МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КРИТЕРИИ *P*-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.О. Лукьяненко, Т.В. Тихоненко

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

CRITERIA OF *P*-SUPERSOLUBILITY OF FINITE GROUPS

V.O. Lukyanenko, T.V. Tihonenko

P. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

Пусть H – подгруппа конечной группы G. Будем говорить, что подгруппа H τ-квазинормальной в G, если H перестановочна с каждой силовской подгруппой Q из G, такой что $(|H|, |Q|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. Доказан следующий результат. Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа $p \notin \pi$. Пусть P – силовская p-подгруппа в T и предположим, что подгруппа A τ-квазинормальна в G. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка p^k и с каждой циклической подгруппой из P порядка 4 (если $p^k = 2$ и P – неабелева подгруппа). Тогда группа G p-сверхразрешима.

***Ключевые слова**: τ-квазинормальная подгруппа, силовская подгруппа, холлова подгруппа, p-разрешимая группа, p-сверхразрешимая группа.*

Let G be a finite group and H a subgroup of G. We say that H is τ-quasinormal in G if H permutes with all Sylow subgroups Q of G such that $(|Q|, |H|) = 1$ and $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. The main result here is the following: Let $G = AT$, where A is a Hall π-subgroup of G and T is p-nilpotent for some prime $p \notin \pi$, let P denote a Sylow p-subgroup of T and assume that A is τ-quasinormal in G. Suppose that there is a number p^k such that $1 < p^k < |P|$ and A permutes with every subgroup of P of order p^k and with every cyclic subgroup of P of order 4 (if $p^k = 2$ and P is non-abelian). Then G is p-supersoluble.

***Keywords**: τ-quasinormal subgroup, Sylow subgroup, Hall subgroup, p-soluble group, p-supersoluble group.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Пусть H – подгруппа группы G. Тогда $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка $|G|$, H^G – номарльное замыкание подгруппы H в группе G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп из G, содержащих подгруппу H. Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B, если выполняется условие $AB = BA$. Подгруппа H группы G называется $\pi(G)$-перестановочной или $\pi(G)$-квазинормальной в G [1], если подгруппа H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G.

В данной статье мы анализируем следующее обобщение $\pi(G)$-квазинормальности: подгруппа H τ-квазинормальной в G [2], если H перестановочна с каждой силовской подгруппой Q из G, такой, что $(|H|, |Q|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. Очевидно, что каждая $\pi(G)$-квазинормальная подгруппа группы G τ-квазинормальна в G. Пример 1.2 в [2] показывает, что обратное утверждение в общем случае не верно.

Согласно известной теореме Ф. Холла [3], группа G разрешима, если каждая ее силовская подгруппа P имеет дополнение T в G, т. е. $PT = G$ и $P \cap T = 1$. Пример альтернативной группы A_5 показывает, что такое утверждение в общем случае не верно, если рассматривать только силовские p-подгруппы для некоторого фиксированного числа p.

Тем не менее, Б. Хупперт [4] доказал, что если силовская p-подгруппа P группы G имеет дополнение T в G, $|P| > p$ и T перестановочна с каждой максимальной подгруппой из P, тогда группа G p-разрешима. Этот результат в одном направлении был усилен В.И. Сергиенко [5]. Основываясь на данном результате, он доказал, что если силовская p-подгруппа P группы G имеет дополнение T в G, существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и T перестановочна со всеми подгруппами из P порядка p^k и P является абелевой группой, если $p^k = 2$, тогда группа G p-разрешима и ее p-длина равняется 1. В дальнейшем М.Т. Боровиков [6] доказал, что группа G в этом случае также является p-сверхразрешимой. В. Го, К.П. Шам и А.Н. Скиба показали [7], что если $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G, T – нильпотентная подгруппа и A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T и со всеми максимальными подгруппами любой силовской подгруппы из T, тогда группа G p-сверхразрешима для каждого такого простого числа $p \in \pi$, что T содержит силовскую p-подгруппу P с порядком $|P| > p$.

В данной работе доказано следующее обобщение этих результатов.

