Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

О представлении функций дробными интегралами Вейля

А.П. Старовойтов

Найдены достаточные условия представления функции дробными интегралами Вейля. Эти условия формулируются в терминах наилучших рациональных приближений.
Ключевые слова: наилучшие рациональные приближения, дробные интегралы Вейля, свертка функций, пространства Харди-Соболева, дробная производная функции.

We obtain sufficient conditions for representation of functions by fractional integrals of Weyl. These conditions are stated in terms of the best rational approximations.
Keywords: the best rational approximations, Weyl fractional integrals, convolution of functions, Hardy-Sobolev spaces, fractional derivative of function.

Введение. Обозначим через $L_p^{2\pi}$, $1 \le p < +\infty$ нормированное пространство вещественных 2π-периодических функций f, интегрируемых по Лебегу в p-ой степени с обычной нормой:

$$\|f\|_{L_p^{2\pi}} := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

Если $f \in L_p^{2\pi}$, то через $R_n(f, L_p^{2\pi})$ обозначим наилучшие приближения f в $L_p^{2\pi}$ тригонометрическими рациональными функциями r степени не выше n, т.е.

$$R_n(f, L_p^{2\pi}) := \inf_{deg\, r \le n} \|f\|_{L_p^{2\pi}}.$$

Для функций $G \in L_1^{2\pi}$ и $h \in L_1^{2\pi}$ определим свертку

$$(G * h)(x) = \int_0^{2\pi} G(x-t)h(t)dt$$

и при $\alpha > 0$ рассмотрим классы функций

$$W_{\pm}^{\alpha} L_p^{2\pi} := \left\{ D_{\pm}^{(\alpha)} * h : h \in L_p^{2\pi} \right\},$$

где

$$D_{\pm}^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}} \text{ – ядро Вейля.}$$

Учитывая обозначения монографии [1], будем писать $f = I_{\pm}^{(\alpha)} h := D_{\pm}^{(\alpha)} * h$, называя f интегралом дробного порядка α от h в смысле Вейля, а h – дробной производной функции f в смысле Вейля.

Хорошо известно, что при $\alpha > 1/p$ функция $f \in W_{\pm}^{\alpha} L_p^{2\pi}$ является непрерывной. В случае, когда $0 < \alpha < 1/p$, поведение дробных интегралов Вейля описывается теоремами, известными под названием теорем Харди-Литтлвуда с предельным показателем [1], [2]: если $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1-\alpha p)$, то найдется такая постоянная $c(\alpha, p)$, зависящая только от α и p, что

$$\| I_{\pm}^{(\alpha)} h \|_{L_q^{2\pi}} \le c(\alpha, p) \| h \|_{L_p^{2\pi}}.$$

Если предположить, что $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$, то [1, с. 271]

$$I_{+}^{(\alpha)}\left(L_p^{2\pi}\right) = I_{-}^{(\alpha)}\left(L_p^{2\pi}\right).$$

Поэтому для таких значений α и p классы функций $W_{+}^{\alpha} L_p^{2\pi}$ и $W_{-}^{\alpha} L_p^{2\pi}$ совпадают. В этой связи при данных ограничениях будем рассматривать только классы функций $W^{\alpha} L_p^{2\pi} := W_{+}^{\alpha} L_p^{2\pi}$, опуская в обозначениях знак "+".

Следующая теорема была доказана в [3].

Теорема 1. *Пусть* $f \in W^{\alpha} L_p^{2\pi}$ *и* $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$. *Тогда при* $q = p/(1-\alpha p)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha} R_n(f, L_q^{2\pi}) \right)^{\max\{2,\, p\}} < c_1(\alpha, p) \,,$$

где постоянная $c_1(\alpha, p)$ *зависит только от* α *и* p.

Теорема 1 является прямой теоремой рациональной аппроксимации. В частности, из неё следует, что если $f \in W^{\alpha} L_p^{2\pi}$, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1-\alpha p)$, то

$$R_n(f, L_q^{2\pi}) = o\left(1/n^{\alpha}\right).$$

Здесь и далее запись $\alpha_n = o(\beta_n)$ означает, что для бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n / \beta_n = 0$.

