МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О СОВПАДЕНИИ ОТРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ И ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON COINCIDENCE OF REFLECTING FUNCTIONS OF THE QUASI-PERIODIC AND PERIODIC DIFFERENTIAL SYSTEMS

M.S. Belokursky

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Получены достаточные условия эквивалентности в смысле Мироненко квазипериодической и периодической дифференциальных систем.

Ключевые слова: *отражающая функция, эквивалентность, дифференциальная система, квазипериодическая система.*

Sufficient conditions for equivalence in sense of Mironenko of the quasi-periodic and periodic differential systems were obtained.

Keywords: *reflecting function, equivalence, differential system, quasi-periodic system.*

Введение

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = X(t, x), \ t \in \mathbb{R}, \ x^T = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^n, \quad (0.1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Отражающей функцией [1] системы (0.1) называется функция, определяемая формулой

$$F(t, x) = \varphi(-t; t, x),$$

где $\varphi(t; \tau, x)$ есть общее решение системы (0.1) в форме Коши. Для любого решения $x(t)$ этой системы верно тождество $F(t, x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t)$. Это свойство можно принять за определение отражающей функции [2, с. 16]. Две системы, имеющие одинаковые отражающие функции, будем считать эквивалентными в смысле совпадения отражающих функций. Разработаны методы, которые позволяют находить отражающую функцию, не используя ее определение. Более того, зная лишь некоторые свойства отражающей функции можно исследовать поведение решений самой системы, не прибегая к построению отражающей функции [2]–[7]. Таким образом, решения систем с одинаковой отражающей функцией имеют много одинаковых качественных свойств. Поэтому при качественном исследовании систем удобно заменять более сложную систему, на более простую систему. В частности, исследование квазипериодической системы можно заменить исследованием периодической системы.

1 Эквивалентность квазипериодической и периодической дифференциальных систем

***Теорема* 1.1.** *Пусть $a_1(t)$ и $a_2(t)$ непрерывные нечётные функции. Тогда дифференциальная система*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\cos t}{1+3x^2}\big(1 + a_1(t)(y - x^3) + \\ &\quad + a_2(t)(x + y - \sin t)\big), \\ \frac{dy}{dt} &= \left(1 - \frac{1}{1+3x^2}\right)\big(1 + a_1(t)(y - x^3) + \\ &\quad + a_2(t)(x + y - \sin t)\big)\cos t \end{aligned} \quad (1.1)$$

имеет такую же отражающую функцию, как и периодическая система

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{1+3x^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{1}{1+3x^2}\right)\cos t. \quad (1.2)$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\Delta_1 = \left(\frac{y - x^3}{1+3x^2}, \frac{3x^2 y - 3x^5}{1+3x^2}\right)^T$$

является решением системы

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta = 0, \quad (1.3)$$

где X – правая часть системы (1.2). С этой целью подставим Δ_1 в систему (1.3) и получим равенства

$$\frac{-3x^2(1+3x^2) - 6x(y - x^3)}{(1+3x^2)^2} \cdot \frac{\cos t}{1+3x^2} +$$

$$+ \frac{1}{1+3x^2}\left(1 - \frac{1}{1+3x^2}\right)\cos t - \frac{-6x\cos t}{(1+3x^2)^2} \cdot \frac{y - x^3}{1+3x^2} = 0,$$

$$\frac{(6xy - 15x^4)(1+3x^2) - 18x^3(y - x^3)}{(1+3x^2)^2} \cdot \frac{\cos t}{1+3x^2} +$$

$$+ \frac{3x^2}{1+3x^2}\left(1 - \frac{1}{1+3x^2}\right)\cos t - \frac{6x\cos t}{(1+3x^2)^2} \cdot \frac{y - x^3}{1+3x^2} = 0.$$

Преобразуем левые части обоих равенств и убедимся в их справедливости:

$$\frac{-3x^2}{(1+3x^2)^2}\cos t - \frac{6x(y-x^3)}{(1+3x^2)^3}\cos t +$$

$$+\frac{3x^2}{(1+3x^2)^2}\cos t + \frac{6x(y-x^3)}{(1+3x^2)^3}\cos t \equiv 0,$$

$$\frac{\cos t}{(1+3x^2)^3}\Big(6xy - 15x^4 + 18x^3y - 45x^6 - 18x^3y +$$

$$+18x^6 + 9x^4(1+3x^2) - 6xy + 6x^4\Big) \equiv 0.$$

Теперь докажем, что

$$\Delta_2 = \left(\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2}, \frac{3x^3+3x^2y-3x^2\sin t}{1+3x^2}\right)^T$$