***Теорема* 0.1.** *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа $p \notin \pi$. Пусть P – силовская p-подгруппа в T и предположим, что подгруппа A τ-квазинормальна в G.*

Предположим, что существует такое число p^k, *что* $1 < p^k < |P|$ *и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка* p^k *и с каждой циклической подгруппой из P порядка* 4 (*если* $p^k = 2$ *и P – неабелева подгруппа). Тогда группа G p-сверхразрешима.*

Из данной теоремы вытекают следующие следствия.

***Следствие* 0.1** [5, теоремы 2 и 3]. *Пусть* $G = PA$, *где P – силовская p-подгруппа группы G и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число* p^k, *что* $1 < p^k < |P|$ *и A перестановочна со всеми подгруппами из P порядка* p^k *и P является абелевой группой, если* $p^k = 2$. *Тогда группа G p-разрешима и ее p-длина равняется* 1.

***Следствие* 0.2** [6, теорема]. *Пусть* $G = PA$, *где P – силовская p-подгруппа группы G и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число* p^k, *что* $1 < p^k < |P|$ *и A перестановочна со всеми подгруппами из P порядка* p^k *и P является абелевой группой, если* $p^k = 2$, *тогда группа G p-сверхразрешима.*

***Следствие* 0.3** [7, теорема C]. *Пусть* $G = AT$, *где A – холлова* π*-подгруппа группы G и T – нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа* $p \in \pi$. *Если A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T и со всеми максимальными подгруппами любой силовской подгруппы из T, тогда группа G p-сверхразрешима для каждого такого простого числа* $p \in \pi$, *что T содержит силовскую p-подгруппу P с порядком* $|P| > p$.

***Следствие* 0.4** [8, теорема 4.6] *Пусть* $G = AT$, *где A – холлова* π*-подгруппа группы G, T – нильпотентная подгруппа и A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T и со всеми максимальными подгруппами любой силовской подгруппы из T, тогда группа G p-сверхразрешима для каждого такого простого числа* $p \in \pi$, *что T содержит силовскую p-подгруппу P с порядком* $|P| > p$.

***Следствие* 0.5** [9, теорема 1.1]. *Пусть* $G = AT$, *где A – холлова* π*-подгруппа группы G и T – p-нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа* $p \in \pi$. *Пусть P – силовская p-подгруппа в T и предположим, что подгруппа A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T. Предположим, что существует такое число* p^k, *что* $1 < p^k < |P|$ *и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка* p^k *и с каждой циклической подгруппой из P порядка* 4 (*если* $p^k = 2$ *и P – неабелева подгруппа*). *Тогда группа G p-сверхразрешима.*

В качестве приложения теоремы 0.1 можно доказать следующий результат.

***Теорема* 0.2.** *Пусть* $G = AT$, *где A – холлова* π*-подгруппа группы G и T – p-сверхразрешимая подгруппа для некоторого простого числа* $p \in \pi$. *Предположим, что подгруппа A* τ*-квазинормальна в G. Если A перестановочна с каждой максимальной подгруппой некоторой силовской p-подгруппы P из T, тогда группа G p-сверхразрешима.*

Критерии *p*-сверхразрешимости конечной группы с заданными обобщенно перестановочными подгруппами также рассматривались в статье [10].

Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [11]–[12].

1 Предварительные результаты

***Лемма* 1.1** [2, лемма 2.2]. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G. Тогда факторгруппа* EH / H τ*-квазинормальна в* G / H *для любой* τ*-квазинормальной подгруппы E в G такой, что* $(|H|, |E|) = 1$.

***Лемма* 1.2** [9, лемма 2.1]. *Пусть N – элементарная абелева нормальная p-подгруппа группы G для некоторого простого числа p и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число* p^k, *что* $1 < p^k < |N|$ *и A перестановочна с каждой подгруппой из N порядка* p^k. *Тогда некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G.*

***Лемма* 1.3** [9, лемма 2.4]. *Пусть G=AP – p-разрешимая группа, где P – силовская p-подгруппа в G и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число* p^k, *что* $1 < p^k < p^{k+1} < |P|$ *и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка* p^k *и с каждой циклической подгруппой из P порядка* 4 (*если* $p^k = 2$ *и P – неабелева подгруппа*). *Тогда* $l_p(G) = 1$.

