных подгрупп H и K , которые принадлежат насыщенной формации \mathfrak{F} . Поэтому естественной является следующая проблема.

Проблема. Пусть \mathfrak{F} – композиционная формация. Какова структура группы $G = HK$, где H и K – взаимно перестановочные \mathfrak{F} -подгруппы группы G .

В данной работе эта проблема решается для формации sa - \mathfrak{F} -групп, где \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая класс \mathfrak{M} всех сверхразрешимых групп.

Теорема В. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, содержащая \mathfrak{M} . Пусть группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – sa - \mathfrak{F} -группа, то H и K также sa - \mathfrak{F} -группы.

Следствие В.1 [12]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – s -сверхразрешимая группа, то H и K также s -сверхразрешимы.

Следствие В.2 [13]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – $SNAC$ -группа, то H и K также $SNAC$ -группы.

Следствие В.3. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – sa - \mathfrak{M} -группа, то H и K также sa - \mathfrak{M} -группы.

Известно, что в общем случае группа, представляемая в виде произведения своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, не является сверхразрешимой. В 1957 году Бэр [14] установил, что такая группа будет сверхразрешимой, если ее коммутант нильпотентен. Следующая теорема является развитием данного результата.

Теорема С. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая \mathfrak{M} . Если группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных sa - \mathfrak{F} -подгрупп H и K и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - \mathfrak{F} -группа.

Следствие С.1 [12]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных s -сверхразрешимых подгрупп H и K . Если коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – s -сверхразрешимая группа.

Следствие С.2 [15]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп H и K . Если коммутант G' группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.

Следствие С.3. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если H и K – sa - \mathfrak{M} -группы и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - \mathfrak{M} -группа.

Следующее следствие расширяет результат о свойствах нормальных произведений sa - \mathfrak{F} -групп из работы [8].

Следствие С.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая \mathfrak{M} . Если группа $G = HK$ – произведение нормальных sa - \mathfrak{F} -подгрупп H и K и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - \mathfrak{F} -группа.

Хорошо известно, что группа, являющаяся произведением своих нормальных сверхразрешимой и нильпотентной подгрупп сверхразрешима. В развитие этого случая получен следующий результат.

Теорема D. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, содержащая \mathfrak{M} . Пусть группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если подгруппа H – sa - \mathfrak{F} -подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – sa - \mathfrak{F} -группа.

Следствие D.1 [12]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если подгруппа H s -сверхразрешима, а K квазинильпотентна, то G – s -сверхразрешимая группа.

Следствие D.2 [15]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если подгруппа H сверхразрешима, а K нильпотентна, то G – сверхразрешимая группа.

1 Предварительные результаты

Используется стандартная теоретико-групповая терминология из монографий [2], [16]. Напомним понятия и обозначения, существенные в работе. Через \mathbb{P} обозначается множество всех простых чисел; 1 – единичная группа; $H \times K$ – полупрямое произведение групп H и K ; \mathfrak{G} – класс всех групп; \mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп; \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп; \mathfrak{U}_c – класс всех s -сверхразрешимых групп; \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп; \mathfrak{N}_p – класс всех p -групп; \mathfrak{J} – класс всех простых групп; \mathfrak{A} – класс всех абелевых групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ – класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$; $\mathcal{K}(G)$ – множество всех композиционных факторов группы G .

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ (p_i – простое число, $i=1,2,\dots,n$) называется *дисперсивной по Оре*, если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i=1,2,\dots,n$.

Формацией называется класс, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; *наследственной (нормально наследственной)*, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее (соответственно нормальные) подгруппы.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Через G^δ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , для которой $G/G^\delta \in \mathfrak{F}$. Через G_δ обозначается \mathfrak{F} -радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа группы G .

