Проблемы физики, математики и техники, № 1 (22), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О РЕШЕТКЕ ВСЕХ РАЗРЕШИМЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРОВ

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

ON THE LATTICE OF ALL SOLVABLE REGULAR TRANSITIVE SUBGROUP FUNCTORS

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

Изучаются свойства решетки $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$ всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов. Вводится понятие θ-субнормального подгруппового функтора. Доказывается, что множество $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ всех θ-субнормальных подгрупповых функторов образует подрешетку и идеал решетки $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$. Исследуется связь решеток $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$. В частности, доказывается существование такой конгруэнции Ψ, определенной на решетке $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$, что решетки $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})/\Psi$ и $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ изоморфны.

***Ключевые слова**: конечная разрешимая группа, подгрупповой функтор, регулярный транзитивный подгрупповой функтор, решетка, конгруэнция, изоморфизм решеток.*

The properties of the lattice $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$ of all regular transitive subgroup functors are investigated. The notion of θ-subnormal subgroup functor is introduced. It is proved that the set $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ of all θ-subnormal subgroup functors is a sublattice and ideal of the lattice $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$. The connection of lattices $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$ and $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ is investigated. The existence of a congruence Ψ defined on $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$ such that the lattices $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})/\Psi$ and $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ are isomorphic, in particular, is proved.

Keywords: *finite solvable group, subgroup functor, regular transitive subgroup functor, lattice, congruence, isomorphism of lattices.*

Введение

Отображение θ, сопоставляющее каждой группе G некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется *подгрупповым функтором*, если для любого изоморфизма φ группы G выполняется равенство $(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$.

Подгрупповой функтор θ называется *регулярным*, если для любого эпиморфизма $\varphi: A \to B$ имеют место включения

$$(\theta(A))^{\varphi} \subseteq \theta(B),\ (\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$$

и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G. Регулярность подгруппового функтора θ означает, что для любой нормальной подгруппы N группы G всегда выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ следует $HN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ следует $H \in \theta(G)$.

Если же из $K \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G)$ всегда следует $K \in \theta(G)$, то подгрупповой функтор θ называется *транзитивным*.

Понятие подгруппового функтора введено А.Н. Скибой в монографии [1]. Здесь же под номером 1.2.12 сформулирован следующий вопрос:

Можно ли классифицировать все регулярные транзитивные подгрупповые функторы?

Практика показывает, что данный вопрос является достаточно сложным. Эта сложность, прежде всего, обусловлена отсутствием четкого понимания того, что значит классифицировать подгрупповые функторы. Вряд ли здесь речь может идти о некотором «перечислении» подгрупповых функторов или формулировке общего алгоритма их конструирования: известные примеры регулярных транзитивных подгрупповых функторов весьма разнородны и поэтому трудно надеяться, что их можно уложить в некоторую единую схему.

Другой подход, согласующийся с теорией формальной логики, заключается в разбиении объема понятия «подгрупповой функтор» на некоторые классы с их последующим описанием. Некоторая модифицированная версия такого подхода, апеллирующая к теории решеток, в случае разрешимых подгрупповых функторов рассматривается в данной работе. Здесь исследуется строение решетки $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$ всех разрешимых регулярных подгрупповых функторов. В частности, изучаются классы специальной конгруэнции Ψ, определенной на решетке $\mathrm{R\,T}(\mathfrak{S})$, и устанавливается связь этих классов с обобщенно субнормальными функторами.

