Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (96), 2016

*УДК 512.548*

# О полунормализаторах полиадических подгрупп в полиадических группах

А.М. Гальмак[1], М.В. Селькин[2]

Изучаются полунормализаторы $l$-арных подгрупп в $l$-арных группах с $l$-арными операциями, построенными на декартовых степенях полугрупп с помощью подстановок и операций полугрупп.
**Ключевые слова:** $l$-арная группа, подстановка, полунормализатор.

The seminormalizers of the $l$-ary subgroups of the $l$-ary groups with $l$-ary operations constructed on Cartesian powers of semigroups by using of permutations and semigroups operations are studied.
**Keywords:** $l$-ary group, substition, seminormalizer.

**Введение.** В статье продолжается изучение $l$-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [1] на $k$-ой декартовой степени $A^k$ полугруппы $A$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и операции полугруппы $A$ следующим образом.

Пусть $A$ – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, $\sigma$ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на $A^k$ вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

а затем $l$-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots )).$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\sigma,k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Если $\sigma = (12 \ldots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [1, определения 2.2.3], а операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – с операцией $[\ ]_{l,k}$ из того же определения.

Частными случаями $l$-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ являются две $m$-арные операции, которые Э. Пост, используя цикл $\sigma = (12 \ldots m-1)$, определил в [1]. Одна из них была определена им на $(m-1)$-ой декартовой степени симметрической группы $\mathbf{S}_T$ всех подстановок конечного множества $T$. Вторую операцию Э. Пост определил на $(m-1)$-ой декартовой степени полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ над полем C комплексных чисел.

В [2] доказано, что если $A$ – полугруппа (группа), подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальная алгебра $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является $l$-арной полугруппой ($l$-арной группой). Изучению полунормализаторов $l$-арных подгрупп $l$-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ посвящена настоящая статья.

**1. Предварительные сведения.**

**Теорема 1.1** [1]. *Пусть $A$ – полугруппа* (*группа*), *подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*:

1) $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – *$l$-арная полугруппа* (*$l$-арная группа*);

2) *если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

*то*

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

*где*

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{lj},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Для подмножества $B$ $l$-арного группоида $< A, [\ ] >$ и любого $i = 1, \ldots, l$ полагают

$$[\underbrace{B\ldots B}_{i-1}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{l-i}] = \{[b_1 \ldots b_{i-1}xb_{i+1} \ldots b_l] \mid b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_l \in B\}.$$

В частности,

$$[x\, \underbrace{B\ldots B}_{l-1}] = \{[xb_2 \ldots b_l] \mid b_2, \ldots, b_l \in B\},$$

$$[\underbrace{B\ldots B}_{l-1}\, x\,] = \{[b_1 \ldots b_{l-1}x] \mid b_1, \ldots, b_{l-1} \in B\}.$$

Аналогично, для подмножества $B$ группоида $A$ и любого $i = 1, \ldots, l$ полагают

$$\underbrace{B\ldots B}_{i-1}\, x\, \underbrace{B\ldots B}_{l-i} = \{b_1 \ldots b_{i-1}xb_{i+1} \ldots b_l \mid b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_l \in B\}.$$

Напомним, что $l$-арную подгруппу $< B, [\ ] >$ $l$-арной группы $< A, [\ ] >$ называют [3, с. 55] *полуинвариантной* в ней, если

$$[x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{l-1}x]$$

для любого $x \in A$.

Если $B$ – подмножество $l$-арной группы $< A, [\ ]$ , то множество

$$(\mathbf{HN}_A(B))_{[\ ]} = \{x \in A \mid [x\underbrace{B\ldots B}_{l-1}] = [\underbrace{B\ldots B}_{l-1}x]\}$$

называют *полунормализатором* [3, с. 51] подмножества $B$ в $l$-арной группе $< A, [\ ] >$.

Ясно, что:

1) любая $l$-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ $l$-арной группы $< A, [\ ] >$ содержится в своём полунормализаторе, то есть $B \subseteq (\mathbf{HN}_A(B))_{[\ ]}$;

2) $l$-арная подгруппа $< B, [\ ] >$ $l$-арной группы $< A, [\ ] >$ полуинвариантна в ней тогда и только тогда, полунормализатор $(\mathbf{HN}_A(B))_{[\ ]}$ совпадает с $A$.

**Замечание 1.1**. Согласно теореме 1.1, если $A$ – полугруппа (группа), подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – $l$-арная полугруппа ($l$-арная группа). Понятно, что если $B$ – подполугруппа (подгруппа) полугруппы (группы) $A$, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – $l$-арная подполугруппа ($l$-арная подгруппа) $l$-арной полугруппы ($l$-арной группы) $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Для обозначения полунормализатора $l$-арной подгруппы $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ в $l$-арной группе $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ будем использовать символ $(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k}$.

