МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С *S*-НОРМАЛЬНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Н.С. Косенок

Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель, Беларусь

FINITE GROUPS WITH *S*-NORMAL MAXIMAL SUBGROUPS

N.S. Kosenok

Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel, Belarus

Подгруппа H группы G называется s-нормальной в G, если G имеет такую субнормальную подгруппу T, что $G = HT$ и $H \cap T \subseteq H_{sG}$. На основе этого определения получены новые критерии p-разрешимости и разрешимости конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, субнормальная подгруппа.*

Subgroup H of G is called s-normal in G, if G has a subnormal subgroup T such that $G = HT$ and $H \cap T \subseteq H_{sG}$. New criteria for the p-solvability and solvability of finite groups are obtained on the basis of this definition.

Keywords: *finite group, solvable group, maximal subgroup, subnormal subgroup.*

Введение

Подгруппа M группы G называется максимальной, если $M<G$ и в G нет такой собственной подгруппы T, которая содержит M собственным образом. Поскольку всякая конечная неединичная группа обладает максимальными подгруппами, это понятие особенно полезно в теории конечных групп и результаты, связанные с изучением строения группы в зависимости от свойств ее максимальных подгрупп, а также от свойств максимальных подгрупп некоторых ее собственных подгрупп, составили важное направление современной теории групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров.

Многие из наиболее важных классов конечных групп могут быть охарактеризованы на основе свойств их максимальных подгрупп. Напомним, например, что конечная группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны. Согласно знаменитой теореме Хупперта конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп – простые числа. Согласно [1] конечная группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда для любой ее максимальной подгруппы M имеет место $|G:M| = |G:M|_n$ (здесь $|G:M|_n$ – нормальный индекс M в G, который совпадает с порядком главного фактора H / K, где $K \subseteq M$ и $H \nsubseteq M$). Отметим, что в действительности, как это показано в теории формаций конечных групп, все наиболее известные классы конечных групп, замкнутые относительно фраттиниевых расширений своих групп, могут быть охарактеризованы по свойствам их максимальных подгрупп [2], [3].

Свойства максимальных подгрупп лежат и в основе многих признаков принадлежности конечной группы тому или иному классу. Напомним некоторые из наиболее известных результатов в этом направлении. Согласно неопубликованному результату Ф. Холла, конечная группа разрешима, если индекс любой ее максимальной подгруппы является либо простым числом, либо квадратом простого числа [4, с. 267]. Это важное наблюдение Холла дало толчок серии глубоких исследований, связанных с изучением конечных групп, у которых индексы максимальных подгрупп обладают тем или иным свойством. В этой связи следует прежде всего отметить монографию М.В. Селькина [5], где найдена связь между теорией классов Шунка и теорией максимальных подгрупп с заданными индексами, а также работу С.Ф. Каморникова [6], где было впервые дано описание конечных групп, у которых индексы всех максимальных подгрупп являются либо простыми числами, либо квадратами простых чисел, и статью Е. Грибовской и В.С. Монахова [7], где было получено описание разрешимых конечных групп с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. В работе Томпсона [8] было доказано, что конечная группа G является разрешимой и в случае, когда она обладает максимальной нильпотентной подгруппой нечетного порядка. В дальнейшем Янко [9] и Дескинс [10] установили, что конечная группа разрешима, если она обладает максимальной нильпотентной подгруппой, у которой силовская 2-подгруппа имеет класс, не превосходящий 2.

Целью данной работы является дальнейшее изучение строения групп в зависимости от свойств их максимальных подгрупп.

1 Некоторые предварительные сведения

Символом $H_{..G}$ будем обозначать наибольшую субнормальную подгруппу конечной группы G, содержащуюся в H.

Определение. *Подгруппа H конечной группы G называется s-нормальной в G если G имеет такую субнормальную подгруппу T, что $G = HT$ и $H \cap T \subseteq H_{..G}$.*

Следующая лемма очевидна.