В теории дробного интегрирования важной является задача нахождения таких условий на функцию $f \in L_q^{2\pi}$, при которых её можно представить в виде дробного интеграла Вейля от некоторой функции из $L_p^{2\pi}$. Обзор результатов в этом направлении исследований имеется, например, в известных монографиях [1], [2]. В формулировках такого рода результатов в [1], [2] достаточное условие принадлежности функции f некоторому классу $W^{\alpha} L_p^{2\pi}$ записывается либо в терминах интегрального модуля непрерывности, либо в терминах усеченных дробных производных этой функции. Следующую обратную теорему рациональной аппроксимации – основной результат данной статьи – можно рассматривать как новое утверждение такого рода. В ней достаточное условие представления функции дробным интегралом Вейля формулируется в терминах её наилучших рациональных приближений.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_q^{2\pi}$, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ *и* $q = p/(1-\alpha p)$. *Тогда, если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha} R_n(f, L_q^{2\pi}) \right)^{\min\{2,\, p\}}$$

сходится, то существует такая функция $h \in L_p^{2\pi}$, *что* $f = I^{(\alpha)} h$.

Заметим, что, когда речь идет о функциях из $L_q[0, 2\pi]$, равенство $f = I^{(\alpha)} h$ понимается в том смысле, что f и $I^{(\alpha)} h$ равны почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$.

Пространства Харди-Соболева. Доказательство теоремы 2 опирается на ряд результатов из теории пространств Харди-Соболева. Для формулировок этих результатов введем необходимые понятия. В комплексной плоскости рассмотрим единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$ и обозначим через $A(D)$ множество всех аналитических в D функций. Через $H_p = H_p(D)$, $0 < p < \infty$ обозначим пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(D)$, для которых конечна квазинорма

$$\| f \|_{H_p} := \sup_{0<\rho<1} \| f(\cdot \rho) \|_{p,T} \,,$$

где $T = \{z : |z| = 1\}$ — единичная окружность, а

$$\| f \|_{p,T} := \left(\int_T | f(z) |^p \, |dz| \right)^{1/p}.$$

Пусть функция $f \in A(D)$ представима в D степенным рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k z^k, \quad z \in D.$$

Тогда при $\alpha > 0$ функции

$$f^{(\alpha)}(z) := \sum_{k=[\alpha]}^{\infty} \frac{\Gamma(k - [\alpha] + 1 + \alpha)}{\Gamma(k - [\alpha] + 1)} \hat{f}_k z^{k-[\alpha]}, \quad z \in D$$

$$\left(J^{\alpha} f\right)(z) := \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\alpha}\ \hat{f}_k\ z^k\,,\quad z\in D$$

будем называть соответственно производными Римана-Лиувилля и Вейля порядка α функции f. Очевидно, что если $\alpha = l$ — натуральное число, то $f^{(\alpha)}$ совпадает с обычной производной l-го порядка функции f. Функцию $J^{\alpha} f$ будем рассматривать и при $\alpha < 0$. В этом случае ее будем называть интегралом от f порядка $-\alpha$ в смысле Вейля.

Определение. *Последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *называется мультипликатором в* H_p, *если для любой функции* $f \in H_p$ *имеем*

$$\|g\|_{H_p} \le c\|f\|_{H_p}\,,$$

где $c > 0$ *и не зависит от функции* f*, а*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k\ \hat{f}_k z^k\,.$$

Следующая лемма о мультипликаторах доказана в [4].

Лемма 1. *Пусть* γ *и* $\beta > 0$. *Тогда последовательности*

$$\lambda_k = \lambda_k\left(\gamma,\beta\right) = \frac{\Gamma\left(k+\gamma+\beta\right)}{(k+1)^{\beta}\,\Gamma(k+\gamma)},\quad \mu_k = \mu_k\left(\gamma,\beta\right) = \frac{1}{\lambda_k},\quad k = 0,1,2,\ldots$$

являются мультипликаторами в пространствах H_p, $0 < p < \infty$.

Из леммы 1, в частности, следует, что если функция $f \in A(D)$ имеет производную в смысле Вейля $J^{\alpha} f$, принадлежащую H_p, то производная Римана-Лиувилля $f^{(\alpha)}$ также принадлежит H_p. Наоборот, из того, что $f^{(\alpha)} \in H_p$, следует, что $J^{\alpha} f \in H_p$.

Определим пространства Харди-Соболева:

$$H_{\mathrm{p}}^{\alpha} = H_{\mathrm{p}}^{\alpha}(\mathrm{D}) := \left\{ f \in A(D) : \|f\|_{H_{\mathrm{p}}^{\alpha}} < \infty \right\},\ \alpha > 0,\ 0 < p \le \infty\ ,$$

полагая, что квазинорма $\|\cdot\|_{H_{\mathrm{p}}^{\alpha}}$ определяется равенством $\|f\|_{H_{\mathrm{p}}^{\alpha}} := \|f^{(\alpha)}\|_{H_{\mathrm{p}}}$. Для функции $f \in H_p$ обозначим через $R_n(f, H_p)$ наилучшие приближения f в H_p рациональными функциями r степени не выше n, т. е.

