МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

l-АРНЫЕ ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ *l*-АРНОЙ ГРУППЫ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

l-ARY SUBGROUPS OF GENERAL LINEAR *l*-ARY GROUP

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

Изучаются *l*-арные подгруппы полной линейной *l*-арной группы.

Ключевые слова: *полная линейная группа*, *l-арная группа*, *вектор-матрица, определитель, вектор-определитель.*

The *l*-ary subgroups of general linear *l*-ary group are studied.

Keywords: *general linear group*, *l-ary group*, *vector-matrice, determinant, vector-determinant.*

Введение

В работе [1], посвящённой, как видно из её названия, изучению полиадических групп, Э. Пост исследовал в том числе и полиадические операции, определённые на упорядоченных наборах $(M_1, \ldots, M_k)$, все компоненты которых являются невырожденными квадратными матрицами n-го порядка над полем C комплексных чисел. Понятно, что множество всех таких упорядоченных наборов совпадает с k-ой декартовой степенью $\mathbf{GL}_n^k(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$. На множестве $\mathbf{GL}_n^k(\mathrm{C})$ Э. Пост определил $(k+1)$-арную операцию, относительно которой, как он установил [1, с. 332], это множество является $(k+1)$-арной группой, названной им полной линейной $(k+1)$-арной группой. При $k = 1$ упорядоченные наборы матриц Э. Поста – это обычные матрицы, а $(k+1)$-арная группа $\mathbf{GL}_n^k(\mathrm{C})$ совпадает с полной линейной группой $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$.

Полная линейная $(k+1)$-арная группа Э. Поста является частным случаем l-арной группы $< \mathbf{GL}_n^k(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$, где $k \ge 2$, $l \ge 2$, σ – любая подстановка множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, P – произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Эта l-арная группа впервые была определена в [2]. Для каждой подгруппы H полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$ в l-арной группе $< \mathbf{GL}_n^k(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ имеется l-арная подгруппа $< H^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Возникает естественный вопрос: *существуют ли в l-арной группе* $< \mathbf{GL}_n^k(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *другие l-арные подгруппы*? В статье получен положительный ответа на этот вопрос и приведены многочисленные примеры таких l-арных подгрупп.

1 Предварительные сведения

Вектор-матрицей размера $(m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k)$ над кольцом P называется [3, определение 1] всякий упорядоченный набор $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ матриц $A_1, \ldots, A_k$ размеров $m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k$ с элементами из P. Вектор-матрица, у которой все компоненты $A_1, \ldots, A_k$ – квадратные матрицы одного и того же порядка n называется [3] *квадратной* вектор-матрицей порядка n. Для обозначения множества всех k-компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P используется символ $\mathbf{M}_n(k, P)$. Символ $\mathbf{S}_k$ используется для обозначения симметрической группы на k символах.

***Определение* 1.1** [4]. Пусть A – группоид, $k \ge 2$, $l \ge 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)).$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\sigma,k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Если $\sigma = (12 \ldots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [5, определения 2.2.3], а операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – с операцией $[\ ]_{l,k}$ из того же определения.

***Теорема* 1.1** [4]. *Пусть A – полугруппа,*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

***Теорема* 1.2** [5, теорема 3.6.2]. *Если A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа.*

Обозначим через $\mathbf{GL}_n(k, P)$ множество всех k-компонентных квадратных вектор-матриц n-го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Понятно, что множество $\mathbf{GL}_n(k, P)$ можно определить как множество всех k-компонентных квадратных вектор-матриц n-го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, у которых определитель каждой компоненты обратим в кольце P.

Ясно, что $\mathbf{GL}_n(k, P)$ совпадает с декартовой степенью $\underbrace{\mathbf{GL}_n(P)\times\ldots\times\mathbf{GL}_n(P)}_{k}$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$. Так как $\mathbf{GL}_n(P)$ – группа с операцией умножения матриц, то, ввиду теоремы 1.2, верна

***Теорема* 1.3** [2]. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,* то

$$< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$$

– l-арная группа. В частности,

$$< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$$

– $(k + 1)$-арная группа.

l-Арную группу $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной l-арной группой, соответствующей данным k и σ.

Пост рассматривал [1] частный случай l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ при $l = k + 1$, $\sigma = (12 \ldots k)$, $P = \mathrm{C}$ – поле комплексных чисел.