***Лемма* 1.1.** *Пусть G – конечная группа, и пусть $K \trianglelefteq G$, и $K \leq H$. Тогда H s-нормальна в G, если и только если H / K s-нормальна в G / K.*

Пусть M – максимальная подгруппа конечной группы G. Тогда нормальным индексом [1] этой подгруппы называют порядок главного фактора H / M_G.

2 Критерии p-разрешимости и разрешимости конечных групп

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – конечная группа и N – нетривиальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N p-разрешима в том и только в том случае, когда каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая N и чей нормальный индекс делится на p, s-нормальна в G.*

Доказательство. Предположим, что каждая максимальная подгруппа M группы G с $N \nsubseteq M$ и такая, чей нормальный индекс делится на p, s-нормальна в G. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G. Допустим, что M / R – максимальная подгруппа группы G / R такая, что $RN / R \nsubseteq M / R$, и такая, чей нормальный индекс в G / R делится на p. Тогда M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N \nsubseteq M$. Кроме того, если $H / R / (M / R)_{G / R} = (H / R) / (M_G / R)$ – главный фактор в G / R, то H / M_G – главный фактор в G. Следовательно, p делит нормальный индекс M в G. По нашему предположению, M s-нормальна в G, и следовательно, M / R s-нормальна в G / R, по лемме 1.1. Значит, по индукции, RN / R – p-разрешимая группа. Если $R \cap N = 1$, тогда $N \simeq RN / R$ p-разрешима. Следовательно, каждая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в N. Тривиальные рассуждения также показывают, что $R = Soc(G)$ и $R \nsubseteq \Phi(G)$.

Допустим, что R не является p-разрешимой группой. Тогда p делит $|R|$ и если $E = N_G(P)$, где P – силовская p-подгруппа группы R, то по аргументу Фраттини, мы имеем, что $G = RE$. Так как R не является p-разрешимой группой, то $E \neq G$.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $E \leq M$. Тогда $R \nsubseteq M$ и $N \nsubseteq M$. Так как $|R|$ совпадает с нормальным индексом M, то p делит нормальный индекс M. Следовательно, по нашему предположению, M s-нормальна в G.

Пусть G_p – силовская p-подгруппа группы G такая, что $P = R \cap G_p$. Тогда P нормальна в G_p. Поэтому $G_p \subseteq E$, и поэтому p не делит $|G{:}M|$.

Пусть T – субнормальная подгруппа группы G такая, что $TM = G$ и $T \cap M \leq M_{..G}$. Прежде предположим, что $M_{..G} \neq 1$, или же пусть A – минимальная субнормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $M_{..G}$. Ясно, что A – простая группа. Допустим, что $A \nsubseteq R$. Тогда $A \cap R = 1$. Но так как $R \nsubseteq N_G(A)$ [3, с. 47], мы имеем $RA = R \times A$. Отсюда следует, что $A \subseteq C_G(R) = 1$. Это противоречие показывает, что $A \subseteq R$. Так как $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \simeq A_2 \simeq \ldots \simeq A_t$ есть простая неабелева группа, и A субнормальна в R, мы имеем $A \in \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$. Пусть $A = A_1$. Так как

$$A_1^G = A_1^{RM} = A_1^M = R$$

и $A_1 \subseteq M$, мы имеем $R \leq M$, противоречие. Следовательно, $M_{..G} = 1$, и поэтому $T \cap M = 1$. Это показывает, что $|G| = |T||M|$, т. е. $|T| = |G{:}M|$.

Пусть A – минимальная субнормальная подгруппа группы G, содержащаяся в T. Тогда из выше сказанного, мы знаем, что $A = A_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Пусть P_1 – силовская p-подгруппа в A_1. Тогда $|P| = |P_1|^t$. Следовательно, p делит $|A_i|$. Но тогда p делит $|T| = |G{:}M|$, противоречие. Следовательно, R – p-разрешимая группа, и следовательно, N p-разрешима.