***Лемма* 1.4** [9, лемма 2.2]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и G – группа с разрешимым* $\mathfrak{F}$*-радикалом* $P = G^{\mathfrak{F}}$. *Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит* $\mathfrak{F}$. *Тогда P является p-группой для некоторого простого числа p. Кроме того, если A – холлова p-подгруппа в G и A перестановочна со всеми циклическими подгруппами из P простого порядка и порядка* 4 (*если* $p = 2$ *и P – неабелева подгруппа*), *тогда* $|P / \Phi(P)| = p$.

***Лемма* 1.5** [9, лемма 2.3]. *Пусть V – подгруппа порядка* 4 *группы G и Q – холлова 2'-подгруппа в G такая, что* $VQ = QV$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $V = A \times B$, *где* $|A| = |B| = 2$ *и* $AQ = QA$, *тогда* $BQ = QB$;

(2) *если* $V = \langle x \rangle$ *– циклическая группа, тогда* $\langle x^2 \rangle Q = Q \langle x^2 \rangle$.

2 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.1. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и пусть группа *G* – контрпример минимального порядка. Разобъем доказательство теоремы на несколько этапов.

(1) $O_{\pi'}(G) = 1$, *где* $\pi_1 = \pi' \setminus \{p\}$.

Предположим, что $Y = O_{\pi_1}(G) \neq 1$. Покажем, что условия теоремы выполняются для фактор-группы G / Y. Действительно, $Y \cap P = 1$ и $G / Y = (AY / Y)(T / Y)$, где $AY / Y \simeq A$ – холлова π-подгруппа группы G / Y, T / Y – p-нильпотентна и $PY / Y \simeq P$ – силовская p-подгруппа в T / Y. Ввиду леммы 1.1, подгруппа AY / Y τ-квазинормальна в фактор-группе G / Y. Пусть H^* / Y – подгруппа группы PY / Y такая, что $|H^* / Y| = p^k$. Тогда $H^* = [Y] (H^* \cap P)$, где $H^* \cap P$ – силовская p-подгруппа в H^* такая, что $|H^* \cap P| = p^k$. Согласно предположению, $A(H^* \cap P) = (H^* \cap P)A$. Следовательно, подгруппа AY / Y перестановочна с H^* / Y в группе G / Y. Если $p^k = 2$ и PY / Y – неабелева подгруппа, тогда подгруппа P неабелева, и, согласно гипотезе, подгруппа A перестановочна с каждой циклической подгруппой из P порядка 4. Следовательно, подгруппа AY / Y перестановочна с каждой циклической подгруппой фактор-группы PY / Y порядка 4. Таким образом, условия теоремы выполняются для фактор-группы G / Y. Поскольку $|G / Y| < |G|$, то фактор-группа G / Y p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Отсюда следует, что группа G p-сверхразрешима, противоречие. Таким образом, утверждение (1) верно.

(2) *Подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппа группы G, где* $q \in \pi'$.

Пусть Q – силовская q-подгруппа группы G для некоторого простого числа $q \in \pi'$. Если $(|A|, |Q^G|) \neq 1$, тогда по условию теоремы $AQ = QA$. Предположим, что $(|A|, |Q^G|)=1$. Поскольку $G = AT$, то $Q^G \leq T$. Тогда подгруппа Q^G p-нильпотентна. Поскольку $O_{p'}(Q^G)$ *char* Q^G, а Q^G – нормальная подгруппа группы G, то $O_{p'}(Q^G) \leq O_{\pi_1}(G) = 1$ ввиду (1). Следовательно, $Q^G = Q$. Если $q \neq p$, то мы получаем противоречие ввиду (1). Поэтому $q = p$. Следовательно, подгруппа $Q = P$ нормальна в группе G, и значит $AQ = QA$. Таким образом, подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G, где $q \in \pi'$.