$$R_{\mathrm{n}}\left(f, H_{\mathrm{p}}\right) := \inf_{\deg r \le n} \|f - r\|_{H_{\mathrm{p}}}\,,\quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Введем в рассмотрение аппроксимационные пространства Я. Петре и Г. Спарра [5] функций из H_p:

$$R_{\mathrm{p,q}}^{\alpha} := \left\{ f \in H_{\mathrm{p}} : \|f\|_{R_{\mathrm{p,q}}^{\alpha}} < \infty \right\},\quad \alpha > 0;\ \ p,q \in (0,\infty),$$

где

$$\|f\|_{R_{\mathrm{p,q}}^{\alpha}} := \|f\|_{H_{\mathrm{p}}} + \left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \left(2^{\mathrm{k}\,\alpha} R_{2^{\mathrm{k}}}(f, H_{\mathrm{p}}) \right)^{\mathrm{q}} \right)^{1/\mathrm{q}}.$$

А.А. Пекарский установил [6], [7], что при $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1/p$ и $q = p/(1-\alpha p)$ имеют место непрерывные вложения

$$R_{q,\min\{2,p\}}^{\alpha} \subset H_p^{\alpha} \subset R_{q,\max\{2,p\}}^{\alpha}\,. \qquad (1)$$

Напомним, что если X и Y два квазинормированные пространства, то непрерывность вложения $X \subset Y$ означает, что из того, что $g \in X$ следует, что $g \in Y$ и $\|g\|_{\mathrm{Y}} \le \mathrm{c}\|g\|_{\mathrm{X}}$, где $c > 0$ и не зависит от g.

Доказательство теоремы 2. Начнем с доказательства нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма 2 (Коши, [8, с. 21],. *Если числовая последовательность* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не возрастает и сходится к нулю (*$u_n \downarrow 0$*), то ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\delta > 0$. *Если* $a_n \downarrow 0$, *то из сходимости одного из рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n\alpha} a_{2^n}\right)^{\delta} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(n^{\alpha} a_n\right)^{\delta}$$

следует сходимость другого ряда.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$u_n = \frac{1}{n}\left(n^{\alpha} a_n\right)^{\delta}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Если предположить, что $u_n \downarrow 0$, то, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n\alpha} a_{2^n}\right)^{\delta},$$

утверждение леммы следует из теоремы Коши. Наше предположение может быть неверно только тогда, когда $\alpha\delta > 1$. В этом случае, в силу монотонности последовательности a_n, при любом k

$$12^{\alpha\delta} \; 2^k u_{2^k} \le \sum_{s=2^{k-1}+1}^{2^k} u_s \le 2^{\alpha\delta-1} \, 2^{k-1} u_{2^{k-1}},$$

и остается заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=2^{k-1}+1}^{2^k} u_s .$$

Лемма 3 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

Пусть $f \in L_q^{2\pi}$, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$, $q = p/(1-\alpha p)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(n^{\alpha} R_n(f, L_q^{2\pi})\right)^{\min\{2,\, p\}} < +\infty. \tag{2}$$

При наших предположениях сопряженная функция $\tilde{f} \in L_q^{2\pi}$, и имеет место неравенство Рисса [8, с. 566]:

$$\|\tilde{f}\|_{L_q^{2\pi}} \le c(q) \|f\|_{L_q^{2\pi}} .$$

Обозначим через r_n тригонометрическую рациональную функцию (р.ф.) степени не выше n с действительными коэффициентами, для которой

$$\|f - r_n\|_{L_q^{2\pi}} = R_n(f, L_q^{2\pi}).$$

Известно [9], что сопряженная функция $\tilde{r}_n$ также является рациональной, а ее знаменатель совпадает со знаменателем r_n. Из неравенства Рисса следует, что

$$\|\tilde{f} - \tilde{r}_n\|_{L_q^{2\pi}} \le c(q) \|f - r_n\|_{L_q^{2\pi}} = c(q) R_n(f, L_q^{2\pi}).$$

При $z = e^{ix}$ рассмотрим функции

$$g(z) = g(e^{ix}) := f(x) + i\,\tilde{f}(x),$$
$$r(z) = r(e^{ix}) := r_n(x) + i\,\tilde{r}_n(x).$$

Так как $\cos x = (z + z^{-1})/2$, а $\sin x = (z - z^{-1})/2i$, то r относительно переменной z является р.ф. степени не выше $2n$. Тогда очевидно, что $g \in L_q(T)$,

$$\|g - r\|_{L_q(T)} \le c_1(q) R_n(f, L_q^{2\pi})$$

и, следовательно,

$$R_{2n}(g, L_q(T)) \le c_1(q) R_n(f, L_q^{2\pi}).$$

Пусть $G(z)$ есть интеграл Коши с плотностью $g(z)$, т. е.