Если не возникает разночтений, то символ $l$-арной операции в обозначении полунормализатора можно не указывать, то есть в таких случаях полагают

$$(\mathbf{HN}_A(B))_{[\ ]} = \mathbf{HN}_A(B).$$

В частности,

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k} = \mathbf{HN}_{A^k}(B^k).$$

**Предложение 1.1** [4]. *Пусть $B$ – подгруппа группы $A$, подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, Тогда*:

1) *$l$-арная подгруппа $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ полуинвариантна в $l$-арной группе $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ тогда и только тогда, когда подгруппа $B$ нормальна в группе $A$*;

2) *если $B \neq A$, $\sigma$ не является тождественной подстановкой, то $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является инвариантной в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.*

**Предложение 1.2** [4]. *Если $A$ – нильпотентная группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $l$-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является полунильпотентной.*

**2. Основной результат.**

**Лемма 2.1**. *Пусть $B$ – подмножество полугруппы $A$, подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,*

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k.$$

*Тогда*

$$[\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-i}]_{l,\sigma,k} = (\underbrace{B\dots B}_{i-1} x_{\sigma^{i-1}(1)} \underbrace{B\dots B}_{l-1}) \times \dots \times (\underbrace{B\dots B}_{i-1} x_{\sigma^{i-1}(k)} \underbrace{B\dots B}_{l-1}) \qquad (2.1)$$

*для любого* $i = 1, \dots, l$. *В частности,*

$$[\mathbf{x}\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = (x_1 \underbrace{B\dots B}_{l-1}) \times \dots \times (x_k \underbrace{B\dots B}_{l-1}), \qquad (2.2)$$

$$[\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = (\underbrace{B\dots B}_{l-1} x_1) \times \dots \times (\underbrace{B\dots B}_{l-1} x_k). \qquad (2.3)$$

***Доказательство.*** Так как

$$[\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-i}]_{l,\sigma,k} =$$

$$= \{[\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{i-1}\mathbf{x}\mathbf{b}_{i+1} \dots \mathbf{b}_l]_{l,\sigma,k} \mid \mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_l \in B^k\} =$$
$$= \{[(b_{11}, \dots, b_{1k}) \dots (b_{(i-1)1}, \dots, b_{(i-1)k})(x_1, \dots, x_k)$$
$$(b_{(i+1)1}, \dots, b_{(i+1)k}) \dots (b_{l1}, \dots, b_{lk})]_{l,\sigma,k} \mid b_{rs} \in B\} =$$
$$= \{(b_{11}b_{2\sigma(1)} \dots b_{(i-1)\sigma^{i-2}(1)} x_{\sigma^{i-1}(1)} b_{(i+1)\sigma^{i}(1)} \dots b_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots$$
$$\dots, b_{1k}b_{2\sigma(k)} \dots b_{(i-1)\sigma^{i-2}(k)} x_{\sigma^{i-1}(k)} b_{(i+1)\sigma^{i}(k)} \dots b_{l\sigma^{l-1}(k)}) \mid b_{rs} \in B\} =$$
$$= (\underbrace{B\dots B}_{i-1} x_{\sigma^{i-1}(1)} \underbrace{B\dots B}_{l-1}) \times \dots \times (\underbrace{B\dots B}_{i-1} x_{\sigma^{i-1}(k)} \underbrace{B\dots B}_{l-1})$$

то верно (2.1).

Равенства (2.2) и (2.3) получаются из (2.1) при $i = 1$ и $i = l$ соответственно. Лемма доказана.

Если $B$ – подгруппа группы $A$, то $\underbrace{B\dots B}_{s} = B$ для любого натурального s. Поэтому из леммы 2.1 вытекает следствие, устанавливающее связь между смежными классами $l$-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ по её $l$-арной подгруппе $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ и смежными классами группы $A$ по её подгруппе $B$.

**Следствие 2.1** [4]. *Пусть* $\sigma$ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, $B$ – *подгруппа группы* $A$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k.$$

*Тогда*:

1) $[\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-i}]_{l,\sigma,k} = (Bx_{\sigma^{i-1}(1)}B) \times \dots \times (Bx_{\sigma^{i-1}(k)}B)$

*для любого* $i = 2, \dots, l-1$;

2) $[\mathbf{x}\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = (x_1 B) \times \dots \times (x_k B)$;

3) $[\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = (Bx_1) \times \dots \times (Bx_k)$.