***Определение* 1.2** [6]. Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. *Векторным определителем* или *вектор-определителем* вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$, у которой все компоненты $A_1, \ldots, A_k$ являются квадратными матрицами над P, называется упорядоченный набор $\mathbf{det A} = (\det A_1, \ldots, \det A_k) \in P^k$ определителей $\det A_1, \ldots, \det A_k$ матриц-компонент.

***Теорема* 1.4** [6]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, l$$

– k-компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \ldots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{det A}_1 \ldots \mathbf{det A}_l]_{l,\sigma,k}. \quad (1.1)$$

***Теорема* 1.5** [6]. *Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ – произвольный элемент l-арной группы*

$$< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >.$$

Тогда:

$$\mathbf{det A}^{[-1]} = (\mathbf{det A})^{[-1]}, \quad (1.2)$$

где в левой части присутствует косой элемент для $\mathbf{A}$ в $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, а правая часть является косым элементом для элемента $\mathbf{det A}$ *l-арной группы $< P^{*k}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.*

2 l-арные подгруппы полной линейной l-арной группы, определяемые подгруппами полной линейной группы

Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, H – подгруппа группы G, то согласно теореме 1.2, $< H^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< G^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Поэтому для каждой подгруппы H полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$ в l-арной группе $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ имеется l-арная подгруппа $< H^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

В качестве иллюстрации сказанному можно указать l-арную группу $< \mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ всех k-компонентных квадратных вектор-матриц n-го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, у которых определители всех компонент равны единице кольца P. При $k = 1$ l-арная группа $< \mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ совпадает со специальной линейной группой $\mathbf{SL}_n(P)$.

Приведём ещё несколько примеров подобного рода.

Выделим во множестве $\mathbf{GL}_n(k, P)$ следующие подмножества:

$$\mathbf{D}_n(k, P) = \\ = \{(A_1, \ldots, A_k) \in \mathbf{GL}_n(k, P) \mid A_1, \ldots, A_k \in \mathbf{D}_n(P)\},$$

где $\mathbf{D}_n(P)$ – множество всех диагональных матриц из $\mathbf{GL}_n(P)$;

$$\mathbf{T}_n(k, P) = \\ = \{(A_1, \ldots, A_k) \in \mathbf{GL}_n(k, P) \mid A_1, \ldots, A_k \in \mathbf{T}_n(P)\},$$

где $\mathbf{T}_n(P)$ – множество всех матриц из $\mathbf{GL}_n(P)$, у которых угол над главной диагональю нулевой;

$$\mathbf{UT}_n(k, P) = \\ = \{(A_1, \ldots, A_k) \in \mathbf{GL}_n(k, P) \mid A_1, \ldots, A_k \in \mathbf{UT}_n(P)\},$$

где $\mathbf{UT}_n(P)$ – множество всех матриц из $\mathbf{GL}_n(P)$, у которых угол над главной диагональю нулевой, а все элементы на главной диагонали – единицы;

$${}^{+}\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{R}) = \\ = \{(A_1, \ldots, A_k) \in \mathbf{GL}_n(k, \mathrm{R}) \mid A_1, \ldots, A_k \in {}^{+}\mathbf{GL}_n(\mathrm{R})\},$$

где R – множество всех действительных чисел, ${}^{+}\mathbf{GL}_n(\mathrm{R})$ – множество всех матриц из $\mathbf{GL}_n(\mathrm{R})$, у которых модуль определителя положителен;

$${}^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{C}) = \\ = \{(A_1, \ldots, A_k) \in \mathbf{GL}_n(k, \mathrm{C}) \mid A_1, \ldots, A_k \in {}^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})\},$$

где ${}^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ – множество всех матриц из $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$, у которых модуль определителя равен единице.

Так как

$$\mathbf{D}_n(P),\ \mathbf{T}_n(P),\ \mathbf{UT}_n(P),\ {}^{+}\mathbf{GL}_n(\mathrm{R}),\ {}^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$$

– группы с операцией умножения матриц, и, кроме того,

$$\mathbf{D}_n(k, P) = \underbrace{\mathbf{D}_n(P)\times\ldots\times\mathbf{D}_n(P)}_{k},$$

$$\mathbf{T}_n(k, P) = \underbrace{\mathbf{T}_n(P)\times\ldots\times\mathbf{T}_n(P)}_{k},$$

$$\mathbf{UT}_n(k, P) = \underbrace{\mathbf{UT}_n(P)\times\ldots\times\mathbf{UT}_n(P)}_{k},$$

$$^{+}\mathbf{GL}_n(k,\mathrm{R}) = \underbrace{^{+}\mathbf{GL}_n(\mathrm{R})\times\ldots\times{}^{+}\mathbf{GL}_n(\mathrm{R})}_{k},$$

$$^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(k,\mathrm{C}) = \underbrace{^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})\times\ldots\times{}^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})}_{k},$$

