

Неустойчивость аксиальных колебаний в ускорителе электронных колец

В. Р. ЗЕНКЕВИЧ, Д. Г. КОШКАРЕВ, Э. А. ПЕРЕЛЬШТЕЙН

УДК 621.384.639

Проблема устойчивости системы двух кольцевых пучков, состоящих из различных частиц, приобрела в последнее время большое значение в связи с развитием метода коллективного ускорения ионов [1]. Возможности метода (набор энергии на единицу длины и количество ускоряемых ионов) определяются параметрами пучка, которые должны сохраняться во время ускорения.

При анализе устойчивости принято разделять аксиальные и поперечные (аксиальные и радиальные) ветви когерентных колебаний. В данной работе рассматривается неустойчивость электрон-ионных колец по отношению к аксиальным изгибам без изменения формы поперечного сечения — аксиальная дипольная неустойчивость («змеяка»), которая представляется наиболее опасной из всех видов поперечных колебаний.

В работах [2—4], посвященных этой проблеме, не учитывалось влияние собственных полей, а в частности полей излучения колеблющегося электронного кольца на движение электронов (электрон-электронное взаимодействие). Поэтому возник вопрос, не могут ли потери энергии пучка из-за когерентного излучения стабилизировать неустойчивость двухпучковой системы. В работе [5] был получен отрицательный ответ на этот вопрос для частного случая — однокомпонентного электронного кольца, помещенного в резонатор.

В настоящей работе исследованы дипольные колебания электронного кольца в других условиях (в свободном пространстве и в волноводе с разрезами). Оказалось, что в этих условиях влияние собственного поля приводит к возникновению когерентной неустойчивости.

Значение дисперсии по импульсам, стабилизирующей эту неустойчивость, может быть уменьшено с помощью фокусировки внешним полем или фокусировки Беннета. Анализ колебаний электрон-ионных колец показал, что эффекты, связанные с полем когерентного излучения, не стабилизируют дипольных резонансов.

Дипольные колебания электронного пучка в свободном пространстве. Рассмотрим электронное кольцо с круглым сечением. Пусть R — радиус центральной орбиты кольца, a — радиус поперечного сечения, ось z направлена

перпендикулярно к медианной плоскости, проходящей через центральную орбиту, r — расстояние от оси кольца, φ — азимутальный угол. Тогда уравнение для \bar{z}_e — отклонения локального центра тяжести пучка от медианной плоскости — имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 \bar{z}_e}{dt^2} + \Omega_e^2 \bar{z}_e = \frac{e}{m\gamma} [E_z - \beta H_r], \quad (1)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$; Ω — частота обращения электронов; Ω_e^2 — частота свободных колебаний электрона в аксиальном направлении; E_z и H_r — поля, возникающие из-за неравновесных добавок к зарядам и токам; $\gamma = [1 - \beta^2]^{-1/2}$.

При анализе уравнения (1) представим Ω_e^2 в виде

$$\Omega_e^2 = \lambda^2 \Omega^2 + \Omega_c^2, \quad (2)$$

где $\lambda \Omega$ — частота колебаний под действием внешнего фокусирующего поля; Ω_c^2 — поправка, возникающая из-за собственных полей стационарного пучка.

Подставляя в (1) $\bar{z}_e = z_0 \exp [i(n\varphi - \omega t)]$, получаем дисперсионное уравнение для колебаний электронного пучка:

$$\lambda^2 - (x - n)^2 = U_n + iV_n, \quad (3)$$

$$\text{где } U_n = \frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} - \text{Re} \frac{1}{\Omega^2 z_0} \cdot \frac{e(E_z - \beta H_r)}{m\gamma};$$

$$V_n = \text{Im} \frac{1}{\Omega^2 z_0} \cdot \frac{e(E_z - \beta H_r)}{m\gamma}; \quad x = \frac{\omega}{\Omega}. \quad (4)$$

В правой части дисперсионного уравнения (3) «квазистатическая» * составляющая U_n возникает из-за компонент поля, фаза которых сдвинута на $\pi/2$ относительно \bar{z}_e ; радиационная составляющая V_n , «синфазная» с \bar{z}_e , связана с когерентным излучением.

