УДК 517.538.52+517.538.53

АСИМПТОТИКА ДИАГОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИЗ ЧЕТЫРЕХ ЭКСПОНЕНТ

А.В. Астафьева

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ASYMPTOTICS OF DIAGONAL HERMITE – PADE APPROXIMANTS FOR A SYSTEM OF FOUR EXPONENTIALS

A.V. Astafyeva

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Изучаются асимптотические свойства диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^{3}$, где $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ – произвольные действительные числа. Полученные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского.

***Ключевые слова**: диагональные аппроксимации Эрмита – Паде I типа, асимптотические равенства, метод перевала.*

Asymptotic properties of diagonal Hermite – Pade approximants of type I for exponential system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^{3}$ with arbitrary real $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ are studied. The obtained theorems complement the results of P. Borwein and F. Wielonsky.

Keywords: *Hermite – Pade approximants of type* I, *asymptotic equality, saddle-point method.*

Введение

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) $(n-1)$-го порядка системы экспонент $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^{k}$ принято называть набор из $k+1$ многочленов $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_k(z)$, степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z) e^{pz} = O(z^{kn+n-1}),\ z \to 0, \qquad (0.1)$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

Такие аппроксимации были определены Ш. Эрмитом [1] в 1883 году. Ещё раньше в известной работе [2], посвящённой доказательству трансцендентности числа e, Эрмитом рассматривался другой тип аппроксимаций системы экспонент $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^{k}$. В современной терминалогии (подобнее см. [3]) этот другой тип аппроксимаций называют аппроксимациями Эрмита – Паде II типа (German type). Известно [4], что с помощью аппроксимаций Эрмита – Паде I типа также можно доказать трансцендентность числа e.

Фундаментом формальной теории аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов для произвольных систем аналитических функций стали работы К. Малера [3], [4]. В этих работах, в частности, даны строгие определения основных понятий, заложены основы современной терминалогии. Дальнейшее развитие теории подробно проанализировано в обзоре [5]. Оба типа аппроксимаций, явно различные в многомерном случае $(k \geq 2)$, нашли многочисленные приложения в теории приближения аналитических функций, в теории чисел, в частности, при доказательствах трансцендентности, в исследовании алгебраической природы математических констант (см., например [6]–[8]).

При $k=1$ теорема Паде [9] утверждает, что для полиномов $A_0(z)$, $A_1(z)$, нормированных так, что $A_0(0)=1$, при $n \to \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т. е. на любом компакте в $\mathbb{C}$, справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2}(1+O(1/n)),$$

$$A_1(z) = e^{z/2}(1+O(1/n)).$$

С помощью явных формул П. Борвейн [10] нашёл асимптотику аппроксимаций Эрмита – Паде I типа системы $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^{k}$ при $k=2$. Этот результат был обобщён Ф. Вилонским [11] на случай произвольного k. В [12] результат П. Борвейна обобщен на системы экспонент $\{e^{\lambda_i z}\}_{i=0}^{2}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Случай недиагональных аппроксимаций изучался К. Дривер [13].

В данной статье рассматриваются диагональные аппроксимации Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{3}$ с произвольными различными действительными показателями

$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Основным объектом исследования являются асимптотические свойства многочленов Эрмита $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^3$, имеющих степень не выше $n-1$ и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^{3} A_n^p(z)e^{\lambda_p z} = O\left(z^{kn+n-1}\right), z \to 0. \quad (0.2)$$

Введем необходимые обозначения. Определим функцию φ, полагая

$$\varphi(\xi) := (\xi-\lambda_0)(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)(\xi-\lambda_3).$$

Обозначим через x_i, $i=1,2,3$ нули производной $\varphi'(\xi)$. Ясно, что $x_1 \in (\lambda_0;\lambda_1)$, $x_2 \in (\lambda_1;\lambda_2)$, $x_3 \in (\lambda_2;\lambda_3)$. Пусть G – такая односвязная область, что $G \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda_i\}_{i=0}^3$. В G рассмотрим однозначную аналитическую функцию

$$S(\xi) = -\ln\varphi(\xi) = -\ln|\varphi(\xi)| - i\arg_0\varphi(\xi),$$

где $\arg_0\varphi(x_1) = \pi$. Значения функции $S(\xi)$ вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -\ln|\varphi(\xi)| - i\left[\operatorname{Im} S(x_1) + \Delta_\gamma \arg\varphi(\xi)\right],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\Delta_\gamma \arg\varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Выбирая положительное значение корня, положим

$$B_n(x_i) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_i)}} e^{nS(x_i)}, i = 1,2,3.$$

Сформулируем основную теорему, обобщающую указанные выше результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского и А.П. Старовойтова.

