«АТОМНАЯ ЭНЕРГИЯ», Т. 32, ВЫП. 6 (ИЮНЬ 1972)

Термоядерная волна горения в ограниченной плазме

А. Ф. НАСТОЯЩИЙ, Л. П. ШЕВЧЕНКО

УДК 621.039.616

Рассмотрим термоядерную плазму с плотностью, близкой к плотности твердого вещества. Такую плазму можно приготовить, например, путем нагрева твердой мишени импульсом лазера или электронным пучком. Предположим, что плазма окружена материальной оболочкой, которая препятствует разлету плазмы, и что в ней выделяется энергия за счет реакции синтеза. В то же время в результате контакта плазмы с ограничивающими ее стенками происходит утечка тепла вследствие теплопроводности. Кроме того, потерю тепла вызывает излучение плазмы.

Поскольку потери тепла могут быть скомпенсированы за счет теплового эффекта реакции синтеза, вполне уместно поставить вопрос о возможности самоподдерживающейся реакции, когда «горение» термоядерного вещества происходит почти стационарным образом. Задача в такой постановке рассматривалась в работе [1], где исследовались три простейшие конфигурации плазмы: бесконечный плоский слой, бесконечно длинный цилиндр и шар, и было показано, что стационарные состояния возможны только при наличии определенной связи между температурой T_0 в центре объема, занимаемого плазмой, и произведением плотности на характерный размер (n_0d).

При этом существует наименьшее возможное значение параметра $(n_0d)_{\text{кр}}$, при котором еще может быть тепловое равновесие. При $(n_0d) < (n_0d)_{\text{кр}}$ стационарное состояние теплового равновесия невозможно: плазма, первоначально нагретая до термоядерных температур, будет быстро остывать. В случае $(n_0d) > (n_0d)_{\text{кр}}$ возможны два состояния с различными значениями температуры T_0, однако устойчиво лишь состояние с большей температурой.

Постановка задачи

Рассмотрим систему, описанную выше. Предположим, однако, что до термоядерной температуры нагрета не вся плазма, а только ее часть, так что в первоначальный момент времени имеется некоторая граница между горячим и холодным веществом (рис. 1). Возникает вопрос: возможно ли и при каких условиях перемещение этой границы в сторону холодного вещества, т. е. возможна ли термоядерная волна горения?

Условие баланса тепла (уравнение теплопроводности) имеет вид [2]

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{q} + Q_s(\rho, T), \qquad (1)$$

где $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла, связанный с градиентом температуры и гидродинамической скоростью вещества $\mathbf{v}$ соотношением

$$\mathbf{q} = -\varkappa\Delta T + \rho\mathbf{v}\left(C_pT + \frac{v^2}{2}\right); \qquad (2)$$

Q_s — количество тепла, выделяемого тепловым источником в единице объема за 1 *сек*; ρ — масса единицы объема; C_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Поскольку в плазме существенную роль играют потери на излучение Q_R, для которого плазма при $n \approx 10^{22}$ *см*$^{-3}$ и $T \approx 10^8$ °K практически прозрачна, то в $Q_s(\rho, T)$ необходимо включить и эти потери:

$$Q_s(\rho, T) = Q_F - Q_R. \qquad (3)$$

При записи выражения для теплового эффекта реакции Q_F необходимо учитывать, что, если размеры плазмы малы по сравнению с длиной пробега заряженных частиц — продуктов реакции, на нагрев плазмы идет только часть выделившейся энергии [1].

Выражения для Q_F и Q_R можно найти в монографии [3]. Предположим, что коэффициент теплопроводности является степенной функцией температуры:

$$\varkappa = \beta T^k. \qquad (4)$$

Для кулоновской плазмы при отсутствии внешнего магнитного поля показатель степени в (4)

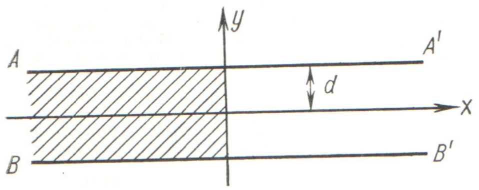

Рис. 1. Слой плазмы, удерживаемый стенками AA и BB'. Область, занятая горячей плазмой, заштрихована.

равен $k = 5/2$, $\beta = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$ *эрг·см*$^{-1}$·*сек*$^{-1}$ $\times$ $\times$ *град*$^{-7/2}$.