Как показано в Приложении, для электронного пучка в свободном пространстве справедливы соотношения:

$$U_n \approx \frac{ve}{\gamma} (0,6 + \ln 4n) \text{ для } n \ll \frac{R}{a}; \quad (5)$$

* Термин «квазистатическая» носит условный характер, так как на величину U_n влияет также и поле излучения.

$$V_n = \frac{v_e}{\gamma} [F_1 - 2F_2(x-n)] \approx \frac{v_e}{\gamma} [1,4n^{2/3} - 0,8n^{1/3}(x-n)]. \quad (6)$$

Здесь $v_e = \frac{N_e r_e}{2\pi R}$; r_e — классический радиус электрона; N_e — полное число электронов в кольце.

Решение уравнения (3) имеет следующий вид:

$$x = n + i \frac{v_e}{\gamma} F_2 \pm \sqrt{\lambda^2 - U_n - i \frac{v_e}{\gamma} F_1}. \quad (7)$$

Если учесть затухание Ландау, получим пороговое значение дисперсии для аксиальной когерентной неустойчивости:

$$\left| \frac{\Delta(n\Omega - \Omega_e)}{\Omega} \right| \geq \text{Im} x. \quad (8)$$

Сравним это пороговое значение с пороговым значением дисперсии для азимутальной радиационной неустойчивости в пустом пространстве [6]:

$$\frac{\Delta(n\Omega)}{\Omega} \geq \sqrt{\frac{v_e}{\gamma}} n^{1/3} \left| \frac{\partial(\ln \Omega)}{\partial(\ln p)} \right|, \quad (9)$$

где p — азимутальный импульс электронов.

Если внешняя фокусировка выбрана так, чтобы выполнялось условие устойчивости одночастичных колебаний электронов ($\lambda^2 > v_e \ln \frac{8R}{a}$), то $\lambda^2 > U_n$ и требуемая величина дисперсии определяется соотношением (9). Если же $\lambda = 0$, то условие (8) становится более жестким, чем (9).

Однако при ускорении электрон-ионных колец очень трудно создать эффективную внешнюю фокусировку в аксиальном направлении. По-видимому, единственно реальные методы фокусировки — это самофокусировка электронов с помощью сил отражения или фокусировка ионами.

Дипольные колебания электронного пучка в волноводе с продольными разрезами. Рассмотрим волновод с продольными разрезами («беличье колесо»), который было предложено использовать для самофокусировки электронного пучка [7]. Стенки такого волновода представляют собой дифракционную решетку, прозрачную для E -волн, но непрозрачную для H -волн. H -волны в «беличьем колесе» распространяются так же, как и в свободном пространстве, E -волны для малых n не возбуждаются, так как для обеспечения самофокусировки необходимо, чтобы $\frac{R}{b} \approx 0,6-0,8$, где b — радиус волновода.

Поэтому при вычислении U_n можно считать, что силы, действующие на пучок, складываются из суммы сил, действующих в свободном пространстве, и силы электрического отражения. Рассчитывая силы отражения в квазистатическом приближении, находим, что вблизи стенки (при $\frac{b-R}{b} \ll 1$) U_n определяется приближенной формулой

$$U_n \approx \frac{v_e}{\gamma} \left[0,6 + \ln(4n) - \frac{n^2}{2} \ln \frac{4R}{b-R} \right]. \quad (10)$$

Для V_n (см. Приложение) справедливо выражение

$$V_n \approx \frac{v_e}{\gamma} F_3(x, n) \approx \frac{v_e}{\gamma} 0,7n^{2/3}. \quad (11)$$

В выражении (10) член, пропорциональный n^2 , описывает квазистатическую фокусировку, возникающую при изгибах электронного шнура параллельно отражающей поверхности.

Из формулы (10) видно, что для обеспечения квазистатической фокусировки наиболее опасной моды с $n = 1$ необходимо очень близко подойти к стенке ($R/b > 0,95$). Если это условие не выполнено, то, как следует из формул (7), (10) и (11), при $\lambda = 0$ вклад в инкремент неустойчивости в «беличьем колесе» дают как квазистатические, так и радиационные члены.

