

Замкнутая сеть массового обслуживания с неактивными заявками и обходами

Ю.В. МАЛИНКОВСКИЙ, Л.Н. МАРЧЕНКО, Ю.С. БОЯРОВИЧ

Исследуется стационарное функционирование замкнутой сети массового обслуживания с неактивными заявками и обходами. Неактивные заявки находятся в очередях узлов и не обслуживаются. Предусматривается возможность перехода заявки из обычного состояния в неактивное и обратно. Длительности обслуживания заявок в узлах имеют показательное распределение. Устанавливается вид стационарного распределения вероятностей состояний сети.

Ключевые слова: замкнутая сеть массового обслуживания, неактивные заявки, обходы узлов, стационарное распределение вероятностей состояний.

Closed queueing network with non active customers and bypasses is considered. Non customers are in a system queue and do not get service. Customers can pass from non state into state, when they can get their service and vice versa. The form of stationary distribution is obtained.

Keywords: closed queueing network, non active customers, bypasses, stationary distribution.

Введение. В настоящее время в теории систем и сетей массового обслуживания достаточно актуальна проблема исследования надежности обслуживающих узлов. Однако стоит заметить, что не только обслуживающий узел может полностью или частично выходить из строя. По целому ряду причин могут терять свои качественные характеристики и поступающие в узлы сети заявки. В связи с этим все большее внимание исследователей привлекают сети массового обслуживания с временно неактивными заявками. Все заявки в таких сетях подразделяются на два класса. Первые (обыкновенные заявки) могут обслуживаться узлами, а вторые являются временно неактивными и не обслуживаются, скапливаясь в очередях узлов. Поступающие в сеть массового обслуживания потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного состояния переходить в состояние, когда они снова могут получать обслуживание, и, наоборот: из обыкновенного переходить в неактивное состояние. В большинстве случаев исследователей интересуют характеристики стационарного функционирования таких сетей массового обслуживания, в частности вид стационарного распределения вероятностей состояний сети. Следует отметить, что в последнее время появился ряд работ, посвященных исследованию вопроса инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания с временно неактивными заявками по отношению к функциональной форме распределения длительностей обслуживания.

Неактивные заявки можно интерпретировать как заявки, имеющие некоторый дефект, делающий их непригодными для обслуживания узлами сети массового обслуживания. Действительно, при передаче данных в информационно-телекоммуникационных сетях может, например, возникать ситуация, когда пересылаемая заявка становится непригодной для обслуживания в результате какой-либо поломки или сбоя в процессе ее пересылки. Такая заявка не удаляется из сети, а может сохраняться в очереди узла, в который она была направлена, для того, чтобы впоследствии быть либо восстановленной, либо замененной другой заявкой. Действительно, такие действия вполне логичны, если потеря заявки приведет к ощутимым финансовым или информационным потерям. Таким образом, результаты исследования стационарного функционирования сетей массового обслуживания с временно неактивными заявками могут представлять существенный интерес с прикладной точки зрения, поскольку такие модели позволяют адекватно описывать реальные информационно-телекоммуникационные сети.

Исследованию открытой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками посвящена работа [1], где устанавливается вид и условия существования стационарного распределения вероятностей состояний сети. В [2],[3] исследовано стационарное функционирование

сетей массового обслуживания с временно неактивными заявками, являющихся обобщением модели из [1] на случай произвольного распределения времени обслуживания заявок; устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределения длительностей обслуживания при фиксированных первых моментах.

В сетях Джексона стационарное распределение вероятностей состояний существует только при определенных соотношениях между параметрами, характеризующими сеть массового обслуживания. Когда стационарного распределения вероятностей состояний нет, заявки будут неограниченно долго ожидать своего обслуживания в очереди. В то же время на практике клиент, попавший в узел, сразу оценивает, сколько времени ему придется ожидать, сколько заявок находится в очереди, каково состояние сети в целом, и, в зависимости от проведенной оценки, либо остается ожидать и становится в очередь, либо переходит в следующий узел. Эти случаи можно описать моделью сети массового обслуживания с обходами. Такие модели, в том числе, возникают в ситуациях, когда накладываются ограничения на количество заявок в узлах или на предполагаемое время ожидания заявок в моменты их поступления в узлы сети.

Сети массового обслуживания с обходами заявками узлов впервые были рассмотрены Ю.В. Малинковским [4]. В таких сетях заявка, поступающая в некоторый узел, с некоторой вероятностью, зависящей от состояния этого узла или всей сети, может присоединиться к очереди и ожидать своего обслуживания, или мгновенно обойти узел и двигаться далее согласно некоторой матрице маршрутизации. В указанной работе было установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний таких сетей имеет мультипликативную форму.

Модификации сетей массового обслуживания с обходами заявок узлов и выходные потоки заявок в таких сетях были рассмотрены в работах [5], [6]. В работе [7] рассматриваются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с обходами заявок узлов, для которых устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания при фиксированных первых моментах.