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \neq 1$. Покажем, что условия теоремы выполняются для фактор-группы G / V. Действительно, $V \cap P = 1$ и $G / V = (AV / V)(TV / V)$, где $AV / V \simeq A / V \cap A$ – холлова π-подгруппа группы G / V, подгруппа $TV / V \simeq T / V \cap T$ p-нильпотентна и $PV / V \simeq P$ – силовская p-подгруппа в TV / V. Пусть Q / V – силовская q-подгруппа группы G / V, где $q \in \pi'$. Тогда для некоторой силовской q-подгруппы G_q группы G имеем $Q = G_qV$. Ввиду (2),

$$(AV / V)(Q / V) = (AV / V)(G_qV / V) = \\ = (Q / V)(AV / V),$$

следовательно подгруппа AV / V перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G / V, где $q \in \pi'$. Таким образом, подгруппа AV / V τ-квазинормальна в G / V. Кроме того, аналогично как показано в пункте (1) получаем, что подгруппа AV / V перестановочна с каждой подгруппой группы PV / V порядка p^k и с каждой циклической подгруппой из PV / V порядка 4 (если $p^k = 2$ и подгруппа PV / V неабелева). Таким образом, условия теоремы выполняются для фактор-группы G / V. Поскольку $|G / V|<|G|$, то фактор-группа G / V p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Это означает, что группа G p-сверхразрешима, противоречие. Следовательно, утверждение (3) верно.

(4) $T = P$.

Предположим, что $T \neq P$. Пусть S – холлова p'-подгруппа в T. Поскольку A – холлова π-подгруппа группы G, то каждая силовская подгруппа из A является силовской подгруппой в G. Тогда [13, лемма 11.6] влечет, что подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы T, где $q \in \pi$. Следовательно, ввиду (2), подгруппа A перестановочна с каждой силовской подгруппой из T, поэтому $AS = SA$. Согласно условию теоремы, подгруппа S нормальна в T. Тогда $S^G = S^{AT} = S^A \leq AS$. Это означает, что $O_{p'}(G) \neq 1$, что противоречит (3). Таким образом, утверждение (4) доказано.

(5) *Группа G не является простой группой*.

Предположим, что G – простая неабелева группа. Согласно предположению, подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой H из P такой, что $|H| = p^k$. Поскольку ввиду (4), $G = AP$, то для произвольного элемента $x \in G$ имеем $x = ta$, где $t \in P$ и $a \in A$. Тогда $H^t \leq P$. Следовательно, $AH^t = H^tA$, поэтому $(AH^t)^a = AH^x$ – подгруппа группы G. Поскольку p не принадлежит π, то $H \cap A = 1$. Таким образом, группа G не является простой согласно [14, теорема 3]. Это противоречие завершает доказательство утверждения (5).

(6) $|P| > p^{k+1}$.

Предположим, что $|P| = p^{k+1}$. Тогда ввиду [4, теорема 5], группа G – p-разрешима. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда L является p-группа ввиду (3), поэтому $L \leq P$. Покажем, что фактор-группа G / L p-сверхразрешима. Действительно, если $|P / L| \leq p$, это очевидно. С другой стороны, если $|P / L| > p$, тогда условия теоремы выполняются для фактор-группы G / L. Таким образом, G / L p-сверхразрешима ввиду выбора группы G. Ясно, что $|L| > p$ и L не входит в подгруппу Фраттини $\Phi(P)$. Пусть V – максимальная подгруппа группы P такая, что L не входит в V. Тогда $AV = VA$, поэтому $D = V^G = V^{PA} = V^A \leq AV$. Теперь из того, что $P = VL$, V – максимальная подгруппа в P и $|L| \neq p$, получаем, что $V \cap L \neq 1$. Следовательно, $D \cap L$ – нетривиальная подгруппа в L и $D \cap L$ нормальна в группе G, что противоречит минимальности подгруппы L. Следовательно, утверждение (6) верно.

(7) $|N| \le p^k$ *для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G, которая содержится в P.*

Предположим, что $p^k < |N|$. Следовательно, подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой H из N такой, что $|H| = p^k$. Тогда ввиду леммы 1.2 некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в группе G, противоречие. Таким образом, утверждение (7) доказано.