Дипольные колебания в электрон-ионных кольцах. При наличии ионов к уравнению (1) необходимо добавить уравнение колебаний для локального центра тяжести ионов [2-4]:

$$\frac{d^2 \bar{z}_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \bar{z}_i = \Omega_i^2 \bar{z}_e, \quad (12)$$

где Ω_i — частота колебаний ионов в поле электронов. Предполагая, что \bar{z}_i и \bar{z}_e пропорциональны $\exp[i(n\varphi - \omega t)]$, получаем дисперсионное уравнение

$$(Q_i^2 - x^2) [Q_e^2 - (x-n)^2 - U_n - iV_n] = Q_i^2 Q_e^2, \quad (13)$$

где $Q_i = \Omega_i/\Omega$ — бетатронная частота колебаний ионов; Q_e^2 — квадрат бетатронной частоты колебаний электронов в поле ионов; $Q_e^2 = \lambda^2 + Q_i^2$.

При анализе уравнения (13) удобно отдельно рассматривать эффекты, связанные с U_n и V_n . Полагая $V_n = 0$, получаем из (13) дисперсионное уравнение для колебаний электрон-ионных колец в квазистатических полях:

$$(Q_i^2 - x^2) [\tilde{Q}_e^2 - (x-n)^2] = \varphi(x) = Q_i^2 Q_e^2, \quad (14)$$

где $\tilde{Q}_e^2 = Q_e^2 - U_n$. Это уравнение по виду совпадает с обычным дисперсионным уравнением связанных электрон-ионных колебаний. Анализ (14) показывает, что при $U_n < 0$ про-

исходит «расширение» найденных в работе [4] областей неустойчивости. Влиянием квазистатистического компонента сил электрон-электронного взаимодействия можно пренебречь, если число ионов достаточно велико и

$$Q_e^2 \gg \frac{v_e}{v} \quad (15)$$

Если в уравнение (14) добавить радиационный член, то вся рабочая область частот Q_e, Q_i (для пустого пространства и для «белчьего вальса») становится областью неустойчивости. Величину инкремента этой радиационной неустойчивости можно оценить с помощью теории вынуждений. Пусть x_0 — корень уравнения (14), тогда Δx — поправка к x_0 из-за поля излучения — имеет вид

$$\Delta x \approx \frac{iV(x_0, n)(Q_i^2 - x_0^2)}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=x_0}} \quad (16)$$

Это выражение справедливо при условии $|\Delta x| \ll 1$; т. е. достаточно далеко от границ области устойчивости уравнения (14). Анализ (16) показывает, что при малой связи электронных колебаний присутствие ионов уменьшает инкремент радиационной неустойчивости. В этой области ионы можно рассматривать как внешнюю фокусировку, а инкремент неустойчивости можно оценить с помощью уравнения (7), заменив λ на Q_e .

Колебания внутри зоны неустойчивости резонанса связи электрон-ионных колебаний остаются неустойчивыми и при учете когерентного излучения, хотя инкременты несколько изменятся. В центре резонансной полосы электрон-ионной неустойчивости (при $n - Q_e = Q_i$) результирующий инкремент близок к сумме найденных порознь инкрементов радиационной неустойчивости и резонанса связи.

Этот анализ выполнен без учета затухания Ландау. Подчеркнем, однако, что в наиболее интересной для нас области — области устойчивости относительно резонанса связи — радиационная неустойчивость пучка может быть предотвращена путем выбора дисперсии электронного пучка, превышающей пороговую [см. (8)].

В заключение отметим, что механизм радиационной неустойчивости, по-видимому, связан с передачей энергии из азимутального движения в аксиальное за счет магнитного поля, создаваемого азимутальными компонентами нестационарного тока. Эта неустойчивость возникает на частотах, близких к $(n - Q_e)\Omega$, что соответствует волнам с аномальным эффектом Доплера. В центре резонансной полосы двухпучковой неустойчивости инкремент радиационной неустойчивости складывается с инкрементом резонанса связи электрон-ионных колебаний, так как максимальный инкремент двухпучковой неустойчивости также соответствует собственным частотам, близким к $(n - Q_e)\Omega$.

Авторы благодарят А. Б. Кузнецова и Л. А. Юдина за полезные замечания.