Отметим, что регулярные транзитивные подгрупповые функторы интересны не только как самостоятельные объекты исследования. Заслуживают внимания и широкие прикладные возможности отдельных серий таких функторов для изучения подгруппового строения групп и их канонических подгрупп. Прежде всего, речь идет о функторах, выделяющих $\mathfrak{F}$-субнормальные (Картер, Хоукс [2]) и $\mathfrak{F}$-достижимые (Кегель [3]) подгруппы, а также об $\mathfrak{F}$-субабнормальных функторах и функторах, которые выделяют в группах подгруппы, содержащие $\mathfrak{F}$-проекторы (см., книги [4]–[5]). При этом названные подгрупповые функторы в теории классов определили и стимулировали развитие многих интересных объектов (гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций, $\mathfrak{F}$-проекторов, $\mathfrak{F}$-нормализаторов, решеточных формаций и др.), которые активно исследуются в настоящее время (см., [6]–[7], а также обзор [8]).

1 Решетка $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые функторы, т. е. функторы, определенные на классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых конечных групп. Используемые определения и обозначения теории конечных групп и подгрупповых функторов стандартны, их можно найти в [4] и [9]. Что касается терминологии теории решеток, то мы отсылаем читателей к книге [10].

Обозначим через $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ множество всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов и введем на этом множестве частичный порядок $\le$, полагая, что отношение $\theta_1 \le \theta_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо включение $\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G)$.

Для совокупности $\{\theta_i \mid i \in I\}$ из $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ определим пересечение $\theta = \bigcap_{i\in I} \theta_i$ следующим образом: $\theta(G) = \bigcap\limits_{i\in I} \theta_i(G)$ для любой разрешимой группы G. Простая проверка показывает, что θ – регулярный транзитивный подгрупповой функтор. Этот функтор является точной нижней гранью множества $\{\theta_i \mid i \in I\}$ в $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$. Таким образом, $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ – полная решетка, единицей которой является подгрупповой функтор $1_{\mathfrak{S}}$, выделяющий в каждой группе все ее подгруппы, а нулем – тривиальный подгрупповой функтор $0_{\mathfrak{S}}$, выделяющий в каждой группе G только саму группу G.

2 Идеал $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$

Пусть θ – подгрупповой функтор. Подгруппа H группы G называется *θ-субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$, что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если θ – подгрупповой функтор, то множество всех θ-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать $\mathrm{sub}_\theta(G)$.

Доказательство следующих трех лемм осуществляется простой проверкой.

***Лемма* 2.1.** *Если θ – подгрупповой функтор, то функция*

$$\mathrm{sub}_\theta : G \mapsto \mathrm{sub}_\theta(G)$$

является подгрупповым функтором.

Далее для подгруппового функтора θ функтор $\mathrm{sub}_\theta : G \mapsto \mathrm{sub}_\theta(G)$ будем обозначать sub_θ.

***Лемма* 2.2.** *Пусть θ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда θ-субнормальный подгрупповой функтор sub_θ является регулярным и транзитивным.*

Напомним, что непустое подмножество I решетки L называется *идеалом*, если из $x, y \in I$ и $z \le x$ всегда следует, что $\sup\{x, y\} \in I$ и $z \in I$.

***Лемма* 2.3.** *Множество*

$$\mathrm{SUB}(\mathfrak{S}) = \{\mathrm{sub}_\theta \mid \theta \in \mathrm{RT}(\mathfrak{S})\}$$

является подрешеткой и идеалом решетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$.

В дальнейшем через $\mathfrak{P}$ будем обозначать класс всех примитивных групп. Напомним, что группа называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Эта максимальная подгруппа называется *примитиватором* группы.

В [11] показано, что если G – разрешимая примитивная группа и M – ее примитиватор, то G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, которая дополняется подгруппой M. Кроме того, любой примитиватор группы G сопряжен с подгруппой M.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый (в том числе и пустой) подкласс класса $\mathfrak{P}$. Следуя [12], такой подкласс будем называть *примитивным классом*.