(8) *Если N – собственная нормальная подгруппа группы G, тогда N p-разрешима.*

Ввиду (3), число p делит порядок $|N|$. Сперва предположим, что $A \le N$. Тогда ввиду (4), $|G{:}N| = p^a$ для некоторого числа $a \in N$. Следовательно, $N = N_pA$, где $N_p = N \cap P$ – силовская p-подгруппа из N. Пусть P_1 – максимальная подгруппа из P такая, что $N_p \le P_1$. Тогда $P_1N = P_1A$ – собственная подгруппа группы G. Ввиду (6) условия теоремы справедливы для подгруппы P_1A. Поскольку $|P_1A| < |G|$, то группа P_1A p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Отсюда следует, что подгруппа N p-разрешима. Предположим теперь, что подгруппа A не входит в N. Очевидно, что $N = (A \cap N)(P \cap N)$. Пусть $E = (A \cap N)P$ и пусть H – подгруппа из P такая, что $AH = HA$. Тогда

$$AH \cap (A \cap N)P = (A \cap (A \cap N)P)H =$$
$$= (A \cap N)(A \cap P)H = (A \cap N)H = H(A \cap N).$$

Это показывает, что условия теоремы выполняются для подгруппы E. Если $E = G$, тогда $A = A \cap (A \cap N)P = (A \cap N)(A \cap P) = A \cap N$, противоречие. Следовательно, подгруппа E p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Отсюда следует, что подгруппа $N \le E$ p-разрешима.

(9) $k > 1$.

Предположим, что $k = 1$. Ввиду(5), G не является простой группой. Пусть $L = (A \cap L)(P \cap L)$ – максимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду (8), подгруппа L p-разрешима и согласно (3), $Lp = P \cap L \ne 1$. Кроме того, поскольку ввиду (3), $O_{p'}(G) = 1$, $O_{p'}(L)$ *char* L и L – нормальная подгруппа в G, то $O_{p'}(L) = 1$. Если подгруппа L_p циклическая или $|L_p| = p^2$, тогда $l_p(L) = 1$ согласно [15, VI, Hilfssatz 6.10]. В противном случае, поскольку $k = 1$, условия теоремы справедливы для подгруппы L, поэтому снова $l_p(L) = 1$ согласно лемме 1.3. Поскольку $O_{p'}(L) = 1$, то подгруппа L_p нормальна в L. Более того, поскольку L_p – силовская подгруппа в L, а сама подгруппа L нормальна в группе G, то подгруппа L_p нормальна в G.

Предположим теперь, что $p = 2$. Тогда ввиду (6), $2^3 \le |P|$. Поскольку подгруппа L не является 2-нильпотентной группой, она является 2-замкнутой подгруппой Шмидта [15, IV, Satz 5.4] вида $K = [K_2]\, K_q$, где $K_2 \le L_p$. Для некоторого элемента $x \in G$ имеем $K_q^x \le A$ и $K^x = [K_2]^x K_q^x$. Поскольку подгруппа L_p нормальна в группе G, то $K_2^x \le L_p \le P$. Пусть V – циклическая подгруппа в K_2^x порядка 2 или порядка 4 (если K_2^x – неабелева группа). Тогда $VA = AV$ согласно условию теоремы, поэтому

$$VA \cap K_2^x K_q^x = (VA \cap K_2^x)K_q^x =$$
$$=(V(A \cap K_2^x))K_q^x = VK_q^x = K_q^x V.$$

Таким образом, подгруппа K_q^x перестановочна с каждой циклической подгруппой из K_2^x порядка 2 и порядка 4 (если K_2^x – неабелева группа). Из леммы 1.4 следует, что $|K_2^x / \Phi(K_2^x)| = 2$. Следовательно, $|K_2| = 2$. Значит, подгруппа K нильпотентна, что противоречит выбору K.

