

# Уравнение переноса нейтронов, удобное для получения приближенных уравнений термализации

Н. И. ЛАЛЕТИН

УДК 539.125.52:621.039.51.12

Часто бывает полезно преобразовать уравнение, описывающее тот или иной физический процесс, в эквивалентное ему, но в каком-нибудь смысле более удобное. Обычная формульная схема такого преобразования может быть описана так. Оператор  $\hat{A}$  начального уравнения  $\hat{A}f = S'$  разбивают на сумму двух:  $\hat{A} = \hat{A}_0 + \hat{B}$ . Если существует оператор  $A_0^{-1}$ , обратный  $\hat{A}_0$ , то для известной функции  $f$  получается уравнение вида

$$f = \hat{A}_0^{-1}S - \hat{A}_0^{-1}Bf.$$

Примерами подобного преобразования могут служить: в квантовой механике получение интегральной формы уравнения Шредингера из дифференциальной [1] и получение уравнения Пайерлса [2] и уравнения Вигнера — Вейнберга — Корнгольда — Орлова [3—4] из уравнения Больцмана в теории переноса нейтронов. Такое преобразование будет полезным при удачном выборе  $\hat{A}_0$ , т. е. по существу при выборе достаточно характерного для интересующего нас круга задач.

Указанная схема преобразования уравнения при рассмотрении термализации нейтронов требует некоторой модификации. Начинать следует с выбора характерного решения, и тут не обойтись без привлечения физических соображений.

Рассмотрим самую простую задачу об энергетическом спектре медленных нейтронов в бесконечной однородной среде от моноэнергетического, однородного по пространству источника [5]. Уравнение для этого случая имеет вид

$$[\Sigma_a(\epsilon) + \Sigma_s(\epsilon)] \Phi(\epsilon) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(\epsilon' \rightarrow \epsilon) \Phi(\epsilon') d\epsilon' + \delta(\epsilon - \epsilon_1). \quad (1)$$

Здесь  $\epsilon = E/kT$  — энергия нейтронов  $E$  в единицах  $kT$ , где  $T$  — температура среды, а  $k$  — постоянная Больцмана;  $\Phi(\epsilon)$  — поток нейтронов энергии  $\epsilon$ ;  $\Sigma_a(\epsilon)$  и  $\Sigma_s(\epsilon)$  — макроскопические сечения поглощения и неупругого рассеяния нейтронов;  $\Sigma_s(\epsilon' \rightarrow \epsilon)$  — сечение рассеяния нейтрона с энергией  $\epsilon'$  в интервале вблизи энергии  $\epsilon$ ;  $\delta(x) = \delta$  — функция Дирака;  $\epsilon_1$  — энергия нейтронов источника. Будем рассматривать

$$\epsilon_1 \gg 1.$$

Перепишем уравнение (1):

$$\frac{dQ}{d\epsilon} = \Sigma_a(\epsilon) \Phi(\epsilon) - \delta(\epsilon - \epsilon_1), \quad (2)$$

где введено обозначение

$$Q(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} d\epsilon'' \int_{\epsilon}^{\infty} d\epsilon' \Sigma_s(\epsilon' \rightarrow \epsilon'') \Phi(\epsilon') - \int_{\epsilon}^{\infty} d\epsilon'' \int_0^{\epsilon} d\epsilon' \Sigma_s(\epsilon' \rightarrow \epsilon'') \Phi(\epsilon'). \quad (3)$$

Из написанной формулы видно, что  $Q(\epsilon)$  есть обобщение плотности замедления на случай, когда ядра движутся. Естественно называть  $Q(\epsilon)$  током по энергетической оси.

В качестве вспомогательных функций для преобразования уравнения (2) возьмем решения уравнения

$$\frac{dQ}{d\epsilon} = 0.$$

Одно решение, соответствующее  $Q(\epsilon) \equiv 0$ , является равновесным распределением  $M(\epsilon) = \epsilon e^{-\epsilon}$ . Другим решением будет функция, для которой  $Q(\epsilon) = \text{const} \neq 0$  (без уменьшения общности можем взять  $\text{const} = 1$ ).

Обозначим это решение через  $I(\epsilon)$  и приведем основные сведения о нем, которые будут нужны для дальнейшего.