то, применяя теорему 1.2, получим

***Предложение* 2.1**. *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то следующие универсальные алгебры*

$$< \mathbf{D}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >, < \mathbf{T}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >,$$

$$< \mathbf{UT}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >, < {}^{+}\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{R}), [\ ]_{l,\sigma,k} >,$$

$$< {}^{\pm 1}\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{C}), [\ ]_{l,\sigma,k} >$$

являются l*-арными подгруппами* l*-арной группы* $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

3 l-арные подгруппы полной линейной l-арной группы, определяемые вектор-определителями вектор-матриц

l-Арные подгруппы в l-арной группе $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ могут быть определены и без использования теоремы 1.2. Указанной цели можно достичь, например, с помощью вектор-определителей.

Для всякого подмножества $\mathbf{F}$ группы P^{*k}, где P^* – группа всех обратимых элементов ассоциативного коммутативного кольца P с единицей, определим множество

$$\mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, P) \mid \mathbf{detA} \in \mathbf{F}\}.$$

***Теорема* 3.1**. *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то множество* $\mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P)$ *является* l*-арной подгруппой* l*-арной группы* $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда множество* $\mathbf{F}$ *является* l*-арной подгруппой* l*-арной группы* $< P^{*k}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть

$$< \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$$

– l-арная группа, и пусть

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}),\ i = 1, \ldots, l$$

– произвольные элементы из $\mathbf{F}$. Для каждого a_{ij} зафиксируем матрицу A_{ij}, определитель которой равен a_{ij}: $\det A_{ij} = a_{ij}$. В качестве такой матрицы можно выбрать диагональную матрицу, у которой на главной диагонали имеется элемент a_{ij}, а все остальные элементы равны единице. Так как

$$\det A_{ij} = a_{ij} \in P^*,$$

то $A_{ij} \in \mathbf{GL}_n(P)$. Поэтому, положив

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, l,$$

получим

$$\mathbf{A}_i \in \mathbf{GL}_n(k, P),\ i = 1, \ldots, l,$$

$$\mathbf{detA}_i = (\det A_{i1}, \ldots, \det A_{ik}) = \mathbf{a}_i \in \mathbf{F}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}_i \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P).$$

Так как $< \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа, то

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P),$$

откуда следует

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{F}.$$

Учитывая равенство (1.1) из теоремы 1.4, получаем

$$[\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{F},$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

Пусть теперь $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент из $\mathbf{F}$, $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ – вектор-матрица, у которой

$$\det\mathbf{A}_1 = a_1, \ldots, \det\mathbf{A}_k = a_k.$$

Ясно, что

$$\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, P),\ \mathbf{detA} = \mathbf{a} \in \mathbf{F}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P).$$

Так как $< \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа, то

$$\mathbf{A}^{[-1]} \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P),$$

откуда следует

$$\mathbf{detA}^{[-1]} \in \mathbf{F}.$$

Учитывая равенство (1.2) из теоремы 1.5, получаем

$$(\mathbf{detA})^{[-1]} \in \mathbf{F},$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[-1]} \in \mathbf{F}. \quad (3.2)$$

Так как верны (3.1) и (3.2), то согласно критерию Дёрнте, $< \mathbf{F}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная подгруппа в $< P^{*k}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Достаточность. Пусть $< \mathbf{F}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная подгруппа в $< P^{*k}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, и пусть

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P).$$

Это значит

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l \in \mathbf{GL}_n(k, P),\ \mathbf{detA}_1, \ldots, \mathbf{detA}_l \in \mathbf{F}.$$

Так как $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа, то

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{GL}_n(k, P). \quad (3.3)$$

А так как $< \mathbf{F}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ также является l-арной группой, то

$$[\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{F}.$$

Учитывая равенство (1.1) из теоремы 1.4, получим

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{F}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P). \quad (3.5)$$

Пусть теперь $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P)$, то есть

$$\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, P),\ \mathbf{detA} \in \mathbf{F}.$$

Так как $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ и $< \mathbf{F}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арные группы, то

$$\mathbf{A}^{[-1]} \in \mathbf{GL}_n(k, P), \quad (3.6)$$

$$(\mathbf{detA})^{[-1]} \in \mathbf{F}.$$

Учитывая равенство (1.2) из теоремы 1.5, получим

$$\mathbf{detA}^{[-1]} \in \mathbf{F}. \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) вытекает

$$\mathbf{A}^{[-1]} \in \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P). \quad (3.8)$$

Так как верно (3.5) и (3.8), то, согласно критерию Дёрнте, $< \mathbf{GL}_n^{[\mathrm{F}]}(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная подгруппа в $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Теорема доказана.