Таким образом, $p > 2$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в L_p и $C = C_G(N)$. Тогда $|N| = p$ ввиду (7). Следовательно, $N \le Z(P)$. Предположим, что $C = G$. Пусть $a \in A$, $z \in N$ и $X = \langle x \rangle$ – произвольная подгруппа из L_p такая, что $|X| = p$. Тогда $z^a = z$ и поскольку $X = L_p \cap AX$ нормальна в AX, то $x^a = x^n$ для некоторого числа $n \in N$. Поскольку $z \in Z(P)$, то $|xz| = p$. Следовательно,

$$\langle xz \rangle = \{x^i z^i \mid i = 1,\dots,p\}$$

и $(xz)^a = x^a z^a = x^n z \in \langle xz \rangle$, откуда $n = 1$. Таким образом, $A / C_A(L_p)$ действует тривиально на $\Omega_1(L_p)$. Следовательно, $A / C_A(L_p) = 1$ ввиду [16, 5, теорема 3.10], поэтому

$$A \cap L \le A = C_A(L_p) \le C_G(L_p).$$

Следовательно, $L = L_p(A \cap L)$ – нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, противоречие. Таким образом, $C \ne G$. Ввиду (8), подгруппа C p-разрешима. Поскольку $|N| = p$, то факторгруппа G / C циклическая и мы заключаем, что группа G p-разрешима. Тогда согласно лемме 1.3 и ввиду (3) и (6), подгруппа P нормальна в группе G. Пусть $R = G^{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация всех p-сверхразрешимых групп и $\Phi = \Phi(R)$. Очевидно, что $R \le P$. Тогда условия теоремы справедливы для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей R. Следовательно, подгруппа M p-сверхразрешима согласно выбору группы G, поэтому $|R / \Phi| = p$ ввиду леммы 1.4. Тогда [17, лемма 2.16] влечет, что $G / \Phi \in \mathfrak{F}$. Но тогда $R \le \Phi$, следовательно, $R = \Phi$, противоречие. Таким образом, $k > 1$.

(10) *Если P – неабелева 2-группа, тогда $k > 2$.*

Предположим, что $k = 2$. Поскольку подгруппа P неабелева, то она содержит такую циклическую подгруппу $H = \langle x \rangle$, что $|H| = 4$. Согласно предположению, подгруппа A перестановочна с H. Тогда A перестановочна и с подгруппой $\langle x^2 \rangle$ ввиду леммы 1.5 (2). Покажем теперь, что если группа G содержит такую подгруппу $V = B \times C$ порядка 4, что $|B| = 2$ и подгруппа A перестановочна с B, тогда A перестановочна с подгруппами V и C. Действительно, поскольку $|V| = 4$, то подгруппа A перестановочна с V. Следовательно, A перестановочна с подгруппой C

ввиду леммы 1.5 (1). Таким образом, подгруппа A перестановочна с некоторой подгруппой Z из центра $Z(P)$ порядка $|Z| = 2$, поэтому A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка 2 согласно лемме 1.5 (1), что противоречит (9).

(11) *Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в P, тогда условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N.*

Ввиду (6), $|P| > p^{k+1}$. Кроме того, если либо $p > 2$ и $|N| < p^k$ или $p = 2$ и $|N| < 2^{k-1}$, то условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N. Пусть либо $p > 2$ и $|N| = p^k$, либо $p = 2$ и $|N| \in \{2^k, 2^{k-1}\}$. Согласно (9), $k > 1$. Предположим, что $|N| = p^k$. Тогда подгруппа N не является циклической и, следовательно, каждая подгруппа группы G, которая содержит N, также не является циклической. Пусть $N \le K \le P$, где $|K:N| = p$. Поскольку подгруппа K не является циклической, то она содержит максимальную подгруппу $F \ne N$. Тогда подгруппа A перестановочна с $K = FN$, поскольку подгруппа K является произведением двух подгрупп, перестановочных с A. Таким образом, если $p > 2$ или подгруппа P / N абелева, то условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N. Предположим теперь, что P / N – неабелева 2-группа. Тогда подгруппа P неабелева, поэтому $k > 2$ ввиду (10). Пусть $N \le K \le V$, где $|V:N| = 4$ и $|V:K| = 2$. Пусть K_1 – максимальная подгруппа из V такая, что $V = K_1K$. Предположим, что подгруппа K_1 циклическая. Тогда K_1 не содержит подгруппу N, поэтому $V = K_1N$, откуда получаем $|N| = 4$ или $|N| = 2$. Но тогда $k = 2$ или $k = 1$, противоречие. Следовательно, подгруппа K_1 не является циклической. Поэтому как показано выше подгруппа A перестановочна с K_1 и, следовательно, A перестановочна с V. Таким образом, снова получаем, что условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N. Предположим теперь, что $|N| = p^{k-1}$. Если $|N| > 2$, тогда, как показано выше подгруппа AN / N перестановочна с каждой циклической подгруппой из P / N порядка 2 и порядка 4 (если подгруппа P / N неабелева). Предположим наконец, что $|N| = 2$ и подгруппа P / N неабелева. Тогда подгруппа P неабелева и $k = 2$, что противоречит (10). Следовательно, утверждение (11) доказано.