В области замедления ( $\epsilon \gg 1$ )  $I(\epsilon)$  будет переходить в хорошо известный спектр Ферми  $I(\epsilon) \sim 1/\xi_0 \Sigma_s \epsilon$ . Здесь  $\xi_0$  — средняя логарифмическая потеря энергии при столкновении с неподвижным ядром. Вообще говоря, функция  $I(\epsilon)$  разбивается на две части:  $I(\epsilon) = -\frac{\delta(\epsilon)}{\Sigma_s(\epsilon)} + I_p(\epsilon)$ , где  $I_p(\epsilon)$  — регулярная составляющая решения. Эта составляющая определена с точностью до прибавления максвелловской функции с произвольным множителем. Поэтому удобнее иметь дело с функцией

$$i(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} [I_p(\epsilon)/M(\epsilon)].$$

Учитывая поведение  $i(\epsilon)$  при  $\epsilon \gg 1$ , введем новую функцию

$$z(\epsilon) = e^{\epsilon} \int_{\epsilon}^{\infty} i(\epsilon') e^{-\epsilon'} d\epsilon'.$$

Тогда  $i(\epsilon) = z(\epsilon) - \frac{d}{d\epsilon} z(\epsilon)$ .

Так как в предельных случаях газовой модели ( $m = 1$  и  $m \gg 1$ , где  $m$  — массовое число ядра замедлителя) функция  $z(\epsilon)$  выражается единой формулой [6]

$$z_{г. м}(\epsilon) = \frac{1}{\xi_0 \Sigma_s(\epsilon) M(\epsilon)},$$

имеет смысл представить  $z(\epsilon)$  в общем случае в виде

$$z(\epsilon) = \frac{1+t(\epsilon)}{\xi_0 \Sigma_s(\epsilon) M(\epsilon)}.$$

Легко показать, что  $t(\epsilon)$  удовлетворяет интегральному уравнению 2-го рода, которое может быть решено численно стандартными методами. Следовательно,  $t(\epsilon) \equiv 0$  для газа с  $m = 1$ , а для газа с  $m \gg 1$  эта функция заметно отличается от нуля лишь при  $\epsilon < \frac{1}{m}$ .

Заметим, что в выражение для  $z(\epsilon)$  величина  $t(\epsilon)$  входит в комбинации  $\xi_0 \Sigma_s(\epsilon) / [1+t(\epsilon)]$ . Введем величину  $\xi(\epsilon) = \xi_0 / [1+t(\epsilon)]$ . Можно полагать, что она характеризует каким-то образом ширину распределения однократно рассеянных нейтронов, имевших до столкновения энергию  $\epsilon$ .

С помощью имеющихся в нашем распоряжении двух характерных решений  $M(\epsilon)$  и  $I(\epsilon)$  преобразуем исходное кинетическое уравнение (1). В формальной схеме, о которой шла речь, первым шагом является выделение оператора  $\hat{A}_0$ , определяемого характерными решениями. В данном случае подходящим оператором будет

$$\hat{A}_0 f = \int_0^\infty \Sigma_s(\epsilon' \rightarrow \epsilon) f(\epsilon') d\epsilon' - \Sigma_s(\epsilon) f(\epsilon).$$

Однако непрерывного обратного оператора  $\hat{A}_0^{-1}$  в классе функций, удовлетворяющих естественным физическим требованиям, не существует, так как не существует решения уравнения

$$\int_0^\infty \Sigma_s(\epsilon' \rightarrow \epsilon) f(\epsilon') d\epsilon' - \Sigma_s(\epsilon) f(\epsilon) = -\delta(\epsilon - \epsilon_1).$$

Физически это понятно и обусловлено тем, что не может существовать стационарного распределения нейтронов в бесконечной непоглощающей среде с постоянно действующим источником. Существует, однако, решение урав-

нения

$$\int_0^\infty \Sigma_s(\epsilon' \rightarrow \epsilon) f(\epsilon') d\epsilon' - \Sigma_s(\epsilon) f(\epsilon) = \delta(\epsilon - \epsilon_0) - \delta(\epsilon - \epsilon_1), \quad (4)$$

которое будет использовано ниже. Решение это определено с точностью до прибавления максвелловской функции с произвольным множителем. В пользу того, что решение уравнения (4) существует, кроме очевидных физических рассуждений, можно привести и формальный математический аргумент. Известно, что, если однородное уравнение  $\hat{A}_0 f = 0$  имеет нетривиальное решение, соответствующее неоднородное уравнение  $\hat{A}_0 f = \varphi$  будет иметь решение лишь в том случае, когда правая часть уравнения  $\varphi(x)$  ортогональна решению сопряженного однородного уравнения  $\hat{A}_0^+ f^+ = 0$ . Так как в данном случае решение сопряженного уравнения

$$\hat{A}_0^+ f^+ = \int_0^\infty \Sigma_s(\epsilon \rightarrow \epsilon') [f^+(\epsilon') - f^+(\epsilon)] d\epsilon' = 0$$

является константой, требуется, чтобы интеграл от правой части уравнения (4) обращался в нуль, что и выполняется на самом деле.