Обозначим через $Cl(\mathfrak{P})$ множество всех подклассов класса $\mathfrak{P}$. На этом множестве естественным образом введем отношение частичного порядка: $\mathfrak{X}_1 \le \mathfrak{X}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$. Тогда $Cl(\mathfrak{P})$ является полной решеткой, в которой

$$\sup\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2\} = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2, \quad \inf\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2\} = \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2.$$

Минимальным элементом (нулем) этой решетки является пустой класс $\varnothing$. В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает класс $\mathfrak{P}$. Понятно, что решетка $Cl(\mathfrak{P})$ является бесконечно дистрибутивной. Кроме того, любой элемент $\mathfrak{X} \in Cl(\mathfrak{P})$ обладает дополнением $\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{X}$. Поэтому решетка $Cl(\mathfrak{P})$ является булевой.

Если θ – ненулевой разрешимый регулярный транзитивный подгрупповой функтор, то через $\mathfrak{P}(\theta)$ обозначим класс всех тех примитивных групп A, у которых примитиваторы принадлежат $\theta(A)$. Если θ – нулевой функтор, то полагаем $\mathfrak{P}(\theta)=\varnothing$.

***Лемма* 2.4.** *Пусть $\theta\in \mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ и H – подгруппа группы G. Тогда и только тогда $H\in\theta(G)$, когда существует такая максимальная цепь*

$$H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=G,$$

что $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})\in\mathfrak{P}(\theta)$ для всех $i=1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Пусть $H\in\theta(G)$. Тогда ввиду определения θ-субнормального подгруппового функтора существует такая максимальная цепь $H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=G$, что $H_{i\text{-}1}\in\theta(H_i)$ для всех $i=1,2,\ldots,n.$ Так как подгрупповой функтор θ является регулярным, то примитиватор $H_{i-1}/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ примитивной группы $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ принадлежит $\theta(H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}))$. Это означает, что $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})\in\mathfrak{P}(\theta)$.

Пусть теперь существует такая максимальная цепь $H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=G,$ что $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})\in\mathfrak{P}(\theta)$ для всех $i=1,2,\ldots,n.$ Тогда из определения множества $\mathfrak{P}(\theta)$ следует, что подгруппа $H_{i-1}/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ принадлежит $\theta(H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}))$. Отсюда ввиду регулярности функтора θ следует, что $H_{i\text{-}1}\in\theta(H_i)$ для всех $i=1,2,\ldots,n.$ Так как подгрупповой функтор θ является транзитивным, то $H\in\theta(G)$. Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между решетками $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ и $Cl(\mathfrak{P})$.

***Теорема* 2.1.** *Отображение $F:\theta\to\mathfrak{P}(\theta)$, сопоставляющее каждому функтору $\theta\in\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ примитивный класс $\mathfrak{P}(\theta)$, является изоморфизмом решеток $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ и $Cl(\mathfrak{P})$.*

Доказательство. Пусть θ и τ – произвольные элементы из $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$. Тогда ввиду леммы 2.3 $\inf\{\theta,\tau\}=\theta\cap\tau\in\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ и $\sup\{\theta,\tau\}\in\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$. Отсюда на основании леммы 2.4 справедливы равенства $\mathfrak{P}(\theta\cap\tau)=\mathfrak{P}(\theta)\cap\mathfrak{P}(\tau)$ и

$$\mathfrak{P}(\sup\{\theta,\tau\})=$$
$$=\bigcap\{\mathfrak{P}(\alpha)\mid\alpha\in\mathrm{SUB}(\mathfrak{S}),\theta\le\alpha,\tau\le\alpha\}=$$
$$=\mathfrak{P}(\theta)\cup\mathfrak{P}(\tau).$$

Значит, $F(\inf\{\theta,\tau\})=\mathfrak{P}(\theta)\cap\mathfrak{P}(\tau)$ и $F(\sup\{\theta,\tau\})=\mathfrak{P}(\theta)\cup\mathfrak{P}(\tau)$. Так как отображение F является биекцией, то F – изоморфизм решеток $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ и $Cl(\mathfrak{P})$. Теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Решетка* $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ *является булевой.*