Заключительное противоречие.

Согласно (3), (6) и лемме 1.3, $P = O_p(G)$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в подгруппе P. Тогда ввиду (7), $N < P$. Поскольку класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, то, ввиду (11), подгруппа N не содержится в $\Phi(G)$ и N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $G = [N] M$. Тогда

$$P = P \cap NM = N (P \cap M).$$

Поскольку $P = F(G) \le C_G(N)$, получаем, что подгруппа $P \cap M$ нормальна в G, поэтому $P \cap M = 1$. Следовательно, $N = O_p(G) = P$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Используем теорему 0.1 для доказательства теоремы 0.2.

Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Разобъем доказательство теоремы на несколько этапов.

(1) $O_{\pi_1}(G)=1$, *где* $\pi_1 = \pi' / \{p\}$ (*аналогично доказательству утверждения* (1) *в теореме* 0.1).

(2) $O_p(G) = 1$.

Предположим, что $O_p(G) \ne 1$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в $O_p(G)$. Тогда $L \le P$. Покажем, что фактор-группа G / L p-сверхразрешима. Действительно, если $|P / L| \le p$, то это очевидно. С другой стороны, если $|P / L| > p$, тогда условия теоремы справедливы для фактор-группы G / L ввиду леммы 1.1. Таким образом, G / L p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Очевидно, что $|L| > p$ и подгруппа L не содержится в $\Phi(T)$. Пусть V – максимальная подгруппа из T такая, что $T = LV$. Поскольку подгруппа T p-сверхразрешима, то $|T:V| = p$ согласно [15, VI, Satz 9.2(a)]. Тогда $L \cap V \ne 1$ и подгруппа $L \cap V$ нормальна в T. Пусть $V_p = V \cap P$. Тогда подгруппа V_p максимальна в P. Согласно условию теоремы, $AV_p = V_pA$, поэтому $L \cap V = L \cap V_p = L \cap AV_p$ нормальна в AV_p. Следовательно, $A \le N_G(L \cap V)$. Отсюда следует, что $L \cap V$ – нетривиальная подгруппа в L и $L \cap V$ нормальна в группе G, что противоречит минимальному выбору подгруппы L. Следовательно, утверждение (2) доказано.

(3) *Подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G, где $q \in \pi'$.*

Пусть Q – силовская q-подгруппа группы G для некоторого простого числа $q \in \pi'$. Если $(|A|, |Q^G|) \ne 1$, тогда $AQ = QA$ согласно условию теоремы. Предположим, что $(|A|, |Q^G|) = 1$. Поскольку $G = AT$, то $Q^G \le T$. Тогда подгруппа Q^G p-сверхразрешима. Следовательно, либо $O_p(Q^G) \ne 1$, либо $O_{p'}(Q^G) = O_{\pi_1}(Q^G) \ne 1$. Поскольку $O_p(Q^G)$ и $O_{p'}(Q^G)$ – характеристические подгруппы в Q^G, то мы получаем противоречие ввиду (1) или (2). Таким образом, утверждение (3) доказано.

(4) $O_{p'}(G) = 1$ (*аналогично доказательству утверждения* (3) *в теореме* 0.1).

Заключительное противоречие.

