МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О РЕЗУЛЬТАТАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРОЩЕННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В ПЛОСКОСТИ

А.Т. Сазонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ON THE RESULTS OF THE STUDY OF SIMPLIFIED SYSTEMS IN THE PROBLEM OF MOTION OF FOUR BODIES IN A PLANE

A.T. Sazonova

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Рассматривается система, описывающая движение четырех тел в плоскости. С помощью метода малого параметра установлены упрощенные системы, состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Для данных систем указаны наборы констант межчастичного взаимодействия, при которых все ее решения являются мероморфными функциями.

Ключевые слова: *движение четырех тел в плоскости, константа взаимодействия, упрощенная система, мероморфная функция.*

The system describing the motion of four bodies in a plane is considered. The method of the small parameter of a simplified system consisting of non-linear differential equations, each of which has a second order is determined. For these systems, a set of interparticle interaction constants in which all its solutions of the system are meromorphic functions is specified.

Keywords: *motion of four bodies in a plane, interaction constant, simple system, meromorphic function.*

Введение

Работы [1]–[5] посвящены исследованиям проблемы движения многих тел в плоскости. В них отображены и проанализированы (аналитически и численно) различные решения ограниченной плоской задачи многих тел. Для удобства рассмотрения математической модели движения многих тел в работе [2] физическая плоскость отождествляется с комплексной плоскостью. Тогда уравнения движения в плоскости становятся уравнениями движения N точек в комплексной ξ – плоскости и сводятся к системе [2], [3], состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi_n'' = 2\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N} a_{nm}\frac{\xi_n'\xi_m'}{\xi_n-\xi_m},\ \ n=1,\dots,N.$$

Зависимые переменные $\xi_n = \xi_n(\tau)$ являются комплексными. Константы межчастичного взаимодействия подчинены требованиям симметрии $a_{nm} = a_{mn}$. При отождествлении комплексной ξ-плоскости с физической плоскостью [2], [3] движение N точек ξ_n соответствует решению ограниченной задачи многих тел в плоскости.

1 Постановка задачи

Из исходной системы видно [2], [3], что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$,

$$Z = \frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}{4},$$

движется равномерно:

$$Z'' = 0,$$

$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau,$$

где V – произвольная постоянная.

В дальнейшем будем предполагать

$$a_{12}=a_{21}=a,\ a_{13}=a_{31}=c,\ a_{14}=a_{41}=d,$$

$$a_{23}=a_{32}=b,\ a_{24}=a_{42}=e,\ a_{34}=a_{43}=f.$$

Существует также интеграл движения (что непосредственно следует из [1]):

$$K = \xi_1'\xi_2'\xi_3'\xi_4'(\xi_1-\xi_2)^{2a}(\xi_2-\xi_3)^{2b}(\xi_3-\xi_1)^{2c}\times$$
$$\times(\xi_4-\xi_1)^{2d}(\xi_2-\xi_4)^{2e}(\xi_3-\xi_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс

$$u_n = \xi_n - Z,\ \ n=1,2,3,4,$$

чтобы выполнялось условие $u_1+u_2+u_3+u_4=0$.

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x,$$

$$u_2 = y,$$

$$u_3 = z,$$

$$u_4 = -x-y-z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения и интеграл движения в терминах переменных x, y, z:

$$\ddot{x} = 2a\frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c\frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} -$$
$$-2d\frac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{2x+y+z},$$

$$\ddot{y} = -2a\frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b\frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - $$
$$-2e\frac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+2y+z}, \qquad (1.1)$$
$$\ddot{z} = -2c\frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b\frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - $$
$$-2f\frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+y+2z},$$
$$K = (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)\times$$
$$\times(x-y)^{2a}(y-z)^{2b}\times(z-x)^{2c}\times$$
$$\times(2x+y+z)^{2d}(x+2y+z)^{2e}(x+y+2z)^{2f},$$

где $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t = \tau - \tau_0,\ V, K,\ \tau_0$ – произвольные постоянные.

Согласно [4] справедливо утверждение: для наличия у системы (1.1) мероморфного решения необходимо, чтобы все постоянные $\Gamma, \gamma_n, \beta_n$, $n = \overline{1,6}$, определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений

$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},$$
$$\gamma_n = \frac{1}{1+a_n}, \qquad (1.2)$$
$$\beta_n = -2a_n,\ a_n \in \{a,b,c,d,e,f\},$$
$$n = 1,\dots,N.$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

Нетрудно выделить все значения констант взаимодействия, принадлежащие к определенной выше категории: для целочисленности показателей γ_n необходимо $a_n \in [-2;0]$, а для целочисленности β_n константы взаимодействия должны быть сами целочисленными или полуцелочисленными.