Отображение $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация \mathfrak{F} называется *локальной*, если она имеет хотя бы один локальный экран f такой, что

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(p),$$

для любого главного фактора H/K и для любого $p \in \pi(H/K)\}$. Известно, что формация \mathfrak{F} является локальной тогда и только тогда, когда она насыщена [2, IV, Теорема 4.6].

Отображение $f: \mathfrak{J} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *композиционным экраном*. Формация \mathfrak{F} называется *композиционной* (или Бэр-локальной формацией), если использовать терминологию из [2]), если она имеет хотя бы один композиционный экран f такой, что

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(A)$$

для любого $A \in \mathcal{K}_{H/K}\}$.

Внутренним локальным экраном формации \mathfrak{F} называется такой локальный экран f , что $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого числа p . Экран f называется *максимальным внутренним локальным экраном* формации \mathfrak{F} , если f является максимальным элементом множества всех внутренних локальных экранов формации \mathfrak{F} . Аналогично вводятся понятия внутреннего композиционного и максимального внутреннего композиционного экранов.

Любая локальная (композиционная) формация имеет единственный максимальный внутренний локальный (композиционный) экран [16, гл. 1].

В работе будем использовать следующие известные результаты о свойствах класса \mathfrak{F}_{ca} .

Лемма 1.1 [8]. Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Тогда класс \mathfrak{F}_{ca} является непустой формацией.

Теорема 1.2 [8]. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация \mathfrak{F}_{ca} является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N – простая неабелева группа и $h(N) = f(p)$, если N – простая p -группа, где p – простое число.

Лемма 1.3 [6]. Пусть \mathfrak{F} – формация и N – минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^a$ для некоторого простого числа p . Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H -главного фактора U/V группы N , то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$.

Нам также потребуются следующие результаты о произведениях взаимно перестановочных подгрупп.

Лемма 1.4 [11]. Пусть подгруппы H и K группы G взаимно перестановочны, подгруппа N нормальна в G . Тогда HN/N и KN/N взаимно перестановочны.

Лемма 1.5 [11]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если N – максимальная нормальная подгруппа группы G , то

$$\{HN, KN, (H \cap K)N\} \subseteq \{N, G\};$$

2) если N – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G , то

$$\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\} \text{ и } N = (N \cap H)(N \cap K);$$

3) если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то либо $N \leq H \cap K$, либо $[N, H \cap K] = 1$;

4) если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$;

5) если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H и $K \cap N = 1$,

то либо $N \leq C_G(H)$, либо $N \leq C_G(K)$. Кроме того, если N – нециклическая, то $N \leq C_G(K)$.

Теорема 1.6 [11]. Пусть $G \neq 1$ и $G = HK$ – произведение своих взаимно перестановочных подгрупп H и K . Тогда $H_G K_G \neq 1$.

2 Доказательство теоремы А

В данном разделе доказывается теорема, описывающая структуру конечной sa - \mathfrak{F} -группы.

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая формация. Если G является sa - \mathfrak{F} -группой, то справедливы следующие утверждения:

- 1) $G^\epsilon \leq G^\delta \leq C_G(G_\epsilon)$;
- 2) $(G^\epsilon)_\epsilon \leq Z(G^\epsilon)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Заметим, что все главные факторы группы G , лежащие в подгруппе G_ϵ , являются \mathfrak{F} -центральными в G . Следовательно, подгруппа G_ϵ является \mathfrak{F} -гиперцентральной и, таким образом, является подгруппой \mathfrak{F} -гиперцентра $Z_\infty^\delta(G)$. В силу следствия 9.3.2 [16] имеем, что

$$G^\delta \leq C_G(Z_\infty^\delta(G)).$$

Отсюда и из того, что \mathfrak{F} – разрешимая формация, заключаем, что $G^\epsilon \leq G^\delta \leq C_G(G_\epsilon)$.