Если в определении множества $\mathbf{GL}_n^{[\mathbf{F}]}(k, P)$ вместо l-арной группы $<\mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ использовать l-арную полугруппу $<\mathbf{M}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$, то будет справедлива теорема, аналогичная теореме 3.1.

Для всякого подмножества $\mathbf{F}$ полугруппы P^k, где P – мультипликативная полугруппа ассоциативного кольца P, определим множество

$$\mathbf{M}_n^{[\mathbf{F}]}(k, P) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(k, P) \mid \mathbf{detA} \in \mathbf{F}\}.$$

***Теорема* 3.2**. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то множество $\mathbf{M}_n^{[\mathbf{F}]}(k, P)$ является l-арной подполугруппой l-арной полугруппы $<\mathbf{M}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ тогда и только тогда, когда множество $\mathbf{F}$ является l-арной подполугруппой l-арной полугруппы $<P^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$.*

4 Следствия

Если H – подгруппа группы P^*, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то по теореме 1.2 $<\mathbf{F} = H^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$ – l-арная подгруппа l-арной группы $<P^{*k}, [\ ]_{l,\sigma,k}>$. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает

***Следствие* 4.1**. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, множество H является подгруппой группы P^*, то*

$$<\mathbf{GL}_n^{[H^k]}(k, P),\ [\ ]_{l,\sigma,k}>$$

– l-арная подгруппа l-арной группы

$$<\mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>.$$

***Замечание* 4.1**. Ясно, что

$$\mathbf{SL}_n(k, P) = \mathbf{GL}_n^{[\mathbf{F}]}(k, P),\ \mathbf{F} = H^k, H = \{1\}.$$

Покажем, что в $<\mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ существуют l-арные подгруппы вида

$$<\mathbf{GL}_n^{[H^k]}(k, P),\ [\ ]_{l,\sigma,k}>$$

такие, что H не является подгруппой в группе P^*. Для этого заметим, что всякий идемпотент l-арной группы является ее l-арной подгруппой. Поэтому, полагая в теореме 3.1 $\mathbf{F} = \{\mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a}$ – идемпотент l-арной группы $<P^*, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, получим

***Следствие* 4.2**. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{a}$ – идемпотент l-арной группы $<P^{*k}, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, то*

$$<\mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{a}\}]}(k, P),\ [\ ]_{l,\sigma,k}>$$

– l-арная подгруппа l-арной группы

$$<\mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>.$$

Согласно [5, следствие 2.11.8] множество всех идемпотентов тернарной группы

$$<\mathrm{R}^{*2}, [\ ]_{3,(12),2}>$$

совпадает с множеством

$$\left\{\left(a, \frac{1}{a}\right) \middle| a \in \mathrm{R}^*\right\},$$

а множество всех идемпотентов 5-арной группы $<\mathrm{R}^{*2}, [\ ]_{5,(12),2}>$ совпадает с множеством

$$\left\{\left(a, \frac{1}{a}\right) \middle| a \in R^*\right\} \cup \left\{\left(a, -\frac{1}{a}\right) \middle| a \in R^*\right\}.$$

Поэтому, полагая в следствии 4.2 $P = \mathrm{R}$, $l = 3$, $k = 2$, $\sigma = (12)$, получим

***Следствие* 4.3**. *Для любого отличного от нуля действительного числа a множество $\mathbf{GL}_n^{\left[\left\{\left(a, \frac{1}{a}\right)\right\}\right]}(2, \mathrm{R})$ всех двухкомпонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над R порядка n, для которых $\mathbf{detA} = \left(a, \frac{1}{a}\right)$, то есть*

$$\det A_1 = a,\ \det A_2 = \frac{1}{a},$$

является тернарной подгруппой полной линейной тернарной группы $<\mathbf{GL}_n(2, \mathrm{R}), [\ ]_{3,(12),2}>$.