Для упрощения выкладки положим в уравнении (4)  $\epsilon_1 \rightarrow \infty$ , что, однако, не уменьшает общности рассмотрения. Решение получающегося при этом уравнения обозначим через  $G(\epsilon/\epsilon_0)$ . Так как левая часть уравнения (4) представляет собой величину  $dQ/d\epsilon$ , легко установить, что  $Q = 0$  при  $\epsilon < \epsilon_0$  и  $Q = 1$  при  $\epsilon > \epsilon_0$ . Рассуждаем далее следующим образом. При рассмотрении области энергий  $\epsilon < \epsilon_0$  можно полагать, что удаление имеющегося в задаче стока нейтронов, расположенного при  $\epsilon = \epsilon_0$ , в сторону бесконечных энергий существенно изменит решение в интересующей нас области энергий лишь в непосредственной близости к  $\epsilon = \epsilon_0$ , т. е. главной частью решения  $G(\epsilon/\epsilon_0)$  при  $\epsilon < \epsilon_0$  будет максвелловская функция  $M(\epsilon)$ . Аналогичное рассуждение при рассмотрении области  $\epsilon > \epsilon_0$  позволяет надеяться, что главной частью решения при этом будет  $I(\epsilon)$ . Руководствуясь этими соображениями, представим  $G(\epsilon/\epsilon_0)$  в виде

$$G(\epsilon/\epsilon_0) = \frac{g(\epsilon/\epsilon_0)}{\Sigma_s(\epsilon)} - \frac{\delta(\epsilon - \epsilon_0)}{\Sigma_s(\epsilon)} + \begin{cases} C_1(\epsilon_0) M(\epsilon), & \epsilon < \epsilon_0; \\ C_2(\epsilon_0) M(\epsilon) + I(\epsilon), & \epsilon \geq \epsilon_0. \end{cases} \quad (5)$$

Преобразуя последний интеграл справа, приходим к уравнению

$$\Phi(\varepsilon) = M(\varepsilon) \left[ C + \int_0^\varepsilon i(\varepsilon') Q(\varepsilon') d\varepsilon' \right] + \frac{1}{\Sigma_s(\varepsilon)} \left[ \int_0^\infty g(\varepsilon/\varepsilon') \frac{dQ}{d\varepsilon'} d\varepsilon' - \frac{dQ}{d\varepsilon} \right]. \quad (7)$$

Здесь  $i(\varepsilon') = \frac{d}{d\varepsilon'} [I_p(\varepsilon')/M(\varepsilon')]$ ;  $Q(\varepsilon)$  — ток по энергетической оси, равный в нашем случае  $Q(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Sigma_a(\varepsilon') \Phi(\varepsilon') d\varepsilon'$ . Постоянная  $C$  определяется из условия  $\int_0^\infty \Sigma_a(\varepsilon') \Phi(\varepsilon') d\varepsilon' = 1$ , т. е.

$$C = \frac{1}{\bar{\Sigma}_s} \left( 1 + \int_0^\infty [\Sigma_s \Phi(\varepsilon) - \Sigma_s M(\varepsilon) \times \int_0^\varepsilon i(\varepsilon') Q(\varepsilon') d\varepsilon' - \bar{g}] d\varepsilon \right). \quad (8)$$

Здесь  $\bar{\Sigma}_s = \int_0^\infty \Sigma_s(\varepsilon) M(\varepsilon) d\varepsilon$  — сечение рассеяния, усредненное по максвелловскому спектру,

а  $\bar{g} = \int_0^\infty d\varepsilon \int_0^\infty d\varepsilon' g(\varepsilon/\varepsilon') \Sigma_a(\varepsilon') \Phi(\varepsilon')$ . Интеграл