Докажем утверждения 2). Пусть $R = (G^\epsilon)_\epsilon$. Из $R \text{ char } G^\epsilon \trianglelefteq G$ следует, что $R \trianglelefteq G$. Поэтому $R \leq G_\epsilon$. Ввиду утверждения 1) леммы $G^\epsilon \leq C_G(R)$. Откуда следует справедливость утверждения 2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы А. Обозначим через D разрешимый корадикал G^ϵ группы G . Пусть G – sa - \mathfrak{F} -группа. Если группа G разрешима, то $D = 1$ и $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому утверждения 1), 2) и 3) выполняются. Будем считать, что группа G не является разрешимой. Тогда $D \neq 1$.

Так как \mathfrak{F} – разрешимая формация, то $G/G^\delta \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$. Следовательно, $D \subseteq G^\delta$. Так как \mathfrak{F}_{ca} является формацией, то $G/D \in \mathfrak{F}_{ca}$. В силу разрешимости факторгруппы G/D получаем, что $G/D \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^\delta \subseteq D$ и $D = G^\delta$. Утверждение 1) выполняется. Заметим, что все главные факторы группы G , лежащие ниже центра $Z(D)$, являются абелевыми, а значит и \mathfrak{F} -центральными. Следовательно, центр $Z(D)$ является \mathfrak{F} -гиперцентральной и утверждение 3) выполняется.

Покажем, что $D/Z(D)$ является прямым произведением G -инвариантных простых групп.

Предположим, что $Z(D) = 1$. Пусть N_1 – минимальная нормальная подгруппа группы G ,

содержащаяся в подгруппе D . Если N_1 абелева, то из $N_1 \leq D_\epsilon$ по утверждению 2) леммы 2.1 получаем, что $N_1 \leq Z(D) = 1$. Значит, N_1 неабелева. Так как $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, то N_1 является простой группой. Заметим, что $G/C_G(N_1)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut}(N_1)$, а $N_1 C_G(N_1)/C_G(N_1)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(N_1)$. Следовательно, фактор-группа

$G/N_1 C_G(N_1) \cong (G/C_G(N_1))/(N_1 C_G(N_1)/C_G(N_1))$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(N_1)/\text{Inn}(N_1)$. Исходя из справедливости гипотезы Шрайера, заключаем, что $G/N_1 C_G(N_1)$ разрешима. Тогда $D \leq N_1 C_G(N_1)$, следовательно,

$$D = N_1 C_G(N_1) = N_1 C_D(N_1),$$

причем, $N_1 \cap C_D(N_1) = 1$. Если $D = N_1$, то утверждение 2) выполняется. Предположим, что D не является простой. Поэтому, $C_D(N_1) \neq 1$. В случае, когда $C_D(N_1)$ – простая группа, утверждение 2) выполняется. Предположим, что $C_D(N_1)$ не является простой, пусть N_2 – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в подгруппе $C_D(N_1)$. Так как $Z(D) = 1$, ввиду утверждения 2) леммы 2.1 N_2 – простая неабелева подгруппа. По доказанному выше $D = N_2 C_D(N_2)$. По тождеству Дедекинда

$$C_D(N_1) = C_D(N_1) \cap N_2 C_D(N_2) = N_2 (C_D(N_1) \cap C_D(N_2)) = N_2 C_L(N_2),$$

где $L = C_D(N_1) \cap C_D(N_2)$. Тогда $D = N_1 N_2 C_L(N_2)$. Применяя доказанное выше к $C_D(N_2)$ и т. д., можем заключить, что $D = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_i$ является прямым произведением простых минимальных нормальных подгрупп группы G . Таким образом, верно и утверждение 2).

Пусть теперь $Z(D) \neq 1$. Так как $G/Z(D) \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $(G/Z(D))^\epsilon = D/Z(D)$, для $G/Z(D)$ утверждения 1) и 3) выполняются. Обозначим $T/Z(D) = Z(D/Z(D))$. Тогда T – нормальная разрешимая подгруппа группы D . По лемме 2.1 T содержится в центре $Z(D)$. Поэтому

$$Z(D/Z(D)) = 1.$$

По доказанному выше для $G/Z(D)$ утверждение 2) выполняется.