***Теорема* 0.1.** *Для любого фиксированного* z *при* $n \to +\infty$

$$A_n^0(z) = B_n(x_1)e^{x_1 z}(1+O(1/n)), \quad (0.3)$$

$$\begin{aligned} A_n^p(z) = B_n(x_{p+1})e^{(x_{p+1}-\lambda_p)z}(1+O(1/n)) - \\ -B_n(x_p)e^{(x_p-\lambda_p)z}(1+O(1/n)), \end{aligned} \quad (0.4)$$

при $p=1,2$,

$$A_n^3(z) = -B_n(x_3)e^{x_3 z}(1+O(1/n)). \quad (0.5)$$

1 Вспомогательные утверждения

Полиномы $\left\{A_n^p(z)\right\}_{p=0}^3$, удовлетворяющие равенствам (0.2), могут быть получены решением линейной системы $4n-1$ однородных уравнений с $4n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Более того, такие решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{e^{\xi z}d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, 0 \le p \le 3, \quad (1.1)$$

удовлетворяют (0.2) и всем другим условиям.

При изучении асимптотики интеграла в (1.1) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения (см. [14], с. 398, 415).

***Утверждение* 1.1 (Метод Лапласа).** *Пусть* $f(x)$, $S(x)$ *непрерывные на отрезке* $[a,b]$ *функции, при этом* $S(x)$ *принимает только действительные значения, а* $f(x)$ *может быть комплекснозначной. Полагаем*

$$I_n = \int_a^b f(x)e^{nS(x)}dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ *в точке* $x_0 \in (a,b)$ *имеет абсолютный максимум на отрезке* $[a,b]$, *т. е.* $S(x) < S(x_0)$, $x \ne x_0$, $S''(x_0) \ne 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $n \to +\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}}e^{nS(x_0)}\left\{f(x_0)+O(1/n)\right\}.$$

***Утверждение* 1.2 (Метод перевала).** *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой области* G, *содержащей кусочно-гладкую кривую* γ *и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi)e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Предположим, что $\max_\gamma \operatorname{Re} S(\xi)$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т.е.* $S'(z_0)=0$, $S''(z_0) \ne 0$. *Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора (см.* [11], *с.* 414), *в которых*

$$\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0).$$

Тогда при $n \to \infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}e^{nS(z_0)}(f(z_0)+O(1/n)). \quad (1.2)$$

Выбор ветви корня в (1.2) *определяется из условий*

$$\arg\sqrt{-\tfrac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 *– угол между касательной к кривой* l *в точке* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* l *– линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0, *т. е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия:*

$$\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0) \text{ при } z \in l;$$

$$\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0) \text{ при } z \in l, \ z \ne z_0.$$

2 *Доказательство теоремы* 0.1

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 0.1. Без ограничения общности, считаем, что $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. Докажем асимптотическое равенство (0.3). Пусть $z\in\mathbb{C}$. Приведем $A_n^0(z)$ к следующему виду

$$A_n^0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} e^{\xi z}e^{nS(\xi)}d\xi. \qquad (2.1)$$

Деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R, принадлежащий области $\{z:-\infty<\operatorname{Re}z<\lambda_1\}$, с вершинами $A(-a';-r)$, $B(-a';r)$, $C(a;r)$, $D(a;-r)$, где r – достаточно большое число, $a\in(0;\lambda_1)$, $a'>0$. Тогда на вертикальном отрезке $[A;B]$ максимум функции $\operatorname{Re}S(\xi)$ достигается только в точке $-a'$ (легко проверить), аналогично на вертикальном отрезке $[C;D]$ в точке a. На оставшихся двух горизонтальных отрезках $[B;C]$, $[D;A]$, при достаточно больших значениях r, значение $\operatorname{Re}S(\xi)$ меньше, чем любое из значений в точке $-a'$ и a. Действительно, пусть, например, $\xi\in[B;C]$, т. е. $\xi=t+ir$, $t\in[-a';a]$:

$$|\varphi(\xi)|=\sqrt{(t^2+r^2)((t-\lambda_1)^2+r^2)}\times$$
$$\times\sqrt{((t-\lambda_2)^2+r^2)((t-\lambda_3)^2+r^2)}>$$
$$>\min\{|\varphi(-a')|,|\varphi(a)|\},$$

если только $r>3\max\{a',\lambda_3\}$ и следовательно $\operatorname{Re}S(\xi)<\min\{\operatorname{Re}S(-a'),\operatorname{Re}S(a)\}$.