В данной работе рассматриваются упрощенные системы для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.1), описывающей движении четырех тел в плоскости.

Целью исследования является установление необходимых и достаточных условий для того, чтобы все решения упрощенных систем являлись мероморфными функциями. Заметим, что упрощенные системы ранее были рассмотрены в работах [6]–[8], однако, наборы, полученные в данных работах, целесообразно дополнить случаями, когда одна либо две константы взаимодействия не равны нулю.

2 Необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости являлись мероморфными функциями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\ddot{x} = 2a\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d\frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y},$$
$$\ddot{y} = -2a\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e\frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y}, \qquad (2.1)$$
$$\ddot{z} = -2c\frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b\frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - $$
$$-2f\frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y},$$

которая является инвариантной относительно замены переменных (t, x, y, z) на $(\varepsilon t, x, y, \varepsilon z)$, ε – параметр, а значит, является упрощенной для системы (1.1).

Опираясь на результаты, полученные в работах [6], [7], с учетом соотношений (1.2), заключаем о справедливости следующей теоремы.

***Теорема* 2.1.** Для того, чтобы все решения системы (2.1) являлись мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы при выборе чисел $b, c, f \in \{-2; -1.5; -1; -0.5; 0\}$ постоянная Γ была целочисленной или бесконечной, и выполнялись условия:

1) $a = 0,\ d = e = -0.5,\ \Gamma = \dfrac{2}{1+b+c+f}$;

2) $a = 0,\ d = e = -1,\ \Gamma = \dfrac{2}{b+c+f}$;

3) $a = 0,\ d = e = -2,\ \Gamma = \dfrac{2}{-2+b+c+f}$;

4) $a = 0, e = -0.5, d = -1.5,\ \Gamma = \dfrac{2}{b+c+f}$;

5) $a = e = -0.5, d = -2,\ \Gamma = \dfrac{2}{-1+b+c+f}$;

6) $a = e = -0.5, d = -1.5,\ \Gamma = \dfrac{2}{-0.5+b+c+f}$;

7) $a = e = -0.5, d = -1,\ \Gamma = \dfrac{2}{b+c+f}$;

8) $a = e = d = -0.5,\ \Gamma = \dfrac{2}{0.5+b+c+f}$;

9) $a = e = -0.5, d = 0,\ \Gamma = \dfrac{2}{1+b+c+f}$;

10) $a = d = -0.5, e = 0,\ \Gamma = \dfrac{2}{1+b+c+f}$;

11) $a = d = e = -1,\ \Gamma = \dfrac{2}{-1+b+c+f}$;

12) $a = -0.5,\ d = e = 0,\ \Gamma = \dfrac{4}{3+b+c+f}$;

13) $a = d = e = 0,\ \Gamma = \dfrac{2}{2+b+c+f}$.

Доказательство. Как говорилось ранее, детальное доказательство справедливости утверждения для случаев 1)–11) приведено в работах [6], [7].

Проведем исследование случаев, когда $d = e = 0$. Тогда система (2.1) примет вид

$$\ddot{x} = 2a\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \quad \ddot{y} = -2a\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \tag{2.2}$$

$$\ddot{z} = -2c\frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b\frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - 2f\frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y}.$$

Легко видеть, что для системы (2.2) выполнено соотношение $\ddot{x}+\ddot{y}=0$, значит, $x+y=C_1t+C_0$, где C_0, C_1 – произвольные постоянные. Выражая y из последнего соотношения и подставляя в первое уравнение системы (2.2) находим

$$\ddot{x} = 2a\frac{\dot{x}(C_1-\dot{x})}{2x-C_1t-C_0}.$$

Заменой $u = 2x - C_1t - C_0$ последнее уравнение приводим к виду

$$u'' = -a\frac{u'^2}{u} + a\frac{C_1^2}{u}. \tag{2.3}$$

Заметим, что уравнение (2.3) легко привести к уравнениям второго порядка типа Пенлеве с помощью замены $w = 1/u$.