***Следствие* 2.2.** *Решетка* $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ *является атомной и коатомной.*

***Следствие* 2.3.** *Подгрупповой функтор θ является атомом решетки $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}(\theta)=(S)$ для некоторой примитивной группы S.*

***Следствие* 2.4.** *Подгрупповой функтор θ является коатомом решетки $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}(\theta)=\mathfrak{P}\setminus(S)$ для некоторой примитивной группы S.*

Теорема 2.1 в совокупности с леммой 2.4, по сути, определяют ясный алгоритм построения функторов из $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$. Для того, чтобы задать функтор $\theta\in\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ необходимо:

1) выделить класс $\mathfrak{X}$ всех примитивных групп, примитиваторы которых являются θ-подгруппами;

2) выделить в каждой группе G системы всех подгрупп H, для каждой из которых существует максимальная цепь $H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=G$ такая, что $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1})\in\mathfrak{X}$ для всех $i=1,2,\ldots,n$.

3 Связь решеток $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ *и* $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$

Очевидно, бинарное отношение $\Psi=\{(\theta,\tau)\mid\theta,\tau\in\mathrm{RT}(\mathfrak{S}),\mathrm{sub}_\theta=\mathrm{sub}_\tau\}$, определенное на решетке $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, а потому является эквивалентностью. Более того, простая проверка показывает, что эта эквивалентность является конгруэнцией, т. е. из $(\theta,\alpha)\in\Psi$ и $(\tau,\beta)\in\Psi$ следует, что $(\inf\{\theta,\tau\},\inf\{\alpha,\beta\})\in\Psi$ и $(\sup\{\theta,\tau\},\sup\{\alpha,\beta\})\in\Psi$. Поэтому классы $[\theta]=\{\alpha\mid(\alpha,\theta)\in\Psi\}$ конгруэнции Ψ образуют (в терминологии книги [13]) *допустимое разбиение* решетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ и формируют ее факторрешетку $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})/\Psi$.

Отметим, что каждый класс $[\theta]$ конгруэнции Ψ является выпуклой подрешеткой решетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ [10] (подрешетка I решетки L называется *выпуклой*, если для любых элементов $a,b\in I$, $c\in L$ отношение $a\le c\le b$ всегда влечет за собой $c\in I$). Минимальным элементом (нулем) класса $[\theta]$ является элемент sub_θ. Таким образом, множество $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ выступает в качестве своеобразной «платформы» решетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$, на которой расположены классы конгруэнции Ψ (рисунок 3.1). Все эти классы соприкасаются с $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ своими нулевыми элементами, т. е. для любого функтора θ из $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ имеет место равенство $[\theta]\cap\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})=\{\mathrm{sub}_\theta\}$.

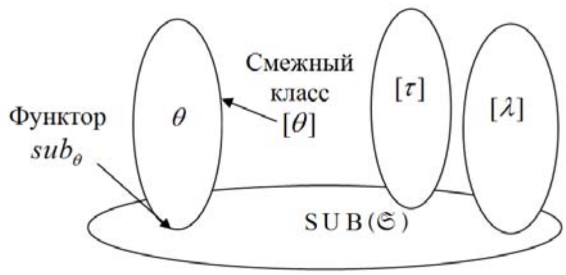

Рисунок 3.1 – Схема строения решетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$

Следующая теорема устанавливает связь между решетками $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$.

***Теорема* 3.1.** *Отображение, ставящее в соответствие каждому разрешимому регулярному транзитивному подгрупповому функтору* θ *индуцированный им* θ*-субнормальный подгрупповой функтор* sub_θ, *является эндоморфизмом решетки* $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ *на подрешетку* $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$. *Ядром этого эндоморфизма является конгруэнция*

$$\Psi = \{(\theta,\tau) \mid \theta,\tau \in \mathrm{RT}(\mathfrak{S}), \mathrm{sub}_\theta = \mathrm{sub}_\tau\}.$$