Теперь предположим, что $N \trianglelefteq G$, и N – p-разрешимая группа. Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N \nsubseteq M$ и чей нормальный индекс делится на p. И пусть $1 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \ldots \leq N_{t-1} \leq N_t = N$, где N_i / N_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, t)$ – главный фактор группы G. Мы можем выбрать индекс i такой, что $N_i \nsubseteq M$ и $N_{i-1} \subseteq M$. Тогда $N_i M = G$. Рассмотрим главные факторы $N_i M_G / M_G$ и N_i / N_{i-1}. Первый из них G-изоморфен главному фактору $N_i / N_i \cap M_G$, при этом $N_{i-1} \subseteq N_i \cap M_G$. Значит, факторы $N_i M_G / M_G$ и N_i / N_{i-1} изоморфны и поэтому p делит $|N_i / N_{i-1}|$. Следовательно, N_i / N_{i-1} – абелева p-группа.

Теперь ясно, что $N_i \cap M \trianglelefteq M$ и $N_i \cap M \trianglelefteq N_i$. Поэтому $N_i \cap M \subseteq M_G \subseteq M_{..G}$.

Теорема доказана.

Аналогично теореме 2.1. может быть доказана следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** *Конечная группа G p-разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G, чей нормальный индекс делится на p, слабо c-нормальна в G.*

***Следствие* 2.1** [11]. *Конечная группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G c-нормальна в G.*

***Следствие* 2.2** [12]. *Конечная группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G c-нормальна в G.*

***Теорема* 2.3**. *Конечная группа p-разрешима в том и только в том случае, когда в ней существует p-разрешимая максимальная подгруппа, которая* *либо s-нормальна в G, либо имеет нормальный индекс, не делящийся на p.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2.1, нам только надо доказать достаточность.

Допустим, что утверждение неверно, и G – контрпример минимального порядка. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G, M – такая p-разрешимая максимальная в G подгруппа, которая либо s-нормальна в G, либо имеет нормальный индекс, не делящийся на p. Если $R \not\subseteq M$, то $G / R = RM / R \simeq M / R \cap M$ разрешима. С другой стороны, если $R \subseteq M$, то M / R – такая p-разрешимая максимальная подгруппа в G / R, которая либо s-нормальна в G / R, либо имеет нормальный индекс в G / R, не делящийся на p. Следовательно, G / R – p-разрешимая группа по выбору группы G. Поэтому R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как M – разрешимая группа, $R \not\subseteq M$ и R – неабелева группа, чей порядок делится на p, то по нашему предположению, M s-нормальна в G.

Пусть T – субнормальная подгруппа группы G такая, что $G = TM$ и $T \cap M \le M_{..G}$. Ясно, что $M_{..G} = 1$ (см. доказательство теоремы 2.1.) и, следовательно, $T \cap M = 1$. Отсюда следует, что $|M| = |G{:}T|$. Пусть

$$1 = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = \\ = T = T_0 \le T_1 \le \ldots \le T_m = G \qquad (2.1)$$

– композиционный ряд группы G. Тогда

$$|G{:}T| = |T_1 / T_0||T_2 / T_1| \ldots |T_m / T_{m-1}|.$$

Рассмотрим следующий ряд

$$1 = T_0 \cap M \le T_1 \cap M \le \ldots \le T_{m-1} \cap M \le \\ \le T_m \cap M = M \qquad (2.2)$$

Ясно, что $T_{i-1} \cap M \trianglelefteq T_i \cap M$ для всех $i = 1,2,\ldots,m$. Заметим, что

$$|(T_1 \cap M) / (T_0 \cap M)|\,|(T_2 \cap M)/(T_1 \cap M)| \ldots \times \\ \times |(T_m \cap M)/(T_{m-1} \cap M)| = |M| = |G{:}T| = \\ = |T_1 / T_0||T_2 / T_1| \ldots |T_m / T_{m-1}|.$$