Возьмем теперь $a=x_1$, а a' выбираем так, чтобы $\operatorname{Re}S(-a')<\operatorname{Re}S(x_1)$. Это возможно, так как $\ln|\varphi(t)|^{-1}\to\infty$ при $t\to\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[M,N]$ направление от M к N. Обозначим

$$F_n^{[M;N]}=\frac{1}{2\pi i}\int_{[M;N]} e^{\xi z}e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Для нахождения асимптотики интеграла $F_n^{[D;C]}$ применим метод перевала. В результате получим

$$F_n^{[D;C]}=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1 z}(1+O(1/n)).$$

Ветвь корня в последнем равенстве выбираем с учетом того, что $\varphi_0=\pi/2$. В результате приходим к равенству

$$F_n^{[D;C]}=B_n(x_1)e^{x_1 z}(1+O(1/n)). \qquad (2.2)$$

Применяя к интегралу (2.1) на отрезке $[B;A]$ утверждение 1.2 и учитывая выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|F_n^{[B;A]}(z)|\le\theta\,|e^{n(S(x_1)-\delta)}|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n\to\infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}(z)$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с $\left|e^{nS(x_1)}\right|$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}(z)$, $F_n^{[A,D]}(z)$. Значит основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D;C]$. Поэтому из (2.2) следует справедливость равенства (0.3) для любого фиксированного $z\in\mathbb{C}$.

Утверждение (0.5) доказывается аналогично, с тем лишь отличием, что при выборе ветви корня в методе перевала необходимо учитывать, что угол $\varphi_0=-\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенства (0.4). Ограничимся случаем $p=1$. Случай $p=2$ рассматривается аналогично. Зафиксируем произвольное $z\in\mathbb{C}$ и представим многочлен $A_n^1(z)$ в виде

$$A_n^1(z)=\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\int_{C_1} e^{\xi z}e^{nS(\xi)}d\xi. \qquad (2.3)$$

В (2.3) деформируем контур интегрирования C_1 в прямоугольник R^*, принадлежащий области $\{z:0<\operatorname{Re}z<\lambda_2\}$ с вершинами $A^*(a';-r)$, $B^*(a';r)$, $C^*(a;r)$, $D^*(a;-r)$, где r – достаточно большое число, $a\in(\lambda_1;\lambda_2)$, $a'\in(0;\lambda_1)$. Тогда на вертикальном отрезке $[A^*;B^*]$ максимум функции $ReS(\xi)$ достигается только в точке a', на вертикальном отрезке $[C^*;D^*]$ в точке a. На оставшихся двух горизонтальных отрезках $[B^*;C^*]$, $[A^*;D^*]$ при достаточно больших значениях r ($r>6\lambda_3$) значение $\operatorname{Re}S(\xi)$ меньше, чем любое из значений в точке a' и a. Следовательно, если положить $a'=x_1$, $a=x_2$, то основной вклад в интеграл (2.3) будут вносить интегралы по отрезкам $[D^*;C^*]$ и $[B^*;A^*]$. Применим к интегралам $F_n^{[D^*;C^*]}(z)$, $F_n^{[B^*;A^*]}(z)$ метод перевала. Тогда при $n\to\infty$

$$F_n^{[D^*;C^*]}(z)=$$
$$=\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_2)}}e^{nS(x_2)}e^{x_2 z}(1+O(1/n)), \qquad (2.4)$$

$$F_n^{[B^*;A^*]}(z)=$$
$$=\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1 z}(1+O(1/n)). \qquad (2.5)$$

При выборе ветви корня в (2.4), полагаем $\varphi_0=\pi/2$, а при выборе ветви корня в (2.5), полагаем $\varphi_0=-\pi/2$. С учётом этого, из (2.4) и (2.5) следует равенство (0.4) при $p=1$. Таким образом, справедливость асимптотических равенств (0.3)–(0.5) для любого фиксированного z доказана.