Обратно, предположим, что для группы G справедливы утверждения 1), 2) и 3). Проведем главный ряд группы G через подгруппу $D = G^\delta$. Заметим, что все главные факторы, лежащие выше D , являются абелевыми и \mathfrak{F} -центральными. По утверждению 2) фактор-группа $D/Z(D)$

является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $G/Z(D)$, которые будут простыми. Ниже $Z(D)$ все главные факторы группы G будут \mathfrak{F} -центральными по утверждению 3). В силу теоремы Жордана – Гёльдера для групп с операторами [2, А, 3.2] и определения 0.1 группа $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Теорема доказана.

3 Доказательства теорем В, С и D

В данном разделе рассмотрим доказательства сформулированных выше свойств произведений взаимно перестановочных sa - \mathfrak{F} -групп.

Доказательство теоремы В. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Если $N = G$, то G – простая группа, следовательно, $H \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $K \in \mathfrak{F}_{ca}$. Пусть $N \neq G$. Тогда по лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются. Следовательно,

$$HN/N \cong H/(H \cap N) \in \mathfrak{F}_{ca}$$

и $KN/N \cong K/(K \cap N) \in \mathfrak{F}_{ca}$. Из леммы 1.1 следует, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть N – неабелева группа. Тогда N – простая группа. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \leq H \cap K$ и $H/(H \cap N) = H/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $K/(K \cap N) = K/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Следовательно, H и K – sa - \mathfrak{F} -группы. Получили противоречие.
2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда $H/(H \cap N) \cong H$ и $K/(K \cap N) \cong K$ – sa - \mathfrak{F} -группы. Противоречие.
3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда $H/(H \cap N) = H/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ и H – sa - \mathfrak{F} -группа и $K/(K \cap N) \cong K$ – sa - \mathfrak{F} -группа, противоречие.
4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3.

Случай когда N – абелева p -группа рассматривается аналогично с некоторыми изменениями. Теорема доказана.

Лемма 3.1. Пусть группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы для всех $i = 1, \dots, t$. Если $N \leq H$, где H – sa - \mathfrak{F} -подгруппа группы G , то $N_i \triangleleft H$ для всех $i = 1, \dots, t$.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. Рассмотрим нормальное замыкание $N_i^H = \langle N_i^x \mid x \in H \rangle$

подгруппы N_i в H . Заметим, что $N_i \triangleleft\triangleleft G$. Следовательно, $N_i \triangleleft\triangleleft H$. Согласно лемме 9.17 [17] N_i^H является минимальной нормальной подгруппой группы H . Так как подгруппа N_i^H неабелева и изоморфна главному фактору sa - \mathfrak{F} -группы H , то N_i^H – простая группа. Тогда в силу $N_i \triangleleft\triangleleft N_i^H$ имеем, что $N_i^H = N_i$. Следовательно, $N_i \trianglelefteq H$ для любого $i = 1, \dots, t$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть \mathfrak{F} – композиционная формация и f – ее внутренний композиционный экран. Пусть N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , причем N – абелева p -группа для некоторого простого числа p . Главный фактор N является \mathfrak{F} -центральным в группе G тогда и только тогда, когда

$$G/C_G(N) \in f(p).$$

Доказательство. Пусть $G/C_G(N) \in f(p)$.

Рассмотрим полупрямое произведение

$$R = N \rtimes G/C_G(N).$$

Заметим, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $C_R(N) = N$. Тогда $R/C_R(N) \cong G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $R \in \mathfrak{F}$, т. е. главный фактор N группы G является \mathfrak{F} -центральным.