в выражении (8) существует, так как, хотя  $\Sigma_s(\varepsilon) \Phi(\varepsilon) \sim \frac{1}{\xi_0 \varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , но в силу того что  $Q(\varepsilon) \rightarrow 1$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , 2-й член подынтегрального выражения при  $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$\Sigma_s(\varepsilon) M(\varepsilon) \int_0^\varepsilon i(\varepsilon') Q(\varepsilon') d\varepsilon' \sim \Sigma_s(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{I(\varepsilon)}{M(\varepsilon)} \sim \frac{1}{\xi_0 \varepsilon}$$

и все подынтегральное выражение убывает быстрее, чем  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Уравнение (7) совместно с выражением (8) в точности эквивалентно уравнению (1). Сравним их. Информация о процессе рассеяния нейтрона ядрами вещества, которая в уравнение (1) входила через сечение  $\Sigma_s(\varepsilon' \rightarrow \varepsilon)$ , теперь заключается в двух функциях:  $i(\varepsilon')$

и  $g(\varepsilon/\varepsilon')$ . Основную роль при этом играет функция  $i(\varepsilon')$ , которая зависит лишь от одной переменной и входит в интеграл с переменным верхним пределом. Сравнивая далее интеграл  $\int_0^\infty \Sigma_a \Phi(\varepsilon') g(\varepsilon/\varepsilon') d\varepsilon'$  с интегралом столкнове-

ний уравнения (1)  $\int_0^\infty \Sigma_s(\varepsilon' \rightarrow \varepsilon) \Phi(\varepsilon') d\varepsilon'$ , ви-

дим, что первый, как правило, меньше, потому что зависит от плотности поглощений, а не от плотности рассеяния, а также вследствие того, что  $g(\varepsilon/\varepsilon')$  в отличие от  $\Sigma_s(\varepsilon' \rightarrow \varepsilon)$  является знакопеременной функцией. Поэтому уравнение (7) оказывается удобной основой для построения приближенных уравнений. Заметим также, что в уравнении (7) выделена, так сказать, тривиальная, максвелловская часть решения, что позволяет фиксировать внимание на отклонениях от максвелловского распределения. Это делает уравнение (7) более удобным для качественного анализа решения.

Как уже отмечалось, использовавшееся до сих пор предположение, что энергия нейтронов источника бесконечно велика, не является каким-либо ограничением. В частности, можно показать, что при источнике нейтронов, описываемом функцией  $S(\varepsilon)$ , уравнение (7) остается справедливым, при этом ток по энергетической оси  $Q(\varepsilon)$  должен быть записан в виде

$$Q(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon [\Sigma_a(\varepsilon') \Phi(\varepsilon') - S(\varepsilon')] d\varepsilon'. \quad (9)$$

Из уравнения (7) просто получаются [7] все известные приближенные уравнения термализации. При этом требуется так или иначе аппроксимировать интеграл  $\int_0^\infty g(\varepsilon/\varepsilon') \Sigma_a \Phi(\varepsilon') d\varepsilon'$ .

Перепишем уравнение (7):

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\Sigma_a(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{i(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \times \left( \frac{\Phi(\varepsilon)}{M(\varepsilon)} + \frac{\gamma(\varepsilon_1 \Phi) \Sigma_a \Phi(\varepsilon)}{\xi_0 \Sigma_s(\varepsilon) M(\varepsilon)} \right) \right]. \quad (10)$$

Здесь

$$\gamma(\varepsilon_1 \Phi) = \xi_0 \left( 1 - \frac{\int \bar{g}(\varepsilon_1 \varepsilon') \Sigma_a(\varepsilon') \Phi(\varepsilon') d\varepsilon'}{\Sigma_a(\varepsilon) \Phi(\varepsilon)} \right).$$

Если считать, что  $\frac{\int g(\varepsilon/\varepsilon') \Sigma_a \Phi(\varepsilon') d\varepsilon'}{\Sigma_a \Phi(\varepsilon)} \approx g_1(\varepsilon)$ , уравнение (10) превращается в дифференциальное уравнение второго порядка. Пользуясь

выражением для  $\Sigma_s(\epsilon)$ , полученным в газовой модели, и разлагая все входящие в уравнение (10) величины по степеням  $\frac{1}{m}$ , получим уравнения Уилкинса [8] и Корнгольда [9]. При этом должны выполняться условия  $\epsilon > \frac{1}{m}$  и  $\frac{\Sigma_a(1)}{\xi_0 \Sigma_0} \ll 1$ .