В настоящей работе исследуется замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с неактивными заявками и обходами. Устанавливается вид стационарного распределения вероятностей сети.

Замкнутая сеть с неактивными заявками и обходами. Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \dots, N\}$. Предполагается, что в сети циркулируют M заявок. Все заявки в сети подразделяются на два класса: класс обыкновенных заявок, и класс временно неактивных заявок. Обыкновенные заявки могут получать обслуживание. Неактивные заявки получать обслуживание не могут и скапливаются в очередях обслуживающих узлов.

В узлы рассматриваемой сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями v_i и ϕ_i , $i \in J$. Поступивший в i узел с интенсивностью v_i сигнал уменьшает число обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу число неактивных. В случае отсутствия в i -м узле обыкновенных заявок, информационный сигнал покидает сеть, не оказывая на нее никакого воздействия. Поступивший в i узел с интенсивностью ϕ_i сигнал уменьшает на единицу число неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i -м узле обыкновенных заявок, информационный сигнал покидает сеть, не оказывая на нее никакого воздействия ($i \in J$).

Обслуживание в узлах – экспоненциальное с параметром μ_i , $i \in J$. Заявка, обслуженная в узле i , с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в узел j как обыкновенная заявка,

$\left(\sum_{j \in J} p_{i,j} = 1 \right)$. Не ограничивая общности рассуждений, для простоты договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой.

Состояние сети характеризуется вектором $z(t) = ((z_1(t), z_1'(t)), \dots, (z_N(t), z_N'(t)))$, где $z_i(t)$ и $z_i'(t)$ – количество обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i -м узле в момент времени t ($i \in J$).

Поступающая в узел $i \in J$ заявка, с вероятностью $f_i(z_i + z_i')$ присоединяется к очереди узла, а с дополнительной вероятностью $1 - f_i(z_i + z_i')$ мгновенно обходит узел и ведет себя в дальнейшем как обслуженная, двигаясь дальше в соответствии с вышеописанной матрицей маршрутизации.

Таким образом, с параметрами сети, описанными выше, $z(t)$ – марковский процесс с непрерывным временем и конечным пространством состояний $Z = \left\{ (z_1, z_1'), \dots, (z_N, z_N') \mid z_i, z_i' \geq 0, i \in J, \sum_{i \in J} (z_i + z_i') = M \right\}$.

Теорема 2.1. Процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z), z \in Z\}$ имеет вид

$$p(z) = \frac{1}{G(M, N)} p_1(z_1, z_1') \dots p_N(z_N, z_N'), z \in Z, \quad (2.1)$$

где

$$p_i(z_i, z_i') = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \right)^{z_i} \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \phi_i} \right)^{z_i'} \prod_{l=1}^{z_i + z_i'} f_i(l-1), i \in J. \quad (2.2)$$

здесь ε_i – единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение системы уравнений трафика

$$\varepsilon_i = \sum_{j \in J} \varepsilon_j p_{j,i}, i \in J. \quad (2.3)$$

Нормирующая константа $G(M, N)$ находится из условия $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$:

$$G(M, N) = \sum_{z \in Z} \prod_{i \in J} \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \right)^{z_i} \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \phi_i} \right)^{z_i'} \prod_{l=1}^{z_i + z_i'} f_i(l-1).$$

Доказательство. В работе [8] показано, что однородная система линейных уравнений трафика (2.3) имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение.

Пусть рассматриваемая замкнутая сеть массового обслуживания характеризуется вектором z непосредственно после момента направления заявки в i -й узел (т.е. без учета этой заявки), обозначим тогда $\psi_{i,j}(z)$ – условную вероятность того, что заявка, направленная в узел i , впервые будет обслужена узлом j , ($z_1 + \dots + z_N = M - 1, i, j \in J$).

Для случая, когда сеть находится в состоянии z непосредственно перед моментом окончания обслуживания заявки i -м узлом, обозначим $\beta_{i,j}(z)$ – условную вероятность того, что заявка, обслуженная узлом i , впервые будет обслужена узлом j ($z_1 + \dots + z_N = M, i, j \in J$).

По формуле полной вероятности

$$\psi_{i,k}(z) = f_i(z_i + z_i') \delta_{i,k} + (1 - f_i(z_i + z_i')) \sum_{l=1}^N p_{i,l} \psi_{l,k}(z); \quad (2.4)$$

$$z = (z_1, \dots, z_N), z_1 + \dots + z_N = M - 1, i, k \in J;$$

$$\beta_{i,j}(z) = \sum_{k=1}^N p_{i,k} \psi_{k,j}(z - e_i); \quad (2.5)$$

$$z = (z_1, \dots, z_N), z_1 + \dots + z_N = M, i, j \in J.$$

Здесь $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера.

В работе [6] показано, что если матрица маршрутизации для сети $(p_{i,j}, i, j \in J)$ неприводима, то при каждом фиксированном z соотношения (2.4) и (2.5) однозначно определяют вероятности $\psi_{i,j}(z)$ и $\beta_{i,j}(z)$ ($i, j \in J$).