Так как

$$(T_i \cap M) / (T_{i-1} \cap M) = (T_i \cap M) / (T_i \cap M) \cap T_{i-1} \simeq \\ \simeq T_{i-1}(T_i \cap M) / T_{i-1} \le T_i / T_{i-1},$$

$$|(T_i \cap M) / (T_{i-1} \cap M)| \le |T_i / T_{i-1}| \text{ для всех } i = 1,2,\ldots,m.$$

Следовательно, $(T_i \cap M) / (T_{i-1} \cap M) \simeq T_i / T_{i-1}$ есть простая группа для всех $i = 1,2,\ldots,m$. Это показывает, что ряд (2.2) есть композиционный ряд группы M. По нашему предположению, M – p-разрешимая группа. Следовательно, каждый фактор ряда (2.2) либо является p'-группой, либо он абелев и имеет порядок p. Следовательно, каждый из факторов T_1 / T_0, T_2 / T_1, ... , T_m / T_{m-1} – либо простая p'-группа, либо группа порядка p. Рассмотрим следующий композиционный ряд группы G:

$$1 \le A_1 \le A_1A_2 \le \ldots \le A_1A_2 \ldots A_{t-1} \le R = \\ = K_0 \le K_1 \le \ldots \le K_r = G,$$

где $R = A_1 \times \ldots \times A_t$ – прямое разложение группы R в произведение изоморфных простых групп. Ввиду теоремы Жордана – Гельдера, существуют индексы $i_1, i_2, \ldots, i_t$ такие, что

$$A_1 \simeq H_{i1} / H_{i1-1},\ A_2 / A_1 \simeq H_{i2} / H_{i2-1}, \ldots, \\ R / A_1A_2 \ldots A_{t-1} \simeq Hi_t / H_{it-1}.$$

Следовательно, $|R| \le |T| = |G{:}M|$. Так как $|G| = \dfrac{|M||R|}{|M \cap R|}$, мы имеем $|G{:}M| \le |R|$.

Следовательно, $|R| = |T|$, и вследствие этого, $R \cap M = 1$. Применяя теперь основной результат работы [13], получаем, что группа M не является p-разрешимой. Это противоречит условию. Теорема доказана.

Заключение

На основе определения s-нормальной подгруппы установлены новые критерии p-разрешимости и разрешимости конечных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deskins*, *W.E.* On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Symp. Pure Math. – 1959. – Vol. 1. – P. 100–104.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

4. *Robinson*, *D.* A course in the theory of groups / D. Robinson. – Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin. – 1982. – 502 p.

5. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

6. *Каморников*, *С.Ф.* К теореме Ф.Холла / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып 5. – С. 45–52.

7. *Монахов*, *В.С.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, вып. 4. – С. 603–612.

8. *Thompson*, *J.G.* Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order / J.G. Thompson // Proc Nat. Acad. Sci. USA. – 1959. – Vol. 45. – P. 578–581.

9. *Janko*, *Z.* Finite groups with a nilpotent maximal subgroup / Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1964. – Vol. 4 – P. 449–451.

10. *Deskins*, *W.E.* A condition for solvability of a finite group / W.E. Deskins // Illinois J. Math. – 1961. – Vol. 5. – P. 306–313.

11. *Wang*, *Y.* c-Normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – № 180. – P. 954–965.

12. *Zhu*, *L.* Weakly c-normal subgroups of finite groups and their properties / L. Zhu, W. Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – № 30. – P. 5505–5512.

13. *Lafuente*, *J.* Eine Note uber nichtabelsche Hauptfactoren und maximale Untergruppen einer endlichen Gruppe / J. Lafuente // Comm. Algebra. – 1985. – Vol. 13, № 9. – P. 2025–2036.

Поступила в редакцию 14.05.15.