Дивергенционный член в уравнении (2) описывает поток тепла вдоль системы и на стенки. Задачу можно существенно упростить, если для описания потока тепла на стенки воспользоваться выражением, полученным в работе [1], т. е. выражением, описывающим поток тепла на стенки в равновесном состоянии:

$$Q_\chi = \frac{2s\beta}{k+1}\frac{T^{k+1}}{d^2}, \qquad (5)$$

где следует принять $s = 1$ для плоского слоя и $s = 2$ для бесконечно длинного цилиндра. После введения этого упрощающего допущения задача по существу будет одномерной. Попробуем найти решение уравнения теплопроводности в виде плоской волны, движущейся с постоянной скоростью w' вдоль оси x, т. е. в виде

$$T = T\,(x - w't), \qquad (6)$$

или в системе координат, движущейся вместе с волной, в виде $T = T\,(x')$. Обозначив, как и раньше, температуру в центре объема плазмы (где имеется тепловое равновесие) через T_0 (очевидно, это максимальная температура в системе), введем безразмерную температуру $\theta = TT_0^{-1}$ и безразмерную координату $\xi = x'd^{-1} \equiv \equiv (x - w't)\,d^{-1}$. В результате получим безразмерное уравнение теплопроводности (здесь и далее $k_{\|}$ — показатели степени, относящиеся к теплопроводности вдоль системы; в общем случае может быть $k \neq k_{\|}$):

$$(\theta^{k_{\|}}\theta_\xi)_\xi + \nu\vartheta_\xi = \phi\,(\theta;\; n_0 d,\; T_0). \qquad (7)$$

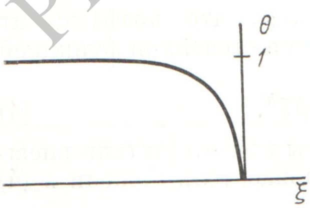

Рис. 2. Зависимость температуры θ на фронте волны от координаты ξ.

Здесь

$$\nu = \frac{mC_p}{\beta T_0^{k_{\|}}} \cdot n_0' d \cdot w'; \quad \phi = d^2\,\frac{Q_F - Q_R - Q_\chi}{\beta T_0^{k_{\|}}};$$

n_0' — плотность плазмы непосредственно перед фронтом волны. В уравнении (7) необходимо учитывать, что плотность плазмы не постоянна, а зависит от температуры; далее будет показано, что скорость волны в достаточно широком интервале температур меньше скорости звука, так что давление можно считать постоянным, и тогда $n \approx 1/T$.

Сформулируем граничные условия. Выберем начало координат в системе отсчета, связанной с волной, непосредственно перед фронтом волны. Тогда, согласно рис. 2, область с $\theta > 0$ находится при $\xi < 0$. В области $\xi \geqslant 0$ положим $\theta = 0$. Второе граничное условие при $\theta = 0$ соответствует равенству нулю потока энергии. С другой стороны, достаточно далеко за фронтом волны, в области, где предполагается тепловое равновесие, должны выполняться два условия: $\theta = 1$ и $\theta_\xi = 0$, которые, как нетрудно видеть, эквивалентны. Таким образом, в области, где $\theta \approx 1$, по существу, одно граничное условие.

Из уравнения (7) и граничных условий можно получить условие существования термоядерной волны горения, ее скорость, а также условие теплового равновесия за фронтом волны.

Приближенный метод решения

Итак, задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (7), которое является нелинейным и неоднородным. Поэтому найти его аналитическое решение во всей области изменения аргумента ξ не представляется возможным. Однако можно воспользоваться приближенным методом, состоящим в том, что отыскивается решение в двух предельных областях: при $\theta \ll 1$ и $\theta \approx 1$, затем полученные решения сшиваются в промежуточной области при $\theta \approx 1/2$. В точке сшивки, очевидно, должны выполняться два условия: равенство обоих решений и их производных (в противном случае нарушается условие непрерывности потока энергии).

Решение уравнения в области, где $\theta \ll 1$. Как уже отмечалось, непосредственно перед волной принимаем $\theta = 0$. В начале волнового фронта, очевидно, происходит разогревание плазмы, причем в основном за счет тепла, поступающего из соседней более горячей области (собственная генерация тепла здесь еще мала).

Тепло поступает благодаря теплопроводности; подогревом за счет поглощения собственного излучения плазмы можно пренебречь. Поток тепла не только разогревает плазму, но и компенсирует потери на излучение и теплопроводность к стенкам и соседним более холодным областям.