Эргодичность очевидна. Таким образом, стационарное распределение вероятностей состояний рассматриваемой сети массового обслуживания существует и является единственным. Система уравнений глобального равновесия для стационарных вероятностей $\{p(z), z \in Z\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J} (\mu_i (1 - \beta_{i,i}(z)) I_{I_i > 0} + \varphi_i I_{n_i' > 0} + v_i I_{n_i > 0}) p(z) = \\ & = \sum_{i \in J} (p(z - e_i + e_i') \varphi_i I_{n_i > 0} + p(z + e_i - e_i') v_i I_{n_i' > 0} + \\ & + \sum_{j \in J} p(z + e_j - e_i) \mu_j \beta_{j,i}(z + e_j - e_i) I_{n_j > 0}), z \in Z. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Заметим, что с такими интенсивностями переходов марковский процесс, описывающий сеть, является обратимым.

Разобьем (2.6) на уравнения локального равновесия:

$$\varphi_i I_{n_i' > 0} p(z) = p(z + e_i - e_i') v_i I_{n_i > 0}; \quad (2.7)$$

$$v_i I_{n_i > 0} p(z) = p(z - e_i + e_i') \varphi_i I_{n_i' > 0}; \quad (2.8)$$

$$\mu_i (1 - \beta_{i,i}(z)) I_{n_i > 0} p(z) = \sum_{j \in J, j \neq i} p(z + e_j - e_i) \mu_j \beta_{j,i}(z + e_j - e_i) I_{n_j > 0}, i \in J. \quad (2.9)$$

Подставляя стационарные вероятности $\{p(z), z \in Z\}$, определенные по формулам (2.1), (2.2), в уравнения (2.7), (2.8), в результате элементарных преобразований доказываем справедливость соотношения (2.7).

Проверим, что (2.1), (2.2) удовлетворяют соотношениям (2.9). Из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что выполняется следующее равенство

$$\beta_{k,i}(z + e_k) = p_{k,i} f_i(z_i + z_i') + \sum_{l=1}^N p_{k,l} (1 - f_l(z_l + z_l')) \beta_{l,i}(z + e_l).$$

Заменяя в последнем равенстве z на $z - e_i$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1, l \neq i}^N p_{k,l} (1 - f_l(z_l + z_l')) \beta_{l,i}(z + e_l - e_i) = \beta_{k,i}(z + e_k - e_i) - p_{k,i} \beta_{i,i}(z) - \\ & - p_{k,i} f_i(z_i + z_i' - 1) (1 - \beta_{i,i}(z)). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения с учетом системы уравнений трафика (2.3), доказываем справедливость (2.9).

Таким образом, стационарное распределение вероятностей состояний сети определяется по формулам (2.1), (2.2).

Теорема доказана.

Заключение. Исследовано стационарное функционирование замкнутой сети массового обслуживания с неактивными заявками и обходами заявками узлов. Неактивные заявки скапливались в очередях узлов и не могли получать обслуживание. Состояние рассматриваемой сети массового обслуживания описывалось набором, характеризующих количество обыкновенных и неактивных заявок в каждом из узлов сети. Вероятности обходов узлов заявками зависели от суммарного количества обыкновенных и неактивных заявок в каждом из этих узлов. Для заявок предусматривалась возможность перехода из обыкновенного состояния во временно неактивное и обратно за счет поступления в узлы сети пуассоновских потоков информационных сигналов. Длительности обслуживания заявок в узлах имели показательное распределение. Для рассмотренной сети массового обслуживания были составлены системы уравнений глобального и локального равновесия, показано, что система уравнений трафика имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение, установлен вид стационарного распределения вероятностей состояний. Следует отметить,

что в случае открытой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками и обходами заявок узлов результат будет аналогичен и при выполнении условий эргодичности стационарное распределение вероятностей состояний сети может быть найдено в мультипликативной форме.

Литература

1. Tsitsiashvili, G.Sh. Distributions in stochastic network models / Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. – New York : Nova Science Publishers, Incorporated, 2008. – 75 p.
2. Боярович, Ю.С. Инвариантность стационарного распределения состояний открытой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками / Ю.С. Боярович, Ю.В. Малинковский // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 4. – С. 46–55.
3. Боярович, Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками / Ю.С. Боярович // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 10. – С. 32–41.
4. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками/ Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 2. – С. 102–110.
5. Малинковский, Ю. В. Выходные потоки в модифицированных сетях Джексона/ Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 9. – С. 134–138.
6. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками/ Ю.В. Малинковский, О.В. Якубович // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 1. – С. 92–106.
7. Малинковский, Ю. В. Инвариантность стационарного распределения состояний сетей модифицированных сетей Джексона и Гордона-Ньюэлла / Ю.В. Малинковский, О.В. Якубович // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 9. – С. 29–36.
8. Gordon, W.J. Closed queueing networks with exponential servers/ W.J. Gordon, G.F. Newell // Oper. Res. – 1967. – No 15. – P. 252–267.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 04.11.2013