Проблемы физики, математики и техники, № 3 (24), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В.В. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH LINEAR-FRACTIONAL RIGHT-HAND PART

V.V. Mironenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Установлены условия существования периодического решения дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью.

***Ключевые слова**: дифференциальное уравнение, отражающая функция, отображение Пуанкаре, дробно-линейная функция, периодическое решение.*

The conditions of existence of periodic solutions of differential equation with linear-fractional right-hand side are given.

***Keywords**: differential equation, reflecting function, Poincare mapping, linear-fractional function, periodic solution.*

Введение

Понятие отражающей функции было введено В.И. Мироненко в работе [1]. Подробно теория отражающей функции изложена в [2].

Отражающая функция дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \qquad (0.1)$$

$t \in R,\ x \in R^n$, определяется по формуле

$$F(t,x) := \varphi(-t;t,x),$$

где $x = \varphi(t;t_0,x_0)$ – общее решение этой дифференциальной системы в форме Коши.

Отражающая функция обладает следующими основными свойствами [2, с. 62–69]:

1. Для любого решения $x(t)$ дифференциальной системы (0.1), определённого на симметричном интервале $(-\alpha;\ \alpha)$, справедливо тождество $F\big(t,x(t)\big) \equiv x(-t)$;

2. Если решение $x(t)$ определено на полуинтервале $[0;\alpha)$ и $x(t) \in D,\ F\big(t,x(t)\big) \in D$, то это решение продолжается и на полуинтервал $(-\alpha;\ 0]$ с помощью формулы $x(t) \equiv F\big(-t,x(-t)\big)$;

3. Дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией дифференциальной системы (0.1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X\big(-t,F(t,x)\big) = 0,$$

$$F(0,x) = x.$$

4. Все дифференциальные системы вида (0.1), имеющие в качестве своей отражающей функции функцию $F(t, x)$, образуют класс эквивалентности, который весь описывается дифференциальными системами вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1} R(t,x) - R\big(-t,F(t,x)\big),$$

где $R(t, x)$ есть произвольная дифференцируемая вектор-функция.

5. Если существует стационарная (автономная) система дифференциальных уравнений, имеющая ту же отражающую функцию, что и дифференциальная система (0.1), то эта автономная дифференциальная система с необходимостью имеет вид $\dfrac{dy}{dt} = X(0,y)$.

6. Если дифференциальная система (0.1) является 2ω-периодической по t и $F(t, x)$ есть ее отражающая функция, то отображение $\Pi(x)$ за период $[-\omega;\omega]$ этой дифференциальной системы [3, с. 12] задается формулой $\Pi(x) = F(-\omega,x)$. Поэтому продолжимое на $[-\omega;\omega]$ решение $x(t) := \varphi(t;-\omega,x_0)$ дифференциальной системы (0.1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $x(-\omega)$ является решением уже недифференциальной системы $F(-\omega, x)=x$.

Последнее из сформулированных свойств говорит о том, что решения имеющих одну и ту же отражающую функцию дифференциальных систем (систем, эквивалентных в смысле совпадения отражающих функций) имеют одинаковые качественные свойства. В этом отношении представляет практический интерес следующая теорема, доказанная в работе [4].

***Теорема* 0.1.** *Пусть* $\Delta_i(t,x)$, $i = 1,2,3,...$, *суть решения системы в частных производных*

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta(t,x)=0. \quad (0.2)$$

Тогда все дифференциальные системы вида

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x)+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_k(t)\Delta_k(t,x),$$

где $\alpha_k(t)$ *– нечётные непрерывные скалярные функции, эквивалентны между собой и эквивалентны системе* (0.1).

1 Некоторые возмущения дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью, не меняющие его отражающую функцию

***Лемма* 1.1.** *Пусть для дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{A(t)x+B(t)}{a(t)x+b(t)} \quad (1.1)$$

выполнены соотношения

$$\begin{gathered}\dot a(t)b(t)-a(t)\dot b(t)+A(t)a(t)+\\+C_0B(t)a(t)-C_0A(t)b(t)=0,\\A(t)a(t)b(t)+C_0B(t)a(t)b(t)-\\-C_0A(t)b^2(t)-B(t)a^2(t)-\\-C_0B(t)a(t)b(t)+C_0A(t)b^2(t)-\\-A(t)a(t)b(t)+B(t)a^2(t)=0,\end{gathered} \quad (1.2)$$

где C_0 *– некоторая постоянная.*

Тогда возмущение вида

$$\alpha(t)\left(C_0-\frac{a(t)}{a(t)x+b(t)}\right),$$

где $\alpha(t)$ *– произвольная непрерывная скалярная нечётная функция, не изменяет отражающую функцию дифференциального уравнения* (1.1).