Доказательство. Пусть $\psi : \theta \to [\theta]$ – естественный гомоморфизм решетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ на факторрешетку $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})/\Psi$. Рассмотрим отображение $\omega : [\theta] \to \mathrm{sub}_\theta$, ставящее в соответствие каждому классу $[\theta]$ факторрешетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})/\Psi$ его минимальный элемент sub_θ. Простая проверка показывает, что ω – изоморфизм решеток $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})/\Psi$ и $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$. Тогда композиция $\omega \circ \psi : \theta \to [\theta] \to \mathrm{sub}_\theta$ отображений ω и ψ является искомым эндоморфизмом решетки $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ на подрешетку $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$ (см., например, [10, с. 198]). Остается лишь заметить, что $\Psi = \{(\theta,\tau) \mid \theta,\tau \in \mathrm{RT}(\mathfrak{S}), \mathrm{sub}_\theta = \mathrm{sub}_\tau\}$ – ядро этого эндоморфизма. Теорема доказана.

***Следствие* 3.1.** *Факторрешетка решетки* $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ *по конгруэнции* Ψ *изоморфна подрешетке* $\mathrm{SUB}(\mathfrak{S})$.

***Следствие* 3.2.** *Факторрешетка решетки* $\mathrm{RT}(\mathfrak{S})$ *по конгруэнции* Ψ *является булевой.*

Следуя Манну [14], подгруппу H группы G будем называть *X-нормальной*, если либо $H = G$, либо для любого эпиморфизма φ группы G такого, что $H^\varphi \neq G^\varphi$, в G^φ найдется собственная нормальная подгруппа, содержащая H^φ. Пусть θ – отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G множество всех ее X-нормальных подгрупп. Как отмечено в [14], θ является регулярным транзитивным подгрупповым функтором. Этот функтор будем называть *X-нормальным* и обозначать через Mann.

Отметим, что максимальная подгруппа разрешимой группы G является X-нормальной в G тогда и только тогда, когда она нормальна в G. Это означает, что $\mathrm{sub}_{\mathrm{Mann}} = \mathrm{sn}$, т. е. функторы sn и Mann попадают в один класс $[\mathrm{sn}] = [\mathrm{Mann}]$ по конгруэнции Ψ. При этом простые примеры показывают, что $\mathrm{Mann} \neq \mathrm{sn}$. Отметим еще, что $[\mathrm{sn}] = \{\theta \in \mathrm{RT}(\mathfrak{S}) \mid \mathrm{sn} \leq \theta \leq \mathrm{Mann}\}$, т. е. нулем класса $[\mathrm{sn}]$ является субнормальный подгрупповой функтор sn, а его единицей – функтор Mann, выделяющий в каждой группе все ее X-нормальные подгруппы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

2. *Carter*, *R.* The $\mathfrak{F}$-normalisers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

3. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, № 3. – S. 225–228.

4. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

5. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

6. *Каморников*, *С.Ф.* Критические группы наследственной локальной сверхрадикальной формации / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 66–75.

7. *Каморников*, *С.Ф.* Разрешимые гиперрадикальные формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 55–58.

8. *Каморников*, *С.Ф.* Сверхрадикальные формации / С.Ф. Каморников // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 62–70.

9. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.

10. *Общая алгебра*. Т. 2. / В.А. Артамонов [и др.]. – М.: Наука, 1991. – 480 с.

11. *Baer*, *R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

12. *Каморников*, *С.Ф.* Обобщенные подгруппы Фраттини как корадикалы групп / С.Ф. Каморников // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87, № 3. – С. 402–411.

13. *Скорняков*, *Л.А.* Элементы общей алгебры / Л.А. Скорняков. – М.: Наука, 1983. – 272 с.

14. *Mann*, *A.* On subgroups of finite soluble groups, III / A. Mann // Israel J. Math. – 1973. – Vol. 16, № 4. – P. 446–451.

Поступила в редакцию 10.09.14.