Приложение

Рассмотрим силу, действующую на центр тяжести электронного пучка из-за неравновесных зарядов и токов, возникающих при дипольных колебаниях. Ввиду того что величина этой силы слабо зависит от формы стационарного распределения, мы выбрали наиболее простую модель: пучок с бесконечно малым размером в радиальном направлении и постоянной поверхностной плотностью заряда. Предположим, что при дипольных колебаниях пучок смещается как целое без изменения распределения плотности (такое предположение справедливо, если длина волны колебаний много больше поперечного размера пучка и дисперсия частиц по частотам колебаний мала). Тогда, используя выбранную модель, получаем следующие выражения для ρ и j — неравновесных добавок к плотности частиц и току:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{eN_e z_0}{4\pi a r} [\delta(z-a) - \delta(z+a)] \times \\ &\quad \times \delta(r-R) \exp[i(n\varphi - \omega t)]; \\ \dot{\gamma}_\varphi &= \Omega r \rho; \quad \dot{\gamma}_z = i(\omega - n\Omega) \int \rho dz. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-1})$$

Исследуем сначала случай, когда пучок находится в цилиндрическом волноводе с радиусом b . В таком волноводе поле излучения представляет собой суперпозицию квазистатического поля, E - и H -волн. Раскладывая заряды и токи по ортонормированным функциям пустого волновода [8], получаем следующие выражения для компонент поля при $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} E_z^I &= -\frac{eN_e z_0}{a} \sum_{s=1}^{\infty} A_{sn} I_n^2(k_s R) e^{-k_s a}; \\ H_r^I &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-2})$$

$$E_z^{\text{II}} = -\frac{eN_e z_0}{a} \sum_{s=1}^{\infty} A_{sn} I_n^2(k_s R) \times \left[e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_s^2} a} - e^{-k_s a} - \frac{\omega(\omega - n\Omega)}{c^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_s^2\right)} e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_s^2} a} \right];$$

$$H_r^{\text{II}} = \frac{eN_e z_0}{a} \sum_{s=1}^{\infty} A_{sn} I_n^2(k_s R) \frac{\omega}{k_s^2 R} \times \left[e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_s^2} a} - \frac{\omega(\omega - n\Omega)}{c^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_s^2\right)} e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_s^2} a} \right];$$

$$H_r^{\text{III}} = -\frac{eN_e z_0}{a} \beta \sum_{p=1}^{\infty} B_{pn} (I'_n)^2 \times (k_p R) e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_p^2} a};$$

$$E_z^{\text{III}} = 0;$$

$$A_{sn} = 2b^{-2} I_{n+1}^{-2}(k_s b); \quad B_{pn} = 2b^{-2} \frac{I_n^{-2}(k_p b)}{1 - \frac{n^2}{(k_p b)^2}}. \quad (\text{II-5})$$

В этих формулах I_n и I'_n — соответственно функция Бесселя и производная от нее; $I_n(k_s b) =$

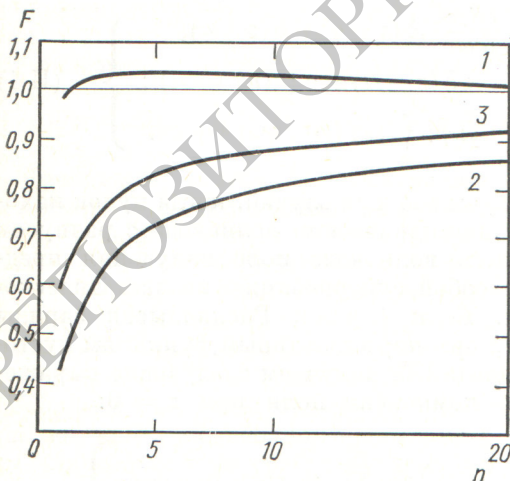


График зависимости от n функций F , поделенных на их асимптотические значения:

1 — $0,9 n^{-2/3} F_1$; 2 — $2,5 n^{-1/3} F_2$; 3 — $1,41 n^{-2/3} F_3$.

$= I'_n(k_p b) = 0$; $\beta = \frac{\Omega R}{c}$; индекс «I» соответствует квазистатическому полю, индекс «II» — E -волнам, индекс «III» — H -волнам; множитель $\exp[i(n\varphi - \omega t)]$ опущен.

