

Об устойчивости ядерного реактора как объекта с запаздыванием времени

В. Д. ГОРЯЧЕНКО, Ю. Ф. ТРУНИН

УДК 621.039.514

Исходные предположения и основные уравнения

Рассмотрим ядерную энергетическую установку, состоящую из гетерогенного реактора и теплообменника. Активная зона реактора заполнена твэлами, между которыми находится теплоноситель. Пример, что твэлы и теплоноситель можно характеризовать средними по объему температурами $T_1(t)$ и $T_2(t)$ соответственно. Теплообменник представляет собой линейную распределенную систему с постоянной температурой θ во втором контуре. Температура теплоносителя на выходе из теплообменника равна температуре его на входе в активную зону. Запишем уравнения для плотности нейтронов и концентрации излучателей запаздывающих нейтронов в обычной форме [1]:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\delta k - \beta}{l^*} N(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t); \quad (1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{l^*} N(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (2)$$

Реактивность δk является функцией температур $T_1(t)$ и $T_2(t)$ и координаты регулятора σ :

$$\delta k = -r_1(T_1 - T_{10}) - r_2(T_2 - T_{20}) - f(\sigma). \quad (3)^*$$

В этом уравнении $-r_1$ и $-r_2$ — коэффициенты реактивности по температуре горючего и теплоносителя соответственно, а нелинейная характеристика регулятора $f(\sigma)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0) = 0; \quad \sigma f(\sigma) > 0. \quad (4)$$

Первое равенство в выражениях (4) означает, что нейтральное положение регулирующих

стержней выбрано за начало отсчета σ . Предположим, что регулятор описывается линейным уравнением первого порядка:

$$q \frac{d\sigma(t)}{dt} + \sigma(t) = \frac{N(t) - N_0}{N_0}, \quad (5)$$

где q — постоянная времени регулятора.

Уравнения теплового баланса для горючего и теплоносителя в активной зоне имеют вид

$$m_1 c_1 \frac{dT_1(t)}{dt} = A_1 N(t) - \alpha [T_1(t) - T_2(t)]; \quad (6)$$

$$m_2 c_2 \frac{dT_2(t)}{dt} = \alpha [T_1(t) - T_2(t)] + G c_2 [T_{вх}(t) - T_2(t)]. \quad (7)$$

Здесь $T_{вх}(t)$ — температура теплоносителя на входе в активную зону; m_1 и m_2 — массы горючего и теплоносителя в активной зоне; c_1 и c_2 — теплоемкости горючего и теплоносителя; G — постоянный весовой расход теплоносителя; α и A_1 — положительные константы.

Теплообменник описывается уравнением

$$\frac{\partial T_T(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T_T(x, t)}{\partial x} + \kappa [T_T(x, t) - \theta] = 0, \quad (8)$$

где $T_T(x, t)$ и v — температура и скорость теплоносителя соответственно ($v = \text{const}$); κ — коэффициент теплопередачи из первого контура теплообменника во второй; x — координата, направленная по ходу движения теплоносителя; $x = 0$ — вход в теплообменник (выход из активной зоны); $x = H$ — выход из теплообменника (вход в активную зону). Граничным условием для уравнения (8) будет

$$T_T(0, t) = T_2(t). \quad (9)$$

Решив уравнение (8) с граничным условием (9), получим температуру теплоносителя на входе в активную зону:

$$T_{вх}(t) = T_T(H, t) = \theta + [T_2(t - \tau_2) - \theta] e^{-\kappa \tau_2}, \quad (10)$$

* Здесь и в дальнейшем индекс «0» относится к значению переменного в стационарном режиме.

где τ_2 — время движения теплоносителя через теплообменник длиной H .

Уравнения (1) — (7) и (10) полностью описывают динамику рассматриваемой установки. Исследуем устойчивость стационарного режима установки:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0; \quad C_i(t) = C_{i0}; \quad T_1(t) = T_{10}; \\ T_2(t) &= T_{20}; \quad T_{\text{вх}}(t) = T_{\text{вх}0}; \quad \sigma(t) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для этого введем новое время $\tau = \frac{t}{\tau_1}$ (τ_1 — время пребывания теплоносителя в активной зоне), новые переменные

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{N(t) - N_0}{N_0}; \quad n_i(t) = \frac{C_i(t) - C_{i0}}{C_{i0}}; \\ z_1(t) &= T_1(t) - T_{10}; \\ z_2(t) &= T_2(t) - T_{20}; \quad z_{\text{вх}}(t) = T_{\text{вх}}(t) - T_{\text{вх}0} \end{aligned} \quad (12)$$