**Пример 2.1.** Пусть $\mathbf{A}_n$ – подгруппа всех чётных подстановок симметрической группы $\mathbf{S}_n$, $\sigma = (12)$. Определим на декартовом квадрате $\mathbf{S}_n^2$ тернарную операцию

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)]_{3,(12),2} = (x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)}) = (x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2).$$

Так как $(12)^3 = (12)$, то по теореме 1.1 $< \mathbf{S}_n^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ – тернарная группа, $< \mathbf{A}_n^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ – её тернарная подгруппа.

Если $x$, $y$ – произвольные элементы из $\mathbf{S}_n$, $a$, $b$, $c$, $d$ – произвольные элементы из $\mathbf{A}_n$, то $[(x, y)(a, b)(c, d)]_{3,(12),2}$ – произвольный элемент из $[(x, y)\mathbf{A}_n^2\ \mathbf{A}_n^2]_{3,(12),2}$.

Так как знакопеременная группа $\mathbf{A}_n$ – нормальна в группе $\mathbf{S}_n$, то

$$[(x, y)(a, b)(c, d)]_{3,(12),2} = (xbc, yad) =$$
$$= (uvx, wzy) = [(u, w)(z, v)(x, y)]_{3,(12),2}$$

для некоторых $u$, $v$, $w$, $z$ из $\mathbf{A}_n$. Следовательно,

$$[(x, y)(a, b)(c, d)]_{3,\,(12),\,2} \in [\,\mathbf{A}_n^2\,\mathbf{A}_n^2\,(x, y)]_{3,\,(12),\,2},$$

$$[(x, y)\,\mathbf{A}_n^2\,\mathbf{A}_n^2\,]_{3,\,(12),\,2} \subseteq [\,\mathbf{A}_n^2\,\mathbf{A}_n^2\,(x, y)]_{3,\,(12),\,2}.$$

Аналогично доказывается включение

$$[\,\mathbf{A}_n^2\,\mathbf{A}_n^2\,(x, y)]_{3,\,(12),\,2} \subseteq [(x, y)\,\mathbf{A}_n^2\,\mathbf{A}_n^2\,]_{3,\,(12),\,2}.$$

Таким образом,

$$[(x, y)\,\mathbf{A}_n^2\,\mathbf{A}_n^2\,]_{3,\,(12),\,2} = [\,\mathbf{A}_n^2\,\mathbf{A}_n^2\,(x, y)]_{3,\,(12),\,2}$$

для любого элемента $(x, y)$ из $\mathbf{S}_n$. Следовательно, тернарная подгруппа, $<\mathbf{A}_n^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2}>$ полуинвариантна в тернарной группе $<\mathbf{S}_n^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2}>$, а её полунормализатор совпадает с $\mathbf{S}_n^2$.

Заметим, что полуинвариантность $<\mathbf{A}_n^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2}>$ в $<\mathbf{S}_n^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2}>$ может быть получена как следствие утверждения 1) предложения 1.1.

**Теорема 2.1**. *Если $B$ – подгруппа группы $A$, подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k,$$

*то справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathbf{x} \in (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k}$ *тогда и только тогда, когда* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{N}_A(B)$;

2) *если*

$$(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k}, \tag{2.4}$$

*то*

$$(y_1, \ldots, y_k) \in (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k} \tag{2.5}$$

*для любых*

$$y_1, \ldots, y_k \in \{x_1, \ldots, x_k\}; \tag{2.6}$$

3) *полунормализатор* $(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k}$ *$l$-арной подгруппы* $<B^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$ *в $l$-арной группе* $<A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$ *совпадает с $k$-ой декартовой степенью* $(\mathbf{N}_A(B))^k$ *нормализатора* $\mathbf{N}_A(B)$ *подгруппы $B$ в группе $A$*:

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k} = \underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k};$$

4) *если нормализатор* $\mathbf{N}_A(B)$ *– конечный порядка $t$, то полунормализатор* $(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k}$ *также является конечным и имеет порядок* $t^k$.

***Доказательство.*** 1) *Необходимость*. Если $\mathbf{x} \in (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k}$, то

$$[\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,k} = [\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\,\sigma,\,k}, \tag{2.7}$$

откуда, а также из утверждений 2) и 3) следствия 2.1 вытекает

$$x_1B\times\ldots\times x_kB = Bx_1\times\ldots\times Bx_k. \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$x_1B = Bx_1, \ldots, x_kB = Bx_k, \tag{2.9}$$

то есть $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{N}_A(B)$.

*Достаточность*. Если теперь $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{N}_A(B)$, то верно (2.9), а значит и (2.8), откуда, а также из утверждений 2) и 3) следствия 2.1 следует справедливость равенство (2.7). Следовательно, $\mathbf{x} \in (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\,\sigma,\,k}$.