***Следствие* 2.1.** *При* $n\to\infty$

$$A_n^0(0)=B_n(x_1)(1+O(1/n)),$$
$$A_n^1(0)=B_n(x_2)(1+O(1/n))-B_n(x_1)(1+O(1/n)),$$
$$A_n^2(0)=B_n(x_3)(1+O(1/n))-B_n(x_2)(1+O(1/n)),$$
$$A_n^3(0)=-B_n(x_3)(1+O(1/n)).$$

***Следствие* 2.2.** *Пусть* $\lambda_0=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$. *Тогда для любого комплексного* z *при* $n\to\infty$

$$A_n^0(z)\sim\frac{(-1)^n}{2}b_n e^{(3-\sqrt5)z/2},$$
$$A_n^1(z)\sim\frac{1}{2\sqrt2}b_n\left(\frac43\right)^{2n-1}e^{z/2},$$
$$A_n^2(z)\sim-\frac{1}{2\sqrt2}b_n\left(\frac43\right)^{2n-1}e^{-z/2},$$
$$A_n^3(z)\sim\frac{(-1)^{n-1}}{2}b_n e^{(-3+\sqrt5)z/2},$$

где $b_n=\sqrt{1/5\pi n}$.

Для доказательства следствия 2.2 достаточно заметить, что

$$\varphi(\xi)=\xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3),$$
$$x_1=\frac{3-\sqrt5}{2},\ x_2=\frac32,\ x_3=\frac{3+\sqrt5}{2},$$
$$S(x_1)=S(x_3)=-i\pi,\quad S(x_2)=\ln(16/9),$$
$$S''(x_1)=S''(x_3)=10,\quad S''(x_2)=80/9.$$

***Следствие* 2.3.** *Пусть* $\lambda_0=0,\quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=1+\varepsilon,\quad \lambda_3=2+\varepsilon,$ *где* $0<\varepsilon\le1$. *Тогда для любого комплексного* z *при* $n\to\infty$

$$A_n^0(z)=\frac{(-1)^n}{2\gamma\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{2n-1}e^{(2+\varepsilon-\gamma)z/2}(1+O(1/n)),$$
$$A_n^1(z)=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{2\pi n\gamma}}e^{\varepsilon z/2}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\right)^{2n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\varepsilon+1}\right)^{2n-1}e^{-\gamma z/2}\right)(1+O(1/n)),$$
$$A_n^2(z)=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{2\pi n\gamma}}e^{-\varepsilon z/2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\varepsilon+1}\right)^{2n-1}e^{\gamma z/2}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\right)^{2n-1}\right)(1+O(1/n)),$$
$$A_n^3(z)=\frac{(-1)^{n-1}}{2\gamma\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{2n-1}e^{(-2-\varepsilon-\gamma)z/2}(1+O(1/n)),$$

где $\gamma=\sqrt{2+2\varepsilon+\varepsilon^2}$.

Заметим, что если в следствии 2.3 положить $\varepsilon=1$, то получим следствие 2.2.

3 Равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде

Основным результатом этого раздела является следующая теорема, обобщающая соответствующие теоремы о равномерной сходимости из работ П. Борвейна [10], Ф. Вилонского[11] и А.П. Старовойтова [12].

***Теорема* 3.2.** *Пусть* $\lambda_0=0,\ \lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=2\lambda,\ \lambda_3=3\lambda,$ *где* λ *– произвольное действительное число не равное нулю. Тогда локально равномерно по* z *при* $n\to\infty$

$$A_n^0(z)=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{5\pi n}}\left(\frac1\lambda\right)^{4n-1}e^{(3-\sqrt5)\lambda z/2}(1+O(1/n)),$$
$$A_n^1(z)=\frac{1}{2\sqrt{5\pi n}}\left(\frac1\lambda\right)^{4n-1}e^{\lambda z/2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac43\right)^{2n-1}+(-1)^{n-1}e^{-\sqrt5\lambda z/2}\right)(1+O(1/n)),\tag{3.1}$$
$$A_n^2(z)=\frac{1}{2\sqrt{5\pi n}}\left(\frac1\lambda\right)^{4n-1}e^{-\lambda z/2}\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac43\right)^{2n-1}+(-1)^{n}e^{\sqrt5\lambda z/2}\right)(1+O(1/n)),$$
$$A_n^3(z)=\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{5\pi n}}\left(\frac1\lambda\right)^{4n-1}e^{(-3+\sqrt5)\lambda z/2}(1+O(1/n)).$$

Доказательство. Из условий теоремы 3.2 следует, что

$$\varphi(\xi)=\xi(\xi-\lambda)(\xi-2\lambda)(\xi-3\lambda),$$
$$x_1=\frac{(3-\sqrt5)\lambda}{2},\ x_2=\frac{3\lambda}{2},\ x_3=\frac{(3+\sqrt5)\lambda}{2},$$
$$S(x_1)=S(x_3)=\ln(1/\lambda^4)-i\pi,$$
$$S(x_2)=\ln(16/9\lambda^4),$$
$$S''(x_1)=S''(x_3)=\frac{10}{\lambda^2},$$
$$S''(x_2)=\frac{80}{9}\lambda^2.$$

Отсюда и из теоремы 0.1 получим справедливость равенств (3.1) для каждого фиксированного комплексного числа z. Докажем, что равенства (3.1) справедливы и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$.