и обозначения

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{l^*}{\tau_1}; \quad \tau^* = \frac{q}{\tau_1}; \quad \gamma = \frac{m_2 c_2}{m_1 c_1}; \\ A &= \frac{A_1 N_0 \tau_1}{m_1 c_1} = \gamma (T_{20} - T_{\text{вх}0}); \\ g &= \frac{\alpha}{G c_2} = \frac{T_{20} - T_{\text{вх}0}}{T_{10} - T_{20}}; \\ B &= e^{-\kappa \tau_2}; \quad \mu = \frac{\tau_2}{\tau_1}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В новых переменных исходная система запишется в виде

$$l \frac{dn}{d\tau} = \delta k (n + 1) - \sum_{i=1}^6 \beta_i (n - n_i); \quad (14)$$

$$\frac{1}{\lambda_i \tau_1} \frac{dn_i}{d\tau} = n - n_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6; \quad (15)$$

$$\delta k = -r_1 z_1 - r_2 z_2 - f(\sigma); \quad (16)$$

$$\tau^* \frac{d\sigma}{d\tau} = n - \sigma; \quad (17)$$

$$\frac{dz_1}{d\tau} = An - \gamma g (z_1 - z_2); \quad (18)$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = g (z_1 - z_2) - z_2 + z_{\text{вх}}; \quad (19)$$

$$z_{\text{вх}} = B z_2 (\tau - \mu). \quad (20)$$

При помощи линейного преобразования

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 z_1 + z_2; \\ y_2 &= -a_2 z_1 + z_2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

приведем уравнения (18), (19) к канонической форме. Окончательно исходная система уравнений примет вид:

$$l \frac{dn}{d\tau} = \delta k (n + 1) - \sum_{i=1}^6 \beta_i (n - n_i); \quad (22)$$

$$\frac{1}{\lambda_i \tau_1} \frac{dn_i}{d\tau} = n - n_i; \quad i = 1, 2, \dots, 6; \quad (23)$$

$$\delta k = -\frac{r_1 + a_2 r_2}{a_1 + a_2} y_1 + \frac{r_1 - a_1 r_2}{a_1 + a_2} y_2 - f(\sigma); \quad (24)$$

$$\tau^* \frac{d\sigma}{d\tau} = n - \sigma; \quad (25)$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = a_1 An - \gamma g (1 - a_2) y_1 + z_{\text{вх}}; \quad (26)$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -a_2 An - \gamma g (1 + a_1) y_2 + z_{\text{вх}}; \quad (27)$$

$$z_{\text{вх}} = B \frac{a_2}{a_1 + a_2} y_1 (\tau - \mu) + B \frac{a_1}{a_1 + a_2} y_2 (\tau - \mu), \quad (28)$$

где a_1 и a_2 — корни уравнения

$$a^2 - \frac{1 + g - \gamma g}{\gamma g} a - \frac{1}{\gamma} = 0. \quad (29)$$

Нетрудно убедиться, что

$$a_1 > 0; \quad 0 < a_2 < 1. \quad (30)$$

Очевидно, что тривиальное решение

$$n = n_i = \sigma = y_1 = y_2 = z_{\text{вх}} = 0 \quad (31)$$

системы (22) — (28) описывает стационарный режим работы установки. Таким образом, задача сводится к исследованию устойчивости решения (31).

Исследование устойчивости существенно упрощается в частном случае, когда температура теплоносителя на входе в активную зону считается постоянной ($B = 0$) и, кроме того, пренебрегается запаздывающими нейтронами ($\beta \equiv 0; \lambda_i \equiv 0$) и наличием нелинейного регулятора ($\sigma \equiv 0$). При этом уравнения (22) — (28) вырождаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с единственной нелинейностью ($\delta k N$). Такой частный случай был рассмотрен в работах [2—4] на основе второго метода Ляпунова.

Наша задача принципиально отличается от указанного частного случая наличием членов с запаздыванием времени, обусловленных изменением температуры теплоносителя на выходе из распределенного теплообменника. Кроме того, в данной работе учитываются все шесть

групп запаздывающих нейтронов * и нелинейный регулятор. Насколько известно авторам настоящей работы, в литературе, посвященной исследованию устойчивости в большом ядерных энергетических установок, подобные математические модели не рассматривались.

К настоящему времени получила развитие теория второго метода Ляпунова для систем с запаздыванием времени [5]. Основываясь на этой теории, исследуем устойчивость в большом описанной выше модели реактора.