Пусть теперь N – \mathfrak{F} -центральный главный фактор группы G . Тогда $R = N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа в R и $C_G(N) = N$. Отсюда следует, что $R/C_R(N) \cong G/C_G(N) \in f(p)$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть \mathfrak{F} – формация и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K , где $H, K \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и выберем группу G – контрпример минимального порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Без ограничения общности можем считать $G \neq N$. По лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что $HN/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$, $KN/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$. Тогда все условия леммы выполняются для G/N . Поэтому $G/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ – формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Следовательно, N – q -группа для некоторого простого числа $q \neq p$. Так как $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$ и $O_p(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{A}$. Отсюда получаем, что $H \in \mathfrak{F}$ и $K \in \mathfrak{F}$. В силу

того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G имеем, что G – циклическая группа и $|G| = q^n$. Так как $G = HK$, то $G = H$ или $G = K$, т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы С. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Если $N = G$, то G – простая группа, следовательно, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Пусть $N \neq G$. Тогда по лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что коммутант $(G/N)'$ квазинильпотентен. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Так как \mathfrak{F}_{ca} является формацией по лемме 1.1, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть N – неабелева группа. Тогда

$$N = N_1 \times \dots \times N_t,$$

где N_i – изоморфные простые неабелевы группы, $i = 1, \dots, t$. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда

$$N \subseteq H \cap K.$$

Так как H и K – ca - \mathfrak{F} -подгруппы, и

$$N = N_1 \times \dots \times N_t,$$

то по лемме 3.1 $N_i \triangleleft H$ и $N_i \triangleleft K$. Отсюда и из $G = HK$, следует, что $N_i \triangleleft G$ для всех $i = 1, \dots, t$. В силу того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , получаем, что $t = 1$ и N – простая группа. Из $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда по пункту 2) леммы 1.5 получаем, что

$$N = (H \cap N)(K \cap N) = 1,$$

что противоречит выбору N .

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда $N \subseteq H$ и по пункту 5) леммы 1.5 $N \leq C_G(H)$ или $N \leq C_G(K)$. Так как $N \leq H$ и N неабелева, получаем, что $N \leq C_G(K)$. Так как $N = N_1 \times \dots \times N_t$, подгруппа $N_i \leq C_G(K)$ для каждого $i = 1, \dots, t$. Из $N_i \leq H$ по лемме 3.1 получаем, что $N_i \triangleleft H$ для каждого $i = 1, \dots, t$. В силу $G = HK$, имеем, что $N_i \triangleleft G$. Так как N – минимальная нормальная подгруппа группы G , заключаем, что $N = N_i$ и N – простая группа. В силу $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ имеем, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором G .

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3.

Пусть теперь N – абелева группа. Тогда N – p -группа для некоторого просто числа p . По теореме 1.2 формация \mathfrak{F}_{ca} имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = f(p)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда

$$N \subseteq H \cap K.$$

Пусть U/V – любой H -главный фактор группы N . Так как $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$. Из леммы 1.3 получаем, что $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$.

Аналогично $K/C_K(N) \in h(p)$. Рассмотрим группу

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп $HC_G(N)/C_G(N)$ и $KC_G(N)/C_G(N)$ группы $G/C_G(N)$.

Так как $N \subseteq G'$ и G' – квазинильпотентная группа, то $G'/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p$ по лемме 1.3. Значит

$$(G/C_G(N))' = G'C_G(N)/C_G(N) \simeq G'/C_G(N)$$

– p -группа. Тогда из того, что

$$G/C_G(N)/(G/C_G(N))' \in \mathfrak{A}$$

следует, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$. Используя лемму 3.3 для $G/C_G(N)$, получаем, что

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{F}_{ca}.$$

Отсюда получаем, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Это противоречит выбору G .