Полагая в следствии 4.2 $P = \mathrm{R}$, $l = 5$, $k = 2$, $\sigma = (12)$, получим

***Следствие* 4.4**. *Для любого $a \in \mathrm{R}^*$ следующие множества являются 5-арными подгруппами полной линейной 5-арной группы*

$$<\mathbf{GL}_n(2, \mathrm{R}), [\ ]_{5,(12),2}>:$$

1) *множество $\mathbf{GL}_n^{\left[\left\{\left(a, \frac{1}{a}\right)\right\}\right]}(2, \mathrm{R})$ всех двухкомпонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над R порядка n*, у *которых*

$$\det A_1 = a,\ \det A_2 = \frac{1}{a};$$

2) *множество $\mathbf{GL}_n^{\left[\left\{\left(a, -\frac{1}{a}\right)\right\}\right]}(2, \mathrm{R})$ всех двухкомпонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над R порядка n, у которых*

$$\det A_1 = a,\ \det A_2 = -\frac{1}{a}.$$

В силу следствий 4.3 и 4.4, множество $\mathbf{GL}_n^{[\{(-1,\,-1)\}]}(2, \mathrm{R})$ всех двухкомпонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над R порядка n, для которых

$$\det A_1 = -1,\ \det A_2 = -1,$$

является тернарной подгруппой в тернарной группе $<\mathbf{GL}_n(2, \mathrm{R}), [\ ]_{3,(12),2}>$, а также 5-арной подгруппой в 5-арной группе

$$<\mathbf{GL}_n(2, \mathrm{R}), [\ ]_{5,(12),2}>.$$

При этом множество $\{-1\}$ не является подгруппой группы R^*.

Согласно [5, теорема 2.12.5], множество всех идемпотентов $(k+1)$-арной группы

$$<\mathrm{R}^{*k}, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$$

совпадает с множеством

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathrm{R}^*, a_1 a_2 \ldots a_k = 1\}.$$

Поэтому, полагая в следствии 4.2 $P = \mathrm{R}$, $l = k + 1$, $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

***Следствие* 4.5**. *Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathrm{R}$ таких, что $a_1 a_2 \ldots a_k = 1$, множество $\mathbf{GL}_n^{[\{(a_1,\ldots,a_k)\}]}(k, \mathrm{R})$ всех k-компонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ над R порядка n, у которых*

$$\det A_1 = a_1,\ \ldots,\ \det A_k = a_k,$$

является $(k+1)$-арной подгруппой полной линейной $(k+1)$-арной группы $<\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{R}), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$.

Согласно следствию 4.5, если k – чётное, то множество

$$\mathbf{GL}_n^{[\{\underbrace{(-1,\ldots,-1)}_{k}\}]}(k, \mathrm{R})$$

всех k-компонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1,\ldots,A_k)$ над R порядка n, для которых

$$\det A_1 = -1, \ldots, \det A_k = -1,$$

является $(k + 1)$-арной подгруппой в $(k + 1)$-арной группе $< \mathbf{GL}_n(k, \mathrm{R}), [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k} >$. При этом множество $\{-1\}$ не является подгруппой группы R^*.

Используя [5, следствие 2.2.9], с помощью следствия 4.2 можно находить полиадические подгруппы полной линейной $(sk + 1)$-арной группы $\mathbf{GL}_n(k, \mathrm{C})$ над полем комплексных чисел. Сделаем это для $k = 2$, $s = 1, 2, 3, 4$. При этом для любых $a, b \in \mathrm{R}$, таких что $a^2 + b^2 \neq 0$ будем для сокращения записей использовать обозначения

$$\mathbf{x} = \left(a+ib, \frac{a-ib}{a^2+b^2}\right),\ \mathbf{y} = \left(a+ib, \frac{-a+ib}{a^2+b^2}\right),$$

$$\mathbf{z} = \left(a+ib, \frac{b+ia}{a^2+b^2}\right),\ \mathbf{u} = \left(a+ib, \frac{-b-ia}{a^2+b^2}\right);$$

$$\mathbf{v} = \left(a+ib, \frac{a-ib}{a^2+b^2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

$$\mathbf{w} = \left(a+ib, \frac{a-ib}{a^2+b^2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

***Следствие* 4.6**. *Для любых* $a, b \in \mathrm{R}$ *таких, что* $a^2 + b^2 \neq 0$ *множество* $\mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{x}\}]}(2, \mathrm{C})$ *всех* 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *над* C *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{a-ib}{a^2+b^2},$$

является тернарной подгруппой полной линейной тернарной группы $< \mathbf{GL}_n(2, \mathrm{C}), [\ ]_{3, (12), 2} >$.