Исследование устойчивости в большом

Рассмотрим функционал

$$V = l [n - \ln(n+1)] + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i \tau_i} [n_i - \ln(n_i+1)] + \tau^* \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma + \frac{r_1 + a_2 r_2}{2Aa_1(a_1+a_2)} y_1^2 + \frac{r_1 - a_1 r_2}{2Aa_2(a_1+a_2)} y_2^2 + B \frac{r_1 - (a_1 - a_2) r_2}{2Aa_1 a_2 (a_1 + a_2)} \int_{\tau-\mu}^\tau [a_2 y_1^2(\zeta) + a_1 y_2^2(\zeta)] d\zeta. \quad (32)$$

Его полная производная по времени, вычисленная в силу уравнений системы (22) — (28), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} = & - \sum_{i=1}^6 \beta_i \frac{(n-n_i)^2}{(n+1)(n_i+1)} - \sigma f(\sigma) - \\ & - \frac{B}{2A(a_1+a_2)^2} \left\{ \frac{a_2}{a_1} (r_1 + a_2 r_2) [y_1 - y_1(\tau-\mu)]^2 + \right. \\ & + (r_1 + a_2 r_2) [y_1 - y_2(\tau-\mu)]^2 + (r_1 - a_1 r_2) \times \\ & \times [y_2 - y_1(\tau-\mu)]^2 + \\ & \left. + \frac{a_1}{a_2} (r_1 - a_1 r_2) [y_2 - y_2(\tau-\mu)]^2 \right\} - \\ & - \frac{2[\gamma g(1-a_2) - B] r_1 + 2a_2[\gamma g(1-a_2) - B] r_2 + Ba_1 r_2}{2Aa_1(a_1+a_2)} y_1^2 - \\ & - \frac{2[\gamma g(1+a_1) - B] r_1 - 2a_1[\gamma g(1+a_1) - B] r_2 - Ba_2 r_2}{2Aa_2(a_1+a_2)} y_2^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Следует отметить, что ввиду неотрицательности переменных N и C_i

$$1+n > 0; \quad 1+n_i > 0; \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (34)$$

и $f(\sigma)$ в (32) и (33) удовлетворяет условиям (4).

* В работах [2—4] пренебрежение запаздывающими нейтронами, согласно теореме Попова [3], вполне оправдано. В нашей задаче их необходимо учитывать, поскольку теорема Попова не относится к системам с запаздыванием.

Следовательно, непрерывный функционал (32) будет определенно-положительным, а его полная производная (33) — определенно-отрицательной, если выполняются условия:

$$r_1 + a_2 r_2 > 0; \quad (35)$$

$$r_1 - a_1 r_2 > 0; \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - a_2 - \frac{B}{\gamma g}\right) r_1 + a_2 \left(1 - a_2 - \frac{B}{\gamma g}\right) r_2 + \\ + \frac{a_1}{2} \cdot \frac{B}{\gamma g} r_2 > 0; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + a_1 - \frac{B}{\gamma g}\right) r_1 - a_1 \left(1 + a_1 - \frac{B}{\gamma g}\right) r_2 - \\ - \frac{a_2}{2} \frac{B}{\gamma g} r_2 > 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, неравенства (35) — (38) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости исходной динамической модели, причем устойчивость будет иметь место при любых начальных отклонениях переменных в области (34).

Рассмотрим достаточные условия (35) — (38). Коэффициенты реактивности $-r_1$ и $-r_2$ могут быть оба положительными, оба отрицательными и иметь различные знаки. При $r_1 < 0$ и $r_2 < 0$ функционал (32) никакой информации об устойчивости системы не дает, поскольку нарушается условие (35). Это вполне естественно и с физической точки зрения: случай $r_1 < 0$ и $r_2 < 0$ означает [см. выражение (3)], что в системе существует только положительная обратная связь как по горючему, так и по теплоносителю. Из анализа линеаризованной модели нетрудно видеть, что в этих условиях имеет место аperiodическая неустойчивость. Функционал (32) не даёт ответа на вопрос об устойчивости модели и в случае $r_1 < 0, r_2 > 0$, когда нарушается условие (36). На основании подробного анализа остальных ситуаций можно сделать следующие выводы.

1. В случае $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ (оба коэффициента реактивности отрицательны) достаточные условия асимптотической устойчивости в большом (35) — (38) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{a_2}{2} \frac{b}{1+a_1-b} < \frac{r_1}{r_2} < -a_2 - \\ - \frac{a_1}{2} \frac{b}{1-a_2-b} \quad \left(b = \frac{B}{\gamma g} > 0\right) \end{aligned} \quad (39)$$

при любых значениях b из интервала

$$\begin{aligned} 0 < b < \bar{b} = \frac{3+a_1-a_2}{2} - \\ - \sqrt{\frac{(3+a_1-a_2)^2}{4} - 2(1+a_1)(1-a_2)}. \end{aligned} \quad (40)$$

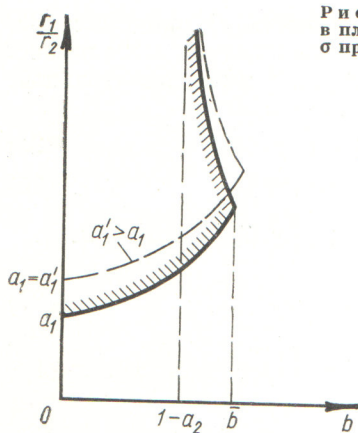


Рис. 1. Область устойчивости в плоскости параметров r_1/r_2 , b при $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$.