Доказательство. Введём обозначение

$$\Delta(t,x):=C_0-\frac{a(t)}{a(t)x+b(t)}. \quad (1.3)$$

Частные производные функции $\Delta(t,x)$ по переменным t и x задаются формулами

$$\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial t}=\frac{\dot a(t)b(t)-a(t)\dot b(t)}{\left(a(t)x+b(t)\right)^2},$$

$$\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial x}=\frac{a^2(t)}{\left(a(t)x+b(t)\right)^2},$$

производная правой части дифференциального уравнения (1.1) определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A(t)x+B(t)}{a(t)x+b(t)}\right)=\frac{A(t)b(t)-B(t)a(t)}{\left(a(t)x+b(t)\right)^2}.$$

Поэтому соотношение (0.2) для дифференциального уравнения (1.1) и возмущения $\Delta(t,x)$ принимает вид

$$\frac{\dot a(t)b(t)-a(t)\dot b(t)}{\left(a(t)x+b(t)\right)^2}+\frac{a^2(t)\left(A(t)x+B(t)\right)}{\left(a(t)x+b(t)\right)^3}-$$

$$-\frac{A(t)b(t)-B(t)a(t)}{\left(a(t)x+b(t)\right)^2}C_0+$$

$$+\frac{\left(A(t)b(t)-B(t)a(t)\right)a(t)}{\left(a(t)x+b(t)\right)^3}=0.$$

Приведя левую часть записанного равенства к общему знаменателю и собирая коэффициенты при разных степенях переменной x, приходим к соотношениям (1.2). Лемма доказана.

2 Применение теоремы о возмущениях к поиску периодических решений дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью

***Теорема* 2.1.** *Пусть для дифференциального уравнения* (1.1) *с непрерывными* 2ω*-периодическими коэффициентами наряду с соотношением*

$$B(t)+\alpha(t)\left(C_0b(t)-a(t)\right)=0, \quad (2.1)$$

где C_0 *– некоторая постоянная,* $\alpha(t)$ *– непрерывная скалярная нечётная функция, выполнены условия* (1.2). *Тогда решение* $x(t)$ *дифференциального уравнения* (1.1), *удовлетворяющее начальному условию* $x(\omega)=0$, *будет* 2ω*-периодическим, если только оно продолжимо на отрезок* $[-\omega;\omega]$.

Доказательство. Выполнение условий (1.2) означает справедливость леммы 1.1. Из соотношения (2.1) следует, что возмущение (1.3) сводит дифференциальное уравнение (1.1) к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt}=\frac{M(t)x}{a(t)x+b(t)}, \quad (2.2)$$

$M(t)=A(t)+C_0\alpha(t)a(t)$, обладающему той же отражающей функцией, что и уравнение (1.1).

У дифференциального уравнения (2.2) существует решение $x(t)\equiv 0$. Согласно первому из свойств отражающей функции, сформулированных во введении, из существования нулевого решения вытекает соотношение $F(t,0)\equiv 0$. Пользуясь всё тем же первым свойством отражающей функции, можем утверждать, что для решения $x(t)$ исходного 2ω-периодического по t дифференциального уравнения (1.1), продолжимого на отрезок $[-\omega;\omega]$ и удовлетворяющего начальному условию $x(\omega)=0$, имеет место цепочка равенств

$$x(-\omega)=F(\omega,x(\omega))=F(\omega,0)=x(\omega).$$

Из равенства $x(-\omega)=x(\omega)$ следует, что $x(-\omega)$ является неподвижной точкой отображения за период $[-\omega,\omega]$. Поэтому, согласно основному принципу теории периодических решений, решение $x(t)$ является 2ω-периодическим. Теорема доказана.

Заметим, что, отказавшись от 2ω-периодичности по t правой части дифференциального уравнения (1.1), совершенно аналогично теореме 2.1 можно доказать следующую теорему.

***Теорема* 2.2.** *Пусть для дифференциального уравнения* (1.1) *наряду с соотношением* (2.1), *где* C_0 *– некоторая постоянная*, $\alpha(t)$ *– непрерывная скалярная нечётная функция*, *выполнены условия* (1.2). *Тогда для любого* ω *решение* $x(t)$ *дифференциального уравнения* (1.1), *удовлетворяющее начальному условию* $x(\omega)=0,$ *будет решением краевой задачи* $x(-\omega)=x(\omega).$

Заключение

С использованием метода отражающей функции получены условия периодичности решений дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

2. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: Монография / В.И. Мироненко. – Мин. образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.

3. *Красносельский*, *М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966 – 332 с.

4. *Мироненко*, *В.В.* Возмущения нелинейных дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1325–1332.

Поступила в редакцию 21.04.15.