2) Если верно (2.4), то ввиду 1),

$$x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{N}_A(B),$$

откуда и из (2.6) следует

$$y_1, \ldots, y_k \in \mathbf{N}_A(B).$$

Снова применяя 1), убеждаемся в справедливости (2.5).

3) Согласно 1), для любого

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k}$$

верно $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{N}_A(B)$. Следовательно,

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k}$$

и верно включение

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k} \subseteq \underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k};$$

Рассуждения, проведённые в обратном порядке, доказывают включение

$$\underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k} \subseteq (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k}.$$

Таким образом, верно доказываемое равенство.

4) Следует из 3). Теорема доказана.

**3. Следствия.**

Так как для нормальной подгруппы $B$ группы $A$ верно $\mathbf{N}_A(B) = A$, а для полуинвариантной $l$-арной подгруппы $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ $l$-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ верно $(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k} = A^k$, то из утверждения 3) теоремы 2.1 вытекает утверждение 1) предложения 1.1, а также следующие два следствия.

**Следствие 3.1.** *Если $B$ – нормальная подгруппа группы $A$, подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то*

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k} = A^k.$$

**Следствие 3.2.** *Если подгруппа $B$ группы $A$ совпадает со своим нормализатором, подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то*

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k} = B^k.$$

Если в следствии 3.2 $A$ – конечная группа, то в качестве её самонормализуемой подгруппы $B$ можно взять, например, подгруппу, содержащую нормализатор силовской подгруппы группы $A$, в частности сам этот нормализатор.

Так как в конечной нильпотентной группе любая её собственная подгруппа отлична от своего нормализатора, то из утверждения 3) теоремы 2.1 вытекает

**Следствие 3.3.** *Если $B$ – собственная подгруппа нильпотентной группы $A$, подстановка $\sigma$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $l$-арная подгруппа $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ $l$-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ отлична от своего полунормализатора, то есть*

$$B^k \subset (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k}.$$

**Замечание 3.1.** Согласно предложению 1.2, $l$-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ из следствия 3.3 является полунильпотентной.

Так как в правой части равенства из утверждения 3) теоремы 2.1 подстановка $\sigma$ не присутствует, то справедливо

**Следствие 3.4.** *Если $B$ – подгруппа группы $A$, то для любых подстановок $\sigma$ и $\tau$ из $\mathbf{S}_k$ таких, что $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, полунормализатор $l$-арной подгруппы $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ в $l$-арной группе $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ совпадает с полунормализатором $l$-арной подгруппы $< B^k, [\ ]_{l,\tau,k} >$ в $l$-арной группе $< A^k, [\ ]_{l,\tau,k} >$:*

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k} = (\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\tau,k}.$$

Полагая в теореме 2.1 $\sigma$ – цикл длины $k$ из $\mathbf{S}_k$, $k$ делит $l-1$, получим

**Следствие 3.5.** *Если $B$ – подгруппа группы $A$, $\sigma$ – цикл длины $k$ из $\mathbf{S}_k$, $k$ делит $l-1$, то*

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{l,\sigma,k} = \underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k}.$$

Полагая в теореме 2.1 $l = k + 1$, получим

**Следствие 3.6.** *Если B – подгруппа группы A, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{k+1} = \sigma$, *то*

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{k+1,\,\sigma,\,k} = \underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k}.$$

Полагая в следствии 3.6, σ – цикл длины $k$ из $\mathbf{S}_k$, получим

**Следствие 3.7.** *Если B – подгруппа группы A,* σ – цикл длины $k$ из $\mathbf{S}_k$, *то*

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{k+1,\,\sigma,\,k} = \underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k}.$$

Полагая в следствии 3.6 $\sigma = (12\ \ldots\ k)$, получим

**Следствие 3.8.** *Если B – подгруппа группы A, то*

$$(\mathbf{HN}_{A^k}(B^k))_{k+1,\,(12\ldots k),\,k} = \underbrace{\mathbf{N}_A(B)\times\ldots\times\mathbf{N}_A(B)}_{k}.$$

Полагая в следствии 3.8 $k = 2$, получим

**Следствие 3.9.** *Если B – подгруппа группы, то*

$$(\mathbf{HN}_{A^2}(B^2))_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{N}_A(B) \times \mathbf{N}_A(B).$$

## Литература

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

2. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. Русаков, С.А. Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

4. Гальмак, А.М. Полиадические операции и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв, 2015. – 295 с.

[1]Могилевский государственный
университет продовольствия

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 18.04.2016