Пренебрегая правой частью уравнения (7), описывающей тепловые потери и собственную генерацию тепла, по сравнению с первым членом слева, описывающим тепловой поток из более нагретой области, получим уравнение

$$(\theta^{k_{\|}}\theta_\xi)_\xi + \nu\theta_\xi = 0. \tag{8}$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям, будет иметь вид

$$\theta = (-k_{\|}\nu\xi)^{-1/k_{\|}}. \tag{9}$$

Знак минус появился здесь потому, что вследствие выбранной нами системы координат область $\theta > 0$ находится при отрицательных ξ; так что величина в скобках положительная. Подставив полученное решение в уравнение (7), легко убедиться в том, что в отсутствие заметных потерь на излучение правой частью (7) действительно можно пренебречь. При наличии этих потерь такое пренебрежение допустимо только при $k_{\|} > 5/2$. В случае $k_{\|} = 5/2$ решение имеет ту же степенную зависимость от ξ, которая дается выражением (9), если в последнем принять $k_{\|} = 5/2$:

$$\theta = (-q_+\xi)^{2/5}, \tag{10}$$

но с другим множителем перед ξ, учитывающим радиационные потери энергии:

$$q_+ = \frac{5}{4}\nu + \sqrt{\frac{25}{16}(\nu)^2 + \frac{25}{4}\phi_R(1)}. \tag{11}$$

Из полученных решений видно, что волновой фронт укручивается (см. рис. 2) по мере приближения к точке $\xi = 0$: $\theta_\xi|_{\xi\to 0} \to -\infty$.

Решение уравнения в области, где $\theta \approx 1$. В этом случае пренебречь каким-либо членом справа в уравнении (7), очевидно, нельзя, однако его можно существенно упростить введением новой функции z согласно соотношению

$$z = 1 - \theta \ll 1 \tag{12}$$

и последующим разложением членов уравнения (7) по z.

Произведя в уравнении (7) разложение по z и удержав первые неисчезающие члены, получим

$$z_{\xi\xi} + \nu z_\xi + \phi'_\theta(1)\, z = 0. \tag{13}$$

Здесь учитывается также то обстоятельство, что достаточно далеко за фронтом волны при $\theta = 1$ должно выполняться условие теплового равновесия

$$\phi|_{\theta=1} = 0. \tag{14}$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$z = C_+e^{p_+\xi} + C_-e^{p_-\xi}, \tag{15}$$

где p_+, p_- — корни характеристического уравнения

$$p_\pm = -\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - \phi'_\theta(1)}. \tag{16}$$

Поскольку при приближении к области теплового равновесия $\theta \to 1$ и, следовательно, должно $z \to 0$, необходимо принять $C_- = 0$. Чтобы экспонента при C_+ убывала по мере удаления от фронта в область высоких температур, должно быть $p_+ > 0$, а это возможно лишь при

$$\phi'_\theta(1) < 0. \tag{17}$$

Исходя из физических соображений, нетрудно заметить, что при $\phi'_\theta(1) > 0$ невозможно ни устойчивое тепловое равновесие за фронтом волны [1], ни сама волна горения. Если $\phi'_\theta(1) < 0$, возможна также волна остывания. Убедиться в этом можно, заметив, что волне остывания соответствует $\nu < 0$ (она должна, очевидно, распространиться в сторону, противоположную волне горения); при этом $p_+ > 0$. Дополнительным условием существования волны остывания, как следует из (10), (11), является наличие потерь на излучение.

Окончательно для области $\theta \approx 1$ получим решение

$$\theta = 1 - C_+e^{p_+\xi}. \tag{18}$$

Входящую в (18) константу нельзя определить из граничных условий, так как в области $\theta \approx 1$ по существу только одно граничное условие, которое уже использовано при определении C_-.

Сшивка решений и скорость волны. Как уже упоминалось в начале раздела, сшивать полученные решения необходимо при $\theta \approx 1/2$, т. е. там, где собственная генерация тепла мала, но не настолько, чтобы ею можно было пренебречь по сравнению с потоком тепла из более горячей области. При этом в точке сшивки должны выполняться два условия, следующие из непрерывности температуры и ее производной. Из первого условия находим константу интегрирования C_+, из второго — скорость волны. Наиболее простое выражение для ско-

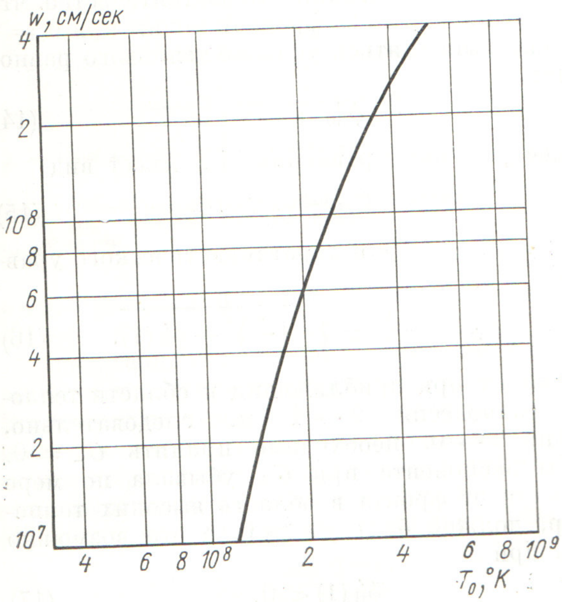

Рис. 3. Зависимость скорости термоядерной волны горения от T_0.