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. По теореме 1.6, $H_G K_G \neq 1$. Тогда

$$N \subseteq H_G \subseteq H \text{ или } N \subseteq K_G \subseteq K,$$

противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Пусть N – нециклическая подгруппа, тогда по пункту 5) леммы 1.5 $N \leq C_G(K)$. Следовательно, $K \subseteq C_G(N)$ и

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/(C_G(N) \cap H) = H/C_H(N).$$

Так как $N \subseteq H$ и $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то по лемме 1.3 $H/C_H(N) \in h(p)$. Из леммы 3.2 следует, что фактор N – \mathfrak{F} -центральный главный фактор группы G . Тогда $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие. Если N – циклическая группа, то $|N| = p$ и $G/C_G(N)$ – циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Тогда

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq f(p) = h(p).$$

В силу $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ получаем, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3. Теорема доказана.

Лемма 3.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, содержащая \mathfrak{U} и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K группы G . Если H – p -группа и $K \in f(p)$, то $G \in f(p)$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N – минимальную нормальную подгруппу группы G . Без ограничения общности можно положить, что $G \neq N$. По лемме 1.4

$$G/N = HN/N \cdot KN/N$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что $HN/N \cong H/H \cap N$ – p -группа и

$$KN/N \cong K/K \cap N \in f(p).$$

Тогда условия леммы выполняются для G/N . Следовательно, $G/N \in f(p)$. Так как $f(p)$ является формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Значит, N – q -группа для некоторого простого $q \neq p$.

Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$. Значит, N – p -группа, противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Рассмотрим G_q – силовскую q -подгруппу группы G . Тогда $N \subseteq G_q$. Так как H – p -группа, можем положить, что $G_q \subseteq K$. Следовательно, $N \subseteq K$, противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда N – p -группа, противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Положим $\Phi(G) = 1$. Тогда $N = C_G(N)$.

Если N – циклическая группа, то $|N| = q$. Тогда $G = N \rtimes M$, где $M \in f(p)$. Следовательно M – абелева группа порядка делящего $q-1$. Но с другой стороны $G = HK$, где H – p -группа. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, согласно [2, IV, 4.8 (g)] $p > q$, получили противоречие.

Пусть N – нециклическая группа. По пункту 5) леммы 1.5 $N \leq C_G(H)$. Тогда $H \leq C_G(N) = N$, противоречие.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $N \subseteq \Phi(G)$. Рассмотрим $O_p(G/N) = G_p N/N$, где G_p – силовская p -подгруппа группы G . Тогда $G_p N \triangleleft G$. По лемме Фраттини $G = N_G(G_p)N = N_G(G_p)$ и $G_p \triangleleft G$, противоречие. Значит, $O_p(G/N) = 1$ и $G_p = 1$, так как N – q -группа. Тогда $H = 1$ и $G = K \in f(p)$. Последнее противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы D. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G , являющуюся контрпримером наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Без ограничения общности можно положить, что $G \neq N$. По лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что

$$HN/N \cong H/H \cap N \in \mathfrak{F}_{ca}$$

и $KN/N \cong K/K \cap N \in \mathfrak{N}$. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются.

Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Так как \mathfrak{F}_{ca} является формацией по лемме 1.1, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть N – абелева p -группа для некоторого простого p . По теореме 1.2 формация \mathfrak{F}_{ca} имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = f(p)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$.

Пусть U/V – любой H -главный фактор группы N . Так как $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$. Из леммы 1.3 получаем, что $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$.

Так как K квазинильпотентна, то $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p$ по лемме 1.3. Рассмотрим группу

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп $HC_G(N)/C_G(N)$ и $KC_G(N)/C_G(N)$ группы $G/C_G(N)$. Применяя лемму 3.4 к группе $G/C_G(N)$ получаем, что

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Так как G/N – \mathfrak{F}_{ca} -группа, то G – \mathfrak{F}_{ca} -группа, противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. По теореме 1.6, $H_G K_G \neq 1$. Тогда $N \subseteq H_G \subseteq H$ или

$$N \subseteq K_G \subseteq K,$$

противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Положим, что N – нециклическая группа. Тогда $N \leq C_G(K)$ по пункту 5) леммы 1.5. Заметим, что $K \subseteq C_G(N)$. Поэтому