Выражения для полей в свободном пространстве можно получить из (II-2) — (II-4), переходя к пределу при $b \rightarrow \infty$ и используя соотношения

$$\sum_s A_{sn} = \sum_p B_{pn} \rightarrow \int_0^{\infty} k dk. \quad (\text{II-6})$$

Подставляя в (1) формулы (II-2) — (II-4) и используя стандартную методику вычисления интегралов [9], с учетом (II-6) получаем следующие выражения для коэффициентов U_n и V_n в свободном пространстве:

$$U_n \approx \frac{v_e}{\gamma} \left\{ 0,6 + \ln 4n - \left(\frac{n\alpha}{2}\right)^2 \ln \frac{8}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{n^2}{2} + \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(0,6 + \ln 4n\right) - \frac{(n-1)(3n+1)}{2} \right] \right\}; \quad (\text{II-7})$$

$$V_n = \frac{v_e}{\gamma} [F_1(x, n) - 2F_2(x, n)(x - n)], \quad (\text{II-8})$$

где

$$F_1(x, n) = 2\pi x n^2 \int_0^1 dt \sqrt{1-t^2} \times \\ \times \left[\frac{1-t^2}{t^2} I_n^2(\beta x t) + \frac{\beta^2 x^2}{n^2} (I'_n)^2(\beta x t) = 2\pi x n^2 \times \right. \\ \times \left\{ \frac{1+3\beta^2 \left(\frac{x}{n}\right)^2}{8\beta^2 x^2} [I_{2n}(2\beta x) - I] + \right. \\ \left. + \frac{1-\beta^2 \frac{x^2}{n^2}}{2} I + \frac{1-\beta^2 \left(\frac{x}{n}\right)^2}{4\beta x} I'_{2n}(2\beta x) \right\}; \quad (\text{II-9})$$

$$F_2(x, n) = 2\pi x^2 \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} I_n^2(\beta x t) dt = \\ = \frac{\pi^2}{\beta^2} \left[\frac{\beta x}{2} I_{2n}(2\beta x) - \frac{I_{2n}(2\beta x)}{4} + \right. \\ \left. + \left(\beta^2 x^2 - n^2 + \frac{1}{4}\right) I \right], \quad (\text{II-10})$$

где

$$\alpha = \frac{a}{R}; \quad I = \int_0^1 I_{2n}(2\beta x u) du.$$

В ультррелятивистском случае и для больших n , когда

$$\max(1; 2Q_e) \ll n^{1/3} \ll \gamma,$$

выражения (II-9), (II-10) можно заменить их асимптотическими значениями:

$$F_1 \approx 1,1n^{2/3}; \quad F_2 = 0,4n^{1/3}. \quad (\text{II-11})$$

На рисунке построен график рассчитанных на ЭВМ функций F_1 и F_2 , отнесенных к их асимптотическим значениям (расчет сделан при $j=1, x=n$).

Рассмотрим теперь отдельно поле излучения, возникающее из-за H -волн (этот случай соответствует движению в волноводе с продольными разрезами). Для этого случая получим

$$V_n = \frac{v_e}{\gamma} F_3(x, n) = \\ = \frac{v_e}{\gamma} 2\lambda\beta^2 n^3 \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} I_n^2(nt) dt. \quad (\text{II-12})$$

График функции F_3 , деленной на ее асимптотическое значение $(0,7n^{2/3})$, также построен на рисунке.

Поступила в Редакцию 20/VIII 1971 г.
В окончательной редакции 14/XII 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Veksler et al. «Collective Linear Acceleration of ions», Proc. of VI Int. Conf. on High Energy Accelerators Cambridge, 1967, p. 289.
2. Г. И. Будкер. «Атомная энергия», 5, 9 (1956).
3. Б. В. Чириков. «Атомная энергия», 19, 239 (1965).
4. D. Koshkarev, P. Zenkevich. Particle accelerators, 3, 1 (1972).
5. И. Н. Иванов, В. Г. Маханьков. Препринт ОИЯИ Р9-3475-2, Дубна, 1967.
6. А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн, В. Н. Цытович. Труды VII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц. Т. II, Ереван, 1970, стр. 574.
7. Г. В. Долбилов и др. Препринт ОИЯИ Р9-4737, Дубна, 1969.
8. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
9. Д. Иваненко, А. Соколов. Классическая теория поля. М., Гостехиздат, 1951.