рости волны получается в том случае, когда радиационные потери несущественны (в области $T > 10^8$ °K, в которой возможна волна горения, это действительно так). При $k \geqslant 5/2$ для скорости волны имеем

$$w = \alpha \frac{\beta T_0^{k_{||}}}{m C_p} \frac{\sqrt{|\phi'(1)|}}{n_0 d}. \qquad (19)$$

Здесь w — скорость перемещения фронта волны по отношению к горячему веществу, т. е. $w = w' n_0'/n_0$); числовой множитель в общем случае зависит от показателя степени $k_{||}$. Сравнение с точным решением, полученным численным методом, показывает, что (19) правильно описывает изменение скорости волны, если принять $\alpha = 1$.

Используя далее связь между $n_0 d$ и T_0, налагаемую условием теплового равновесия за фронтом волны, можно найти зависимость скорости волны от T_0. Для случая, когда тепловой контакт плазмы со стенками осуществляется ионами (параллельно стенкам включено довольно сильное магнитное поле), а вдоль системы тепло переносится электронами по закону (4) с $k_{||} = 5/2$, эта зависимость представлена графически на рис. 3. Скорость волны достаточно быстро возрастает с увеличением температуры, оставаясь, однако, меньше скорости звука вплоть до температур $\sim 4 \cdot 10^9$ °K.

Исследование задачи методом фазовой плоскости

Метод фазовой плоскости [4] позволяет легко получить качественные выводы о возможности существования термоядерной волны горения, а также количественно оценить скорость волны. Кроме того, этот метод полезен в том отношении, что наглядно доказывает однозначность полученного решения.

Введя фазовую переменную $y(\theta) = \theta_\xi$, преобразуем исходное уравнение (7) к виду

$$y^2 + \nu \frac{y}{k_{||} \theta^{k_{||}-1}} + \frac{\phi(\theta)}{k_{||} \theta^{k_{||}-1}} = -\frac{1}{k_{||}} \theta y y_\theta, \qquad (20)$$

где $\phi(\theta)$ — функция теплового источника, включающая генерацию тепла, потери тепла на стенки и на излучение. Используя далее функции

$$y_\pm(\theta) = -\frac{\nu}{k_{||}\theta^{k_{||}-1}} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{k_{||}\theta^{k_{||}-1}}\right)^2 - \frac{\phi(\theta)}{k_{||}\theta^{k_{||}-1}}}, \qquad (21)$$

являющиеся корнями уравнения (20) без правой части, последнее можно преобразовать к виду

$$y_\theta = -\frac{k_{||}}{\theta y} [y - y_+(\theta)] [y - y_-(\theta)]. \qquad (22)$$

Семейство интегральных кривых уравнения (22) для $k_{||} = 5/2$ схематически представлено на рис. 4. Жирные линии — графики функций $y = y_\pm(\theta)$. На основании результатов предыдущего раздела натрудно показать, что искомая интегральная кривая при $\theta \ll 1$ связана с $y_-(\theta)$ линейной зависимостью: $y(\theta) \approx c y_-(\theta)$, где коэффициент пропорциональности $c > 1$. При $\theta \approx 1$ также имеем линейную связь $y = c y_+(\theta)$, однако здесь $c < 1$. Таким образом, интегральная кривая, представляющая решение задачи, должна идти ниже особой кривой $y_-(\theta)$ при $\theta \ll 1$ и выше $y_+(\theta)$ при $\theta \approx 1$. Ход интегральных кривых существенно меняется в зависимости от соотношения между ν и $\nu_{кр}$, где $\nu_{кр}$ — то наименьшее значение ν, при котором подкоренное выражение в (21) еще не отрицательно при любых θ из интервала [0, 1].

Рис. 4, *а* соответствует $\nu > \nu_{кр}$. Интегральная кривая, удовлетворяющая граничному условию $\theta = 1$, $\theta_\xi = 0$ при $\xi = -\infty$, должна исходить из точки, где $\theta = 1$; $y = 0$ (точка B). Как видно из рис. 4, *а*, необходимых интегральных кривых, соединяющих «холодное» ($\theta \to 0$, $\theta_\xi \to 0$) и «горячее» состояния вещества, в этом случае нет.