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cong H/(C_G(N) \cap H) = H/C_H(N).$$

Так как $N \subseteq H$ и $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, следовательно $H/C_H(N) \in h(p)$ по лемме 1.3. Значит, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – циклическая группа. Тогда N – группа простого порядка и $G/C_G(N)$ – циклическая группа порядка делящего $p-1$. Следовательно

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Пусть N – нециклическая группа. Тогда $N \leq C_G(H)$ по пункту 5) леммы 1.5. Поэтому $H \subseteq C_G(N)$ и

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) =$$

$$= KC_G(N)/C_G(N) \approx K/(C_G(N) \cap K) = K/C_K(N).$$

Так как $N \subseteq K$ и $K \in \mathfrak{N}_p$, получаем, что

$$H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \subseteq h(p)$$

по лемме 1.3. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – циклическая группа. Тогда N – группа простого порядка и $G/C_G(N)$ – циклическая группа порядка делящего $p-1$. Следовательно

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – неабелева подгруппа. По пункту 2) леммы 1.5 получаем, что

$$\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\} \text{ и } N = (N \cap H)(N \cap K).$$

Следовательно, случай $H \cap N = K \cap N = 1$ невозможен. Заметим, что $N = N_1 \times \dots \times N_t$ – произведение простых неабелевых подгрупп N_i .

Пусть $H \cap N = N$. Так как H – \mathfrak{F}_{ca} -подгруппа, то $N_i \triangleleft H$ по лемме 3.1. Если $K \cap N = N$ тогда $K_i \triangleleft H$ по лемме 3.1. Так как $G = HK$, то $N_i \triangleleft G$ для всех $i = 1, \dots, t$. Противоречие. Если $K \cap N = 1$ то в силу того, что N неабелева и $N \leq H$ получаем, что $N \leq C_G(K)$ по пункту 5) леммы 1.5. Значит, $K \leq C_G(N_i)$ и $N_i \triangleleft G$ для всех $i = 1, \dots, t$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N = N_i$ – простая группа. Так как $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором группы G .

Если $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$, то как выше показываем, что $N = N_i$ – простая группа и $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Последнее противоречие завершает доказательство теоремы.

4 Заключительные замечания

С помощью конструкции класса \mathfrak{F}_{ca} можно строить различные новые конкретные примеры композиционных формаций, подходящие под условия приведенных выше теорем.

Приведем одну серию таких примеров.

Согласно [2], *ранговой функцией* называется отображение $R: p \rightarrow R(p)$, которое каждому простому числу p ставит в соответствие некоторое множество натуральных чисел $R(p)$. Для

этой функции в [2] определяется класс групп

$$\mathfrak{F}(R) = \{G \in \mathfrak{S} \mid \text{для всех простых } p \in \pi(G)$$

каждый главный p -фактор из G имеет ранг, принадлежащий $R(p)\}$,

который является формацией.

В случае, когда $\mathfrak{F}(R)$ является насыщенной формацией, ранговая функция называется насыщенной [2, С. 484]. Говорят, что ранговая функция R имеет полную характеристику, если $R(p) \neq \emptyset$ для всех простых p .

Заметим, что если R – насыщенная ранговая функция полной характеристики, то по [2, IV, 4.3] получаем, что $1 \in R(p)$ для всех простых $p \in \mathbb{P}$ и поэтому $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(R)$.

Если задана ранговая функция R , то согласно [2] для каждого простого числа p определяются

$$\pi(G) = R(p) \cap \mathbb{P} \text{ и}$$

$$e(p) = \{p^m - 1 \mid m \in R(p)\}.$$

Через $\mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))$ обозначается класс всех абелевых $\pi(p)'$ -групп с экспонентой, делящей $e(p)$, который является формацией.

