МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, В КОТОРЫХ КАЖДАЯ ПОДГРУППА ЛИБО $\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНА, ЛИБО $\mathfrak{F}$-АБНОРМАЛЬНА

В.Н. Семенчук, А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON FINITE GROUPS IN WHICH EVERY SUBGROUP IS EITHER $\mathfrak{F}$-SUBNORMAL OR $\mathfrak{F}$-ABNORMAL

V.N. Semenchuk, A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Изучается строение конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. В частности, получено описание таких групп в случаях, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных или всех p-разложимых групп.

Ключевые слова: *конечная группа, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа, насыщенная формация, формация с условием Шеметкова.*

The structure of finite groups in which every proper subgroup is either $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-abnormal, where $\mathfrak{F}$ is a saturated hereditary formation with the Shemetkov property containing all nilpotent groups is studied. In particular, descriptions of these groups in the cases when $\mathfrak{F}$ is either the formation of all p-nilpotent groups or all p-decomposable groups were obtained.

Keywords: *finite group, $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup, $\mathfrak{F}$-abnormal subgroup, saturated formation, formation with the Shemetkov property.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Фаттачи описал группы, у которых любая собственная подгруппа либо нормальна, либо абнормальна. Расширяя этот результат, Эберт и Бауман в работе [2] классифицировали группы, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественными обобщениями понятий субнормальности и абнормальности являются, соответственно, понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы и $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппы.

В 1986 году Ферстер и В.Н. Семенчук, соответственно в работах [3], [4], исследовали строение групп, у которых все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны. В последствии В.Н. Семенчук и С.Н. Шевчук в работе [5] исследовали группы, у которых все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны. В работе В.Н. Семенчука и А.Н. Скибы [6] были описаны группы, у которых каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{U}$-субнормальна, либо $\mathfrak{U}$-абнормальна для случая, когда $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп.

Дальнейшему развитию данного направления посвящена и настоящая работа.

1 Предварительные сведения

Необходимые определения и обозначения можно найти в [7]. Напомним некоторые из них. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Если $p \in \mathbb{P}$ и $\pi \subseteq \mathbb{P}$, то $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ и $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

$\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ – класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

1) $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-нормальна в H_{i-1};

2) $\mathfrak{F}$-*абнормальной*, если для любой максимальной цепи

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-абнормальна в H_{i-1} для любого $i \geq 1$.

Группа называется *минимальной не* $\mathfrak{F}$-*группой*, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, но все собственные подгруппы ее принадлежат $\mathfrak{F}$. В частности, ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется *группой Шмидта*.

Важную роль в дальнейших исследованиях сыграли формации со свойством Шеметкова, т. е. формации $\mathfrak{F}$, для которых каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Как следует из работ Ито [8], С.А. Чунихина и И.К. Чунихиной [9], примерами формации со свойством Шеметкова являются формации всех p-нильпотентных и всех p-разложимых групп.

2 Основные результаты

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Нетрудно показать, что любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини является группой, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны. Дальнейшая связь таких групп найдена в следующей теореме.

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима, то и любая группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, также разрешима.*

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда любая не p-нильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, разрешима.*

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Тогда любая не p-разложимая группа, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, разрешима.*

Следствие 2.1.3 [6]. *Пусть $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда любая группа, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{U}$-субнормальны, либо $\mathfrak{U}$-абнормальны, разрешима.*

Важную роль в дальнейших исследованиях сыграла следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *любая группа G, у которой все силовские подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, принадлежит $\mathfrak{F}$;*

2) *любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо бипримарной p-замкнутой ($p \in \pi(G)$), либо примарной группой.*

***Следствие* 2.2.1** [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Группа является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны.*

Следствие 2.2.2 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Группа является p-разложимой тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны.*

Следствие 2.2.3. *Группа является абелевой тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы абелевы и субнормальны.*

***Теорема* 2.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация со свойством Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Если в группе G все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, то в G все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны.*

***Следствие* 2.3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Если в группе G все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, то в G все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны.*

***Следствие* 2.3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Если в группе G все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, то в G все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны.*

***Теорема* 2.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация со свойством Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы $G \notin \mathfrak{F}$ либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G имеет следующее строение:*

1) *G – разрешимая группа;*

2) *$G = G_{q'} \rtimes G_q$, где $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q – циклическая подгруппа Картера;*

3) *любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G.*

***Следствие* 2.4.1** [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы G,* *не принадлежащей $\mathfrak{F}$, либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда $G = G_p \rtimes G_q$, где $q \neq p$, G_q – циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.*

***Следствие* 2.4.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа не p-разложимой группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G – разрешимая группа одного из следующих типов*:

1) $G = G_p \rtimes G_q$, *где* $q \neq p$, G_q – *циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из* G_q *нормальна в* G, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

2) $G = G_{p'} \rtimes G_p$, *где* $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$, G_p – *циклическая подгруппа Картера и любая максимальная подгруппа из* G_p *нормальна в* G.

*Пример***.** Пусть $H = S_3$ и V – проективная оболочка тривиального $\mathbb{F}_3[H]$-модуля. Пусть $E = [V]H$. Тогда $\Phi(E) = R(V)$ и $C_H(V) = O_{3'}(H)$ [11]. Следовательно, E имеет фраттиниев главный фактор K/L такой, что $|K/L| > 3$. Пусть $G = E/L$. Тогда G – 3-замкнутая $\{2,3\}$-группа, не являющаяся группой Шмидта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fattachi*, *A.* Groups with only normal and abnormal subgroups / A. Fattachi // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28, № 1. – P. 15–19.

2. *Ebert*, *G.* A note on subnormal and abnormal chains / G. Ebert, S. Bauman // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 2. – P. 287–293.

3. *Förster*, *P.* Finite groups all of whose subgroups are $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-subabnormal / P. Förster // J. Algebra. –1986. – № 1. – P. 285–293.

4. *Семенчук*, *В.Н.* Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во «Университетское». – 1986. – № 2. – С. 50–55.

5. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 8. – С. 46–55.

6. *Semenchuk*, *V.N.* On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // arXiv:1412.5469v1 [math.GR].

7. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978. – 267 с.

8. *Ito*, *N.* Note on (LM)-groups of finite order / N. Ito // Kodai Math. Sem. Rep. – 1951. – Vol. 1–2. – P. 1–6.

9. *Чунихина*, *И.К.* О *p*-разложимых группах / И.К. Чунихина, С.А. Чунихин // Мат. сборник. – 1944. – Vol. 15, № 57:2. – С. 325–342.

10. *Шевчук*, *С.Н.* Конечные группы с обобщенно абнормальными подгруппами / С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 57–60.

11. *Willems*, *W.* On the projectives of a group algebra / W. Willems // Math. Z. – 1980. – № 171. – P. 163–174.

Поступила в редакцию 17.02.15.