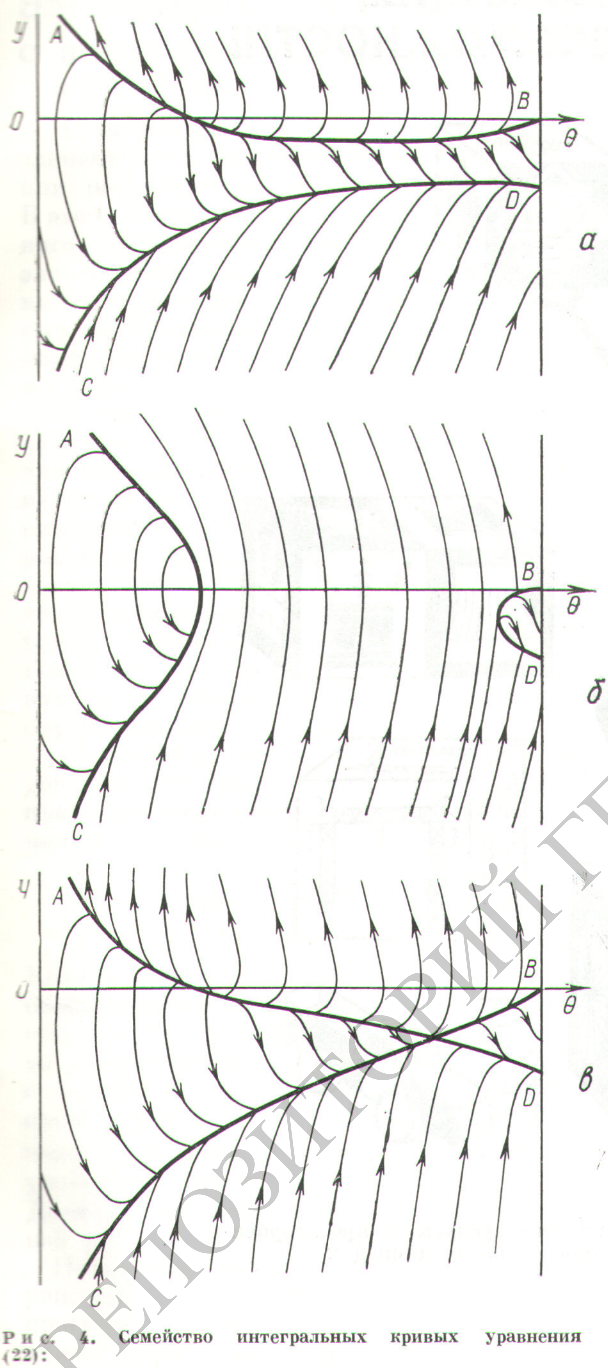

Рис. 4. Семейство интегральных кривых уравнения (22):
а — $\nu > \nu_{кр}$; *б* — $\nu < \nu_{кр}$; *в* — $\nu \approx \nu_{кр}$.

На рис. 4, *б* показаны интегральные кривые для $\nu < \nu_{кр}$. Из рисунка следует, что и в этом случае нет интегральных кривых, удовлетворяющих условиям задачи.

Соответствующая интегральная кривая (BC) существует, как следует из рис. 4,*в*, при $\nu \approx \nu_{кр}$. Отсюда находим скорость волны, которая качественно согласуется с величиной, полученной приближенным методом в предыдущем разделе. Подтверждается также необходимое условие существования термоядерной волны горения, а именно: производная правой части уравнения (7) должна быть отрицательной при температурах, близких к максимальной температуре плазмы.

Таким образом, из приведенного анализа можно заключить, что волна горения в термоядерной плазме может иметь место лишь в той области параметров плазмы, где производная по температуре эффективного источника тепла, включающего помимо энергетического эффекта реакции синтеза также потери тепла на стенки и излучение плазмы, отрицательна. Этот критерий является одновременно условием устойчивости теплового равновесия плазмы со стенками [1]. Найденное решение с монотонным профилем волны (см. рис. 2) единственное: волн другого типа в нашем случае не возникает. В иных условиях могут иметь место волны другой структуры. Так, в работе [5] численным методом было найдено, что в безграничной плазме, когда нет теплового контакта плазмы со стенками, возможна волна горения пространственно-периодического типа.

Поступила в Редакцию 5/VII 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Настоящий. «Атомная энергия», **32**, 43 (1972).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1945.
3. Л. А. Арцимович. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
5. S. Alikhanov, I. Konkashbaev. Nucl. fusion, **11**, 119 (1971).