Из следствия 2.1 вытекает, что при достаточно больших n $A_n^j(0)\ne0,\quad j=0,1,2,3.$ Поэтому можно рассматривать нормированные полиномы

$$\widetilde{A_n^j}(z)=\frac{A_n^j(z)}{A_n^j(0)},\ j=0,1,2,3.$$

Докажем, например, что первое из равенств (3.1) справедливо равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$. Заметим, что согласно следствию 2.1 при $n\to\infty$

$$A_n^0(0)=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{5\pi n}}\left(\frac1\lambda\right)^{4n-1}(1+O(1/n)).\tag{3.2}$$

Предположим, что $|z|\le\rho$ и $\xi\in R$. Тогда модуль $e^{\xi z}$ ограничен $M=e^{3\rho\max\{a',3\lambda\}}$. Из равенства (2.1) следует, что

$$\left|A_n^0(z)\right|\le\frac{M}{2\pi}\int_\alpha^\beta e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt,$$

при условии, что контур интегрирования R прежний и параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\beta]$. Для нахождения асимптотики интеграла в правой части предыдущего неравенства применим метод Лапласа (утверждение 1.1). В результате получим, что при $n\to\infty$

$$\int_\alpha^\beta e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt=$$

$$=\sqrt{\frac{-2\pi}{n\left[\operatorname{Re}S(\zeta(t))\right]''_{t=t_0}}}e^{n\operatorname{Re}S(x_1)}\left|\zeta'(t_0)\right|\left(1+O(1/n)\right),\qquad(3.3)$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0)=x_1$. В результате несложных вычислений (учитываем, что t_0 является точкой максимума функции $\operatorname{Re}S(\zeta(t))$) приходим к равенству

$$\left[\operatorname{Re}S(\zeta(t))\right]''_{t=t_0}=S''(x_1)\left[\zeta'(t_0)\right]^2.$$

Тогда, из (3.2), (3.3) при достаточно больших n получаем неравенство $\left|\widetilde{A_n^0}(z)\right|\le 2M$, из которого следует, что последовательность $\{\widetilde{A_n^0}(z)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z:|z|\le\rho\}$. Тогда по теореме Витали [15] эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{x_1 z}$ на любом компакте из круга $\{z:|z|\le\rho\}$. Поэтому первое из равенств в (3.1) справедливо равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$.

Аналогично доказывается, что и другие равенства (3.1) справедливы равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$. Теорема 3.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hermite*, *C.* Sur la generalisation des fractions continues algebriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.

2. *Hermite*, *C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

3. *Mahler*, *K.* Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – Vol. 19. – P. 95–166.

4. *Mahler*, *K.* Zur Approximation der Exponential funktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.

5. *Aptekarev*, *A.I.* Asymptotics of Hermite – Pade polynomials, in "Progress in Approximation Theory" (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) – P. 127–167 / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York / Berlin: Springer-Verlag, 1992.

6. *Аптекарев*, *А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

7. *Mahler*, *K.* Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 1668. – P. 200–227.

8. *Chudnovsky*, *G.V.* Hermite – Pade approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of, in "Lecture Notes in Math" / G.V. Chudnovsky. – New York / Berlin: Springer-Verlag. – 1982. – Vol. 925. – P. 299–322.

9. *Pade*, *H.* Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential / H. Pade // Ann. Ecole Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16, № 3. – P. 394–426.

10. *Borwein*, *P.B.* Quadratic Hermite – Pade approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.

11. *Wielonsky*, *F.* Asymptotics of Diagonal Hermite – Pade Approximants to / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.

12. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А. П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.

13. *Driver*, *K.A.* Non-diagonal quadratic Hermite – Pade approximation to the exponential function / K.A. Driver // J. Comp. Appl. Math. – 1995. – Vol. 65. – P. 125–134.

14. *Сидоров*, *Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

15. *Маркушевич*, *А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1. / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 01.07.14.