***Следствие* 4.7**. *Для любых* $a, b \in \mathrm{R}$ *таких, что* $a^2 + b^2 \neq 0$ *в полной линейной* 5-*арной группе* $< \mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{5, (12), 2} >$ *имеются следующие* 5-*арные подгруппы*:

1) 5-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{x}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{5, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{a-ib}{a^2+b^2};$$

2) 5-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{y}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{5, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{-a+ib}{a^2+b^2}.$$

***Следствие* 4.8**. *Для любых* $a, b \in \mathrm{R}$ *таких, что* $a^2 + b^2 \neq 0$ *в полной линейной* 7-*арной группе* $< \mathbf{GL}_n(2, \mathrm{C}), [\ ]_{7, (12), 2} >$ *имеются следующие* 7-*арные подгруппы*:

1) 7-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{x}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{7, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{a-ib}{a^2+b^2};$$

2) 7-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{v}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{7, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

3) 7-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{w}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{7, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

***Следствие* 4.9**. *Для любых* $a, b \in \mathrm{R}$ *таких, что* $a^2 + b^2 \neq 0$ *в полной линейной* 9-*арной группе* $< \mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{9, (12), 2} >$ *имеются следующие* 9-*арные подгруппы*:

1) 9-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{x}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{9, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{a-ib}{a^2+b^2};$$

2) 9-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{y}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{9, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{-a+ib}{a^2+b^2};$$

3) 9-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{z}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{9, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{b+ia}{a^2+b^2};$$

4) 9-*арная подгруппа*

$$< \mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{u}\}]}(2, \mathrm{C}),\ [\ ]_{9, (12), 2} >$$

всех 2-*компонентных вектор-матриц* $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ *порядка* n, *у которых*

$$\det A_1 = a + ib,\ \det A_2 = \frac{-b-ia}{a^2+b^2}.$$

В силу следствий 4.6–4.9, множество

$$\mathbf{GL}_n^{[\{\mathbf{x}\}]}(2, \mathrm{C}) = \mathbf{GL}_n^{[\{(-1,-1)\}]}(2, \mathrm{C})$$

всех двухкомпонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над C порядка n, для которых

$$\det A_1 = -1,\ \det A_2 = -1,$$

является тернарной подгруппой в тернарной группе $< \mathbf{GL}_n(2, \mathrm{C}), [\ ]_{3, (12), 2} >$, 5-арной подгруппой в 5-арной группе $<\mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{5,(12),2}>$, 7-арной подгруппой в 7-арной группе $<\mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{7,(12),2}>$, а также 9-арной подгруппой в 9-арной группе $<\mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{9,(12),2}>$. При этом множество $\{-1\}$ не является подгруппой группы C^*.

Полагая в **y** из следствий 4.7 и 4.9 вначале $a = 0,\ b = 1$, а затем $a = 0,\ b = -1$, видим, что множества

$$\mathbf{GL}_n^{[\{(i,\,i)\}]}(2, C),\ \ \mathbf{GL}_n^{[\{(-i,\,-i)\}]}(2, C)$$

всех двухкомпонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над C порядка n, для которых соответственно

$$\det A_1 = i,\ \det A_2 = i,$$
$$\det A_1 = -i,\ \det A_2 = -i,$$

являются 5-арными подгруппами в 5-арной группе $<\mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{5,(12),2}>$, а также 9-арными подгруппами в 9-арной группе $<\mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{9,(12),2}>$. При этом множества $\{i\}$ и $\{-i\}$ не являются подгруппами группы C^*.

Полагая в **z** из следствия 4.9 $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, видим, что множество

$$\mathbf{GL}_n^{\left[\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\right]}(2, C)$$

всех двухкомпонентных вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ над C порядка n, для которых

$$\det A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \det A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

является 9-арной подгруппой в 9-арной группе вектор-матриц $<\mathbf{GL}_n(2, C), [\ ]_{9,(12),2}>$. При этом множество $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ не является подгруппой группы C^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

2. *Гальмак*, *А.М.* Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 1–5.

3. *Гальмак*, *А.М.* Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснiк МДУ iм. А.А. Куляшова. – 2011. – № 1 (37), серия В. – С. 30–37.

4. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весцi НАН Беларусi. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

5. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

6. *Гальмак*, *А.М.* Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 58–64.

Поступила в редакцию 04.09.14.