является решением системы (1.3). Для этого подставим Δ_2 в систему (1.3):

$$\frac{-\cos t}{1+3x^2} + \frac{1+3x^2-6x(x+y-\sin t)}{(1+3x^2)^2}\cdot\frac{\cos t}{1+3x^2} +$$

$$\frac{1}{1+3x^2}\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)\cos t -$$

$$-\frac{-6x\cos t}{(1+3x^2)^2}\cdot\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2} = 0,$$

$$\frac{-3x^2\cos t}{1+3x^2} + \left(\frac{(9x^2+6xy-6x\sin t)(1+3x^2)}{(1+3x^2)^2} -\right.$$

$$\left.-\frac{6x(3x^3+3x^2y-3x^2\sin t)}{(1+3x^2)^2}\right)\cdot\frac{\cos t}{1+3x^2} +$$

$$+\frac{3x^2}{1+3x^2}\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)\cos t -$$

$$-\frac{6x\cos t}{(1+3x^2)^2}\cdot\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2} = 0.$$

Преобразовываем левые части обоих равенств и убеждаемся в их справедливости:

$$-\frac{\cos t}{1+3x^2} + \frac{\cos t}{(1+3x^2)^2} - \frac{6x(x+y-\sin t)}{(1+3x^2)^3}\cos t +$$

$$+\frac{\cos t}{1+3x^2} - \frac{\cos t}{(1+3x^2)^2} + \frac{6x(x+y-\sin t)}{(1+3x^2)^3}\cos t \equiv 0,$$

$$-\frac{3x^2\cos t}{1+3x^2} + \frac{3x^2\cos t}{1+3x^2} + \frac{\cos t}{(1+3x^2)^3}(9x^2+6xy -$$

$$-6x\sin t + 27x^4 + 18x^3y - 18x^3\sin t - 18x^4 - 18x^3y +$$

$$+18x^3\sin t - 3x^2 - 9x^4 - 6x^2 - 6xy + 6x\sin t) \equiv 0.$$

Таким образом, доказано, что Δ_1 и Δ_2 являются решениями дифференциальной системы (1.3). Тогда из [7] следует, что дифференциальные системы (1.1) и (1.2) эквивалентны в смысле совпадения отражающих функций.

Следствие. *Если непрерывные нечётные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$ имеют периоды несоизмеримые с 2π, то квазипериодическая дифференциальная система* (1.1) *будет эквивалентна 2π-периодической дифференциальной системе* (1.2).

2 Способ проверки эквивалентности квазипериодической и периодической дифференциальных систем

Для дифференциальной системы вида (1.1) можно применить теорему 1.1 определить, будет ли она эквивалентна системе (1.2). Если рассматриваемая система записана в другом виде, то применить теорему 1.1 непосредственно нельзя. В качестве примера рассмотрим квазипериодическую дифференциальную систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\cos t}{1+3x^2}\Big(1-\sin t\sin\sqrt{3}t + x\sin\sqrt{3}t +\\ &\quad + y(\sin t+\sin\sqrt{3}t) - x^3\sin t\Big),\\ \frac{dy}{dt} &= \left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)\Big(1-\sin t\sin\sqrt{3}t + x\sin\sqrt{3}t +\\ &\quad + y(\sin t+\sin\sqrt{3}t) - x^3\sin t\Big)\cos t.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для того чтобы проверить, можно ли привести систему к виду (1.1), воспользуемся алгоритмом, изложенным в [7].

От правой части дифференциальной системы (2.1) отнимем правую часть дифференциальной системы (1.2) и полученный результат обозначим $\Delta^{(0)}$:

$$\Delta^{(0)} = \left(\frac{\cos t}{1+3x^2}\Big(-\sin t\sin\sqrt{3}t + x\sin\sqrt{3}t +\right.$$

$$+y(\sin t+\sin\sqrt{3}t) - x^3\sin t\Big),$$

$$\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)\Big(-\sin t\sin\sqrt{3}t + x\sin\sqrt{3}t +$$

$$\left.+y(\sin t+\sin\sqrt{3}t) - x^3\sin t\Big)\cos t\right).$$

Теперь, используя формулу

$$\Delta^{(i+1)}(t,x) = \frac{\partial\Delta^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial\Delta^{(i)}}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta^{(i)},$$

необходимо построить $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$. Итак,

$$\Delta^{(1)} = \left(\frac{1}{1+3x^2}(\sin^2 t\sin\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t\cos t +\right.$$

$$+x(-\sin t\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) +$$

$$+y(-\sin^2 t - \sin t\sin\sqrt{3}t + \cos^2 t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) +$$

$$+x^3(\sin^2 t - \cos^2 t)),$$

$$\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)(\sin^2 t\sin\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t\cos t +$$

$$+x(-\sin t\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) +$$

$$+y(-\sin^2 t - \sin t\sin\sqrt{3}t + \cos^2 t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) +$$

$$\left.+x^3(\sin^2 t - \cos^2 t))\right)^T,$$

$$\Delta^{(2)} = \left(\frac{1}{1+3x^2}(4\cos t\sin t\sin\sqrt{3}t +\right.$$

$$+2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t -$$

$$-x(4\cos t\sin\sqrt{3}t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\sin t)-$$
$$-y(4\cos t\sin\sqrt{3}t+4\sin t\cos t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t)+$$
$$+4x^3\sin t\cos t),$$
$$\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)(4\cos t\sin t\sin\sqrt{3}t+$$
$$+2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t-$$
$$-x(4\cos t\sin\sqrt{3}t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\sin t)-$$
$$-y(4\cos t\sin\sqrt{3}t+4\sin t\cos t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t)+$$
$$\left.+4x^3\sin t\cos t)\right)^T.$$