Поскольку $p \in \pi'$, то $AP = PA$ согласно (3). Тогда ввиду теоремы 0.1 имеем $G \ne AP$ и подгруппа AP p-сверхразрешима. Предположим теперь, что $O_{p'}(T) \ne 1$. Пусть Q – силовская q-подгруппа из T такая, что $q \ne p$ и $Y = O_q(T) \ne 1$. Если $q \in \pi$, тогда [13, лемма 11.6] влечет, что подгруппа A перестановочна с Q. В противном случае, $AQ = QA$ согласно (3). Следовательно,

$Y^G = Y^{AT} = Y^A \leq AQ$. Это означает, что $O_{p'}(G) \neq 1$, что противоречит (4). Таким образом, $O_{p'}(T) = 1$ и ввиду [18, лемма 3.3], подгруппа T сверхразрешима. Следовательно, p – наибольший простой делитель порядка $|T|$, поэтому подгруппа P нормальна в T. Таким образом, $P^G = P^{AT} = P^A \leq AP$, поэтому подгруппа P^G p-сверхразрешима. Поскольку ввиду (4), $O_{p'}(G) = 1$, $O_{p'}(P^G)$ *char* P^G и подгруппа P^G нормальна в группе G, то $O_{p'}(P^G) = 1$. Тогда ввиду [7, лемма 3.3], подгруппа P^G сверхразрешима. Таким образом, подгруппа P нормальна в группе G, что противоречит (2). Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Как следствие теоремы 0.2 мы имеем следующий результат.

***Следствие* 2.1** [9, теорема 1.2]. *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-сверхразрешимая подгруппа для некоторого простого числа $p \in \pi$. Предположим, что подгруппа A перестановочна с каждой силовской подгруппой из T и с каждой максимальной подгруппой некоторой силовской p-подгруппы P из T. Тогда группа G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G_q – произвольная силовская q-подгруппа группы G для некоторого простого числа $q \in \pi'$. Тогда для некоторой силовской q-подгруппы Q из T имеем $G_q = Q^x$, где $x \in G$. Поскольку $G = TA$, то $x = ta$, где $t \in T$ и $a \in A$. Следовательно, $Q^x = Q^{ta} = (Q^t)^a$, поэтому $AG_q = AQ^x = A(Q^t)^a = (AQ^t)^a = (Q^tA)^a = Q^xA = G_qA$. Таким образом, подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G, где $q \in \pi'$. Следовательно, A τ-квазинормальна в G, поэтому группа G p-сверхразрешима согласно теореме 0.2. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel*, *O.H.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

2. *Lukyanenko*, *V.O.* On weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Acta Math. Hungar. – 2009. – Vol. 125, № 3. – P. 237–248.

3. *Hall*, *P.* A characteristic property of soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12, № 2. – P. 188–200.

4. *Huppert*, *B.* Zur Sylow struktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 161–169.

5. *Sergienko*, *V.I.* A criterion for the p-solubility of finite groups / V.I. Sergienko // Math. Notes. – 1971. – Vol. 9. – P. 216–220.

6. *Боровиков*, *М.Т.* Группы с перестановочными подгруппами взаимно простого порядка / М.Т. Боровиков // Вопросы алгебры. – 1990. – № 5. – С. 80–82.

7. *Guo*, *W.* Criteria of existence of Hall subgroups in non-soluble finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // Acta Math. Sinica, English Series. – 2010. – Vol. 26, № 2. – P. 295–304.

8. *Guo*, *W.* Finite groups with some given systems of X_m-semipermutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Math. Nahcr. – 2010. – Vol. 283, № 11. – P. 1603–1612.

9. *Lukyanenko*, *V.O.* A criterion for the *p*-supersolubility of finite groups / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // J. Algebra Appl. – 2010. – Vol. 9, № 1. – P. 17–26.

10. *Сяолан*, *И.* О некоторых обобщениях перестановочности и *S*-перестановочности / И Сяолан, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 47–54.

11. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Grooups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

12. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.

13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М : Наука, 1978.

14. *Kegel*, *O.H.* Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. –1961. – Vol. 12. – P. 90–93.

15. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.

16. *Gorenstein*, *D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York, Evanston, London: Harper & Row Publishers, 1968.

17. *Skiba*, *A.N.* On weakly *S*-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

18. *Guo*, *W.* *G*-covering subgroup systems for the classes of *p*-supersoluble and *p*-nilpotent groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2004. – Vol. 45, № 3. – P. 75–92.

Поступила в редакцию 15.05.15.