Согласно [2] выполняется следующая

Лемма 4.1 [2]. Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики. Тогда R удовлетворяет следующим условиям

RF1: Если $n \in R(p)$ и $m \mid n$, то $m \in R(p)$;

RF2: Если $\{m, n\} \in R(p)$, то $mn \in R(p)$;

RF3: Если p и q различные простые числа, $q \in R(p)$ и $m \in R(p)$, то $q^m - 1 \in R(p)$;

RF4: Если простые числа p и q и натуральное число r удовлетворяют условиям

$$1) p \mid (q^m - 1) \text{ для некоторого } m \in R(p),$$

$$2) q \mid (p^n - 1) \text{ для некоторого } n \in R(p),$$

$$3) r \mid (p^k - 1) \text{ для некоторого } k \in R(p),$$

$$4) p \in R(p), r \in R(p),$$

тогда $r \in R(p)$.

Локальный экран формации $\mathfrak{F}(R)$ в случае, когда R – насыщенная ранговая функция, описан в теореме 1.18 [2, С. 490], которую сформулируем в виде леммы.

Лемма 4.2. Пусть R – ранговая функция, и $\widehat{\mathfrak{F}}(R)$ – локальная формация, определенная локальным экраном f таким, что

$$f(p) = \mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p)) \mathfrak{S}_{\pi}(p)$$

для каждого простого p . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) R является насыщенной ранговой функцией;

2) R удовлетворяет условиям **RF1-RF4**;

3) $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$.

Следствие В.4. Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K группы G . Если G – sa - $\mathfrak{F}(R)$ -группа, то H и K также sa - $\mathfrak{F}(R)$ -группы.

Следствие С.5. Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных sa - $\mathfrak{F}(R)$ -подгрупп H и K группы G . Если коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - $\mathfrak{F}(R)$ -группа.

Напомним [18]–[19], что подгруппа H группы G называется \mathbb{P} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$. В работах [18]–[20] были приведены новые примеры насыщенных формаций дисперсивных по Оре групп, содержащие \mathfrak{U} : класс $w\mathfrak{U}$ всех групп, у которых любая силовская подгруппа \mathbb{P} -субнормальна; класс \mathfrak{X} всех групп, у которых любая циклическая примарная подгруппа \mathbb{P} -субнормальна.

Приведем новые следствия теоремы D.

Следствие D.3. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если H – sa - $w\mathfrak{U}$ -подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – sa - $w\mathfrak{U}$ -группа.

Следствие D.4. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если H – sa - \mathfrak{X} -подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – sa - \mathfrak{X} -группа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Два направления в развитии непростых конечных групп (доклад, прочитанный на XII Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в Свердловске в сентябре 1973 г.) / Л.А. Шеметков // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30, № 2. – С. 179–198.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Guo, W. On finite quasi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.
4. Guo, W. On some classes of finite quasi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.
5. Ведерников, В.А. О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // Докл. АН БССР. – 1988. – Т. 32, № 10. – С. 872–875.

6. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.

7. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–149.

8. Мысловец, Е.Н. О конечных sa - \mathfrak{F} -группах / Е.Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – Т. 2, № 19. – С. 64–68.

9. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

10. Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – № 21. – P. 395–403.

11. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester – Bolinches, R. Esteban – Romero, M. Asaad. – Berlin: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

12. Ballester-Bolinches, A. On mutually permutable products of finite groups / A. Ballester – Bolinches, J. Cossey, M. C. Pedraza – Aguilera // J. Algebra. – 2005. – Vol. 294. – P. 127–135.

13. Beidleman, J.C. Group classes and mutually permutable products / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Algebra. – 2006. – Vol. 297. – P. 409–416

14. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

15. Asaad, M. On the supersolvability of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. (Basel). – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.

16. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

17. Isaacs, I.M. Finite Group Theory / I.M. Isaacs. – Graduate Studies in Mathematics. – 2008. – № 92.

18. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

19. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

20. Monakhov, V.S. Finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–329.

Поступила в редакцию 18.04.16.