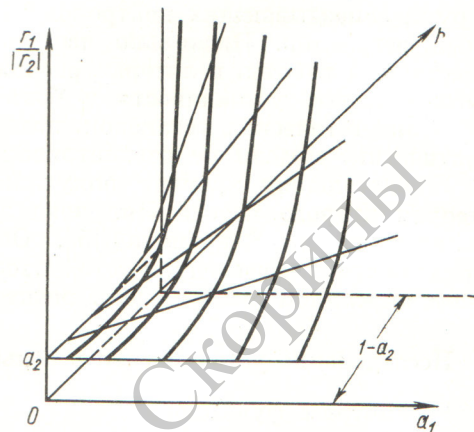


Рис. 3. Область устойчивости в пространстве параметров $r_1/|r_2|$, a_1 при $r_1 > 0$ и $r_2 < 0$.

Этот случай иллюстрируется рис. 1. На плоскости $(r_1/r_2, b)$ при постоянных значениях a_1 и a_2 заштрихованной линией обозначена граница устойчивости. Пунктирной линией показано, как изменится эта граница при увеличении a_1 . В пространстве трех параметров $r_1/r_2, b, a_1$ (при фиксированном значении $a_2 < 1$) неравенства (39), (40) определяют поверхность, показанную на рис. 2. Областью устойчивости является часть пространства, расположенная над этой поверхностью.

2. В случае $r_1 > 0$, но $r_2 < 0$ (отрицательный коэффициент реактивности по горючему и положительный по теплоносителю) достаточные условия (35) — (38) преобразуются к виду

$$a_2 + \frac{a_1}{2} \cdot \frac{b}{1-a_2-b} < \frac{r_1}{|r_2|} < +\infty \quad (41)$$

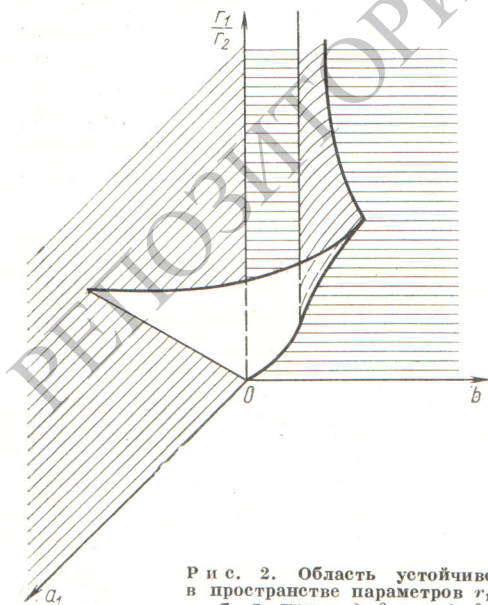


Рис. 2. Область устойчивости в пространстве параметров r_1/r_2 , b, a_1 при $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$.

при любых значениях b из интервала

$$0 < b < 1 - a_2. \quad (42)$$

Область устойчивости, определяемая неравенствами (41) и (42) в пространстве трех параметров $r_1/|r_2|, b, a_1$ (при фиксированном $a_2 < 1$), находится сверху от поверхности, приведенной на рис. 3. При любом сечении указанной поверхности плоскостью $b = \text{const}$ получается прямая, наклон которой тем больше, чем больше b . Сечение поверхности плоскостью $a_1 = \text{const}$ дает гиперболу с асимптотой $b = 1 - a_2$.

В предельном случае — при постоянной температуре теплоносителя на входе в активную зону ($B = 0$) — достаточные условия асимптотической устойчивости в большом определяются только неравенствами (35) и (36), которые совпадают с условиями, полученными в работе [2]. Условия (35) и (36) предъявляют менее жесткие требования к параметрам $r_1/r_2, a_1$ и a_2 , чем условия (39) — (42), полученные для общего случая, когда учитывается изменение температуры теплоносителя на выходе из теплообменника ($B \neq 0$).

Поступила в Редакцию 16/II 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ш у л ь ц. Регулирование энергетических ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
2. W. E r g e n et al. J. Math. and Phys., 1, 36 (1957).
3. V. M. P o p o v. Доклад № 2458, представленный Румынией на Вторую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958).
4. H. S m e t s. Bull. cl. sci. Acad. rog. Belgique, 5, 382 (1961).
5. Н. Н. К р а с о в с к и й. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.