В соответствии с результатами, полученными в работе [9], заключаем, что при $a=-2$, $a=-1{,}5, a=-1$ все решения уравнения (2.3) являются мероморфными функциями, а значит компонента решения x системы (2.2) является мероморфной функцией. Выражая x из соотношения $x+y=C_1t+C_0$, где C_0, C_1 – произвольные постоянные, и подставляя в первое уравнение системы (2.2) получим дифференциальное уравнение второго порядка для компоненты y исследуемой системы вида (2.3).

Таким образом, компоненты решения системы (2.2) x, y являются мероморфными функциями, более того, согласно результатам, полученным в работе [10], компоненты решения x, y системы (2.2) являются целыми функциями.

Рассмотрим теперь третье уравнение системы (2.2). Обе его части разделим на $\dot{z}+V$:

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z}+V} = -2c\frac{\dot{x}}{x} - 2b\frac{\dot{y}}{y} - 2f\frac{\dot{x}+\dot{y}}{x+y}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\dot{z} = Ax^{-2c}y^{-2b}(x+y)^{-2f} - V, \tag{2.4}$$

где A − произвольная постоянная,

$$c, b, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}.$$

Заметим также, что если компоненты x, y решения системы (2.2) являются целыми функциями, то и решение уравнения (2.4) при условии $c, b, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$ является целой функцией.

Следовательно, утверждение теоремы в случае 12) справедливо.

В случае 13) доказываемой теоремы система (2.1) будет иметь вид

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \tag{2.5}$$

$$\ddot{z} = -2c\frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b\frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - 2f\frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y},$$

Из первого и второго уравнения системы (2.5) находим

$$x = A_1t + A_0,\ y = B_1t + B_0,$$

где A_0, A_1, B_0, B_1 – произвольные постоянные.

Заметим, что компоненты x, y общего решения системы (2.5) являются целыми функциями, а выражение для компоненты z легко получить из третьего уравнения исследуемой системы, которое, как было показано ранее, сводится к уравнению (2.4), где

$$c, b, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}.$$

Таким образом, утверждение теоремы в случае 13) справедливо.

Заключение

Рассмотрена система (1.1), описывающая движение четырех тел в плоскости, для которой с помощью метода малого параметра получены упрощенные системы (2.1), состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок.

Для каждой упрощенной системы найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения исследуемых систем являлись мероморфными функциями. Интерес к исследованиям упрощенных систем обусловлен тем фактом, что необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения были мероморфными функциями, являются необходимыми условиями наличия мероморфных решений у исходной системы дифференциальных уравнений, описывающей движение четырех тел в плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Calogero*, *F*. Classical Many-Body Problems amenable to exact treatments: lect. Notes in Phys. Monograph / F. Calogero. – Berlin: Springer, 2001. – 749 p.

2. *Calogero*, *F*. Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane / F. Calogero, J.-P. Françoise // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 1–8.

3. *Calogero*, *F*. Integrable and solvable many-body problems in the plane via complexification / F. Calogero // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 5268–5291.

4. *Calogero*, *F.* Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related “Solvable Many-Body Problems” / F. Calogero // Nuovo Cimento. – 1978. – Vol. 43 B. – P. 177–241.

5. *Calogero*, *F.* Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane. II. Analysis of various motions / F. Calogero, J.-P. Françoise, M. Sommacal // J. Nonlinear Math. Phys. – 2003. – Vol. 10. – P. 157–214.

6. *Сазонова*, *А.Т.* О решениях одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений, связанного с задачей четырех тел / А.Т. Сазонова // Веснік ГрДУ. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. − 2013. − № 3 (159). − С. 56–60.

7. *Сазонова*, *А.Т.* О решениях одной упрощенной системы нелинейных дифференциальных уравнений, связанной с задачей четырех тел / А.Т. Сазонова // Проблемы физики, математики, техники. − 2014. − № 1 (18). − С. 69–73.

8. *Сазонова*, *А.Т.* О некоторых случаях разрешимости упрощенных систем в задаче движения четырех тел под действием сил гравитации / А.Т. Сазонова // Веснік ГрДУ. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. − 2014. − № 1 (170). – С. 42–52.

9. *Мартынов*, *И.П.* Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем: пособие / И.П. Мартынов, Н.С. Березкина, В.А. Пронько. – Гродно: ГрГУ, 2009. – 395 с.

10. *Лозовская*, *А.Т.* О решениях одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, связанного с задачей трех тел / А.Т. Лозовская // Наука – 2008: сб. науч. ст. аспирантов и магистрантов ГрГУ им. Я. Купалы / редкол.: А.Ф. Проневич [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 294–301.

Поступила в редакцию 19.06.15.