Если в уравнении (10) положить

$$z(\epsilon) = \frac{1}{\xi_0 \Sigma_s(\epsilon) M(\epsilon)} \left[ i(\epsilon) = z(\epsilon) - \frac{d}{d\epsilon} z(\epsilon) \right];$$

$$\Sigma_s(\epsilon) = \Sigma_0 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2m\epsilon} \right) \operatorname{erf} \sqrt{m\epsilon} + \frac{e^{-m\epsilon}}{\sqrt{m\epsilon}} \right];$$

$$\gamma(\epsilon\Phi) = \gamma_0 = 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha (\ln \alpha)^2}{(1-\alpha)\xi_0}, \quad \alpha = \left( \frac{m-1}{m+1} \right)^2,$$

получится уравнение, включающее в себя три предельных случая: уравнение Вигнера — Уилкинса для  $m=1$  и уравнения Уилкинса и Корнгольда для  $m \gg 1$ . Это уравнение, предложенное в работе [6], должно, следовательно, давать неплохие результаты для газа произвольной массы.

Если функции  $i(\epsilon)$  и  $\gamma(\epsilon)$  выбирать так, чтобы приближенное уравнение давало в среде с малым поглощением, ведущим себя как  $1/\sqrt{\epsilon}$ , решение как можно более близкое к решению точного уравнения, то получим уравнение «обобщенной модели тяжелого газа» [10, 11] и «вторичной» модели [11]. При этом уравнение (10) позволяет получить формулы для более надежного определения функции  $i(\epsilon)$  и  $\gamma(\epsilon)$ , чем в работах [10, 11].

Из двух функций, входящих в рассмотренные приближенные уравнения, основную роль играет, конечно, функция  $i(\epsilon)$  при всех энергиях  $\epsilon$  и особенно при  $\epsilon \gg 1$ , где ее роль становится определяющей. Функция же  $\gamma(\epsilon)$  в средах с не слишком сильным поглощением сказывается на поведении решения лишь при  $\epsilon \leq 1$ , где основную роль играет максвелловская составляющая решения. Слабая зависимость спектров нейтронов от функции  $\gamma(\epsilon)$  в средах с сечением поглощения, меняющимся как  $1/\sqrt{\epsilon}$ , демонстри-

руется результатами расчетов в работах [10, 12]. Однако, если поглощение меняется резонансным образом, роль функции  $\gamma(\epsilon)$  становится более значительной. Это видно из соответствующих графиков работ [11, 12].

Эти соображения послужили основой для предложения описывать термализацию нейтронов в воде с помощью двухконстантной модели [12]. При выборе функции  $\xi(\epsilon)\Sigma_s(\epsilon) = \text{const}$  учитывался замеченный многими исследователями факт, что спектры нейтронов в воде с поглотителем, меняющимся как  $1/\sqrt{\epsilon}$ , хорошо описываются «тяжелого газовой» моделью. Для того же, чтобы модель удовлетворительно описывала также термализацию в воде с резонансным поглотителем, введена функция  $\gamma(\epsilon)$ . Так как все «интересные» резонансы в сечениях поглощения расположены при  $\epsilon \gg 1$ , была выбрана простейшая зависимость  $\gamma(\epsilon) = \gamma_0 = 1$ . Как показано выше, такая простая модель дает вполне удовлетворительную точность.

В заключение заметим, что не представляет труда выполнить преобразование, подобное сделанному в этой работе, также для уравнения с пространственной зависимостью [7].

Поступила в Редакцию 17/IV 1972 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шифф Д. Квантовая механика. М., Изд-во иностранной литературы, 1957.
2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
3. Corngold N. Proc. Phys. Soc., **A70**, 793 (1957).
4. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностранной литературы, 1961.
5. Лалетин Н. И. Препринт ИАЭ-2146, 1971.
6. Лалетин Н. И. «Атомная энергия», **14**, 458 (1963).
7. Лалетин Н. И. Препринт ИАЭ-2145, 1971.
8. Коген Е. (США). I Женевская конференция (1955). Доклад № P/611.
9. Corngold N. Ann. Phys., **6**, 368 (1959).
10. Pitcher H. AEEW-M-350, 1963.
11. Cadilhac M., et al. BNL-719 (c-32). Vol. 2, 1962, p. 439; В сб. Термализация нейтронов. М., Атомиздат, 1964; Cadilhac M. et al. (Франция). III Женевская конференция (1964). Доклад № P/73.
12. Лалетин Н. И. «Атомная энергия», **17**, 193 (1964).