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g(\xi)\,d\xi}{\xi - z}, \quad |z|<1.$$

Функция G почти для всех $\xi \in T$ имеет некасательные предельные значения, которые совпадают с $g(\xi)$ и $G \in H_q$. Согласно неравенству А. А. Пекарского [10],

$$R_n(G, H_q) \le c_2(q)\, R_n(g, L_q(T)), \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Поэтому, применяя во внимание (2) и лемму 3, будем иметь, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}\, R_{2^k}(G, H_p)\right)^{\min\{2,\,p\}} < +\infty .$$

Учитывая теперь левое вложение в (1) и лемму 1 о мультипликаторах, видим, что функция $h(z) := \left(J^{\alpha}G\right)(z)$, $z \in D$ принадлежит пространству H_p. Представим h в D степенным рядом, т. е.

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{h}_k\, z^k, \quad z \in D,$$

где

$$\hat{h}_k = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{h(\xi)\,d\xi}{\xi^{k+1}}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

а $h(\xi)$ при $\xi \in T$ является некасательным предельным значением h. Не ограничивая общности, будем считать, что $\hat{h}_0 = 0$. В противном случае вместо h следует рассмотреть функцию $h - \hat{h}_0$. Очевидно, что

$$G(z) = \left(J^{-\alpha}h\right)(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hat{h}_k}{(k+1)^{\alpha}}\, z^k, \quad z \in D.$$

Из определения функций G и g следует, что п.в.

$$f(x) = Re\, G(e^{ix}) = Re\, g(e^{ix}).$$

Пусть

$$h(e^{ix}) = Re\, h(e^{ix}) + i\, Im\, h(e^{ix}) =: u(x) + i\, v(x).$$

Тогда $u, v \in L_p^{2\pi}$ и функция u представима в $L_p^{2\pi}$ своим рядом Фурье, а именно,

$$u(x) = {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{\hat{h}_k}{2}\, e^{ikx}, \tag{3}$$

где $\hat{h}_{-k} = \overline{\hat{h}_k}$, $k = 1,2,\ldots$, а штрих в знаке суммирования означает, что $\hat{h}_0 = 0$. Аналогично, функция f представима в $L_q^{2\pi}$ своим рядом Фурье, т. *е.*

$$f(x) = {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{\hat{h}_k}{2(|k|+1)^{\alpha}}\, e^{ikx}. \tag{4}$$

Учитывая равенство (4) и другое, эквивалентное исходному, определение дробного интеграла Вейля [1, с. 264], получим, что $f = I^{(\alpha)}u^*$, где u^* определяется равенством

$$u^*(x) = {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \left(\frac{ik}{|k|+1}\right)^{\alpha} \frac{\hat{h}_k}{2}\, e^{ikx}.$$

Поскольку $u \in L_p^{2\pi}$ и выполняется равенство (3), а из теоремы Марцинкевича [11, с. 82] следует, что последовательность $\lambda_k = (ik)^{\alpha} / (|k|+1)^{\alpha}$ является мультипликатором Фурье в пространстве $L_p^{2\pi}$, то $u^* \in L_p^{2\pi}$. Остается заметить, что u^* является вещественнозначной функцией. Это следует из равенств

$$(ik)^{\alpha} = |k|^{\alpha}\, e^{\alpha\pi i 2\, sign k}, \; \hat{h}_{-k} = \overline{\hat{h}_k}, \; k = 1,2,\ldots.$$

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.

3. Старовойтов, А.П. Рациональные приближения дробных интегралов Римана-Лиувилля и Вейля / А.П. Старовойтов // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 3. – С. 428–441.

4. Пекарский, А.А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации/ А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124, № 4. – С. 571–588.

5. Peetre, J. Interpolation of normed Abelian groups/ J. Peetre, G. Sparr // Ann. Mat. Pura Appl. – 1972. – V. 92. – P. 217 – 262.

6. Пекарский, А.А. Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1985. – Т. 127, № 1. – С. 3 – 20.

7. Пекарский, А.А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1987. – Т. 133 (175), № 1 (5). – С. 86–102.

8. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М. : Физматгиз, 1961. – 936 с.

9. Русак, В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. – Минск : БГУ, 1979. – 174 с.

10. Пекарский, А.А. Рациональные и кусочно-полиномиальные приближения в пространствах L_p и H_p / А.А. Пекарский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, серыя фізіка-матэматычных навук. – 2000. – № 3. – С. 11–16.

11. Тихомиров, В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М.Тихомиров. – М. : МГУ, 1976. – 304 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 22.10.2013