Далее необходимо найти функции $b_0(t)$ и $b_1(t)$, для которых выполняется тождество

$$b_0(t)\Delta^{(0)}(t,x)+b_1(t)\Delta^{(1)}(t,x)+\Delta^{(2)}(t,x)\equiv 0.$$

В нашем случае это тождество примет вид

$$\frac{b_0(t)\cos t}{1+3x^2}(-\sin t\sin\sqrt{3}t+x\sin\sqrt{3}t+$$
$$+y(\sin t+\sin\sqrt{3}t)-x^3\sin t)+$$
$$+\frac{b_1(t)}{1+3x^2}(\sin^2 t\sin\sqrt{3}t-\sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t\cos t+$$
$$+x(-\sin t\sin\sqrt{3}t+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t)+$$
$$+y(-\sin^2 t-\sin t\sin\sqrt{3}t+\cos^2 t+$$
$$+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t)+x^3(\sin^2 t-\cos^2 t))+$$
$$+\frac{1}{1+3x^2}(4\cos t\sin t\sin\sqrt{3}t+2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t-$$
$$-x(4\cos t\sin\sqrt{3}t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\sin t)-$$
$$-y(4\cos t\sin\sqrt{3}t+4\sin t\cos t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t)+$$
$$+4x^3\sin t\cos t)\equiv 0,$$
$$b_0(t)\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)(-\sin t\sin\sqrt{3}t+x\sin\sqrt{3}t+$$
$$+y(\sin t+\sin\sqrt{3}t)-x^3\sin t)\cos t+$$
$$+b_1(t)\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)(\sin^2 t\sin\sqrt{3}t-$$
$$-\sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t\cos t+$$
$$+x(-\sin t\sin\sqrt{3}t+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t)+$$
$$+y(-\sin^2 t-\sin t\sin\sqrt{3}t+\cos^2 t+$$
$$+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t)+x^3(\sin^2 t-\cos^2 t))+$$
$$+\left(1-\frac{1}{1+3x^2}\right)(4\cos t\sin t\sin\sqrt{3}t+$$
$$+2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t-$$
$$-x(4\cos t\sin\sqrt{3}t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\sin t)-$$
$$-y(4\cos t\sin\sqrt{3}t+4\sin t\cos t+$$
$$+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t)+4x^3\sin t\cos t)\equiv 0.$$

Сложим имеющиеся равенства и получим

$$b_0(t)(-\sin t\sin\sqrt{3}t+x\sin\sqrt{3}t+y(\sin t+\sin\sqrt{3}t)-$$
$$-x^3\sin t)\cos t+b_1(t)(\sin^2 t\sin\sqrt{3}t-$$
$$-\sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t\cos t+x(-\sin t\sin\sqrt{3}t+$$
$$+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t)+y(-\sin^2 t-\sin t\sin\sqrt{3}t+\cos^2 t+$$
$$+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t)+x^3(\sin^2 t-\cos^2 t))+$$
$$+(4\cos t\sin t\sin\sqrt{3}t+2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t-$$
$$-x(4\cos t\sin\sqrt{3}t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\sin t)-$$
$$-y(4\cos t\sin\sqrt{3}t+4\sin t\cos t+2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t)+$$
$$+4x^3\sin t\cos t)\equiv 0.$$

Приводя подобные слагаемые относительно x^0, x, y, x^3 и приравнивая коэффициенты при них к нулю, имеем

$$\begin{gathered}
-b_0(t)\sin t\cos t-b_1(t)\cos 2t+2\sin 2t=0,\\
b_0(t)\sin\sqrt{3}t\cos t-b_1(t)\sin t\sin\sqrt{3}t+\\
+\sqrt{3}b_1(t)\cos\sqrt{3}t\cos t-2\sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t-\\
-4\cos t\sin\sqrt{3}t=0,\\
b_0(t)(\sin t+\sin\sqrt{3}t)\cos t+\\
+b_1(t)(\cos 2t+\sqrt{3}\cos t\cos\sqrt{3}t-\sin t\sin\sqrt{3}t)-\\
-2\sin 2t-4\cos t\sin\sqrt{3}t-\\
-2\sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t=0,\\
-b_0(t)\sin t\sin\sqrt{3}t\cos t+b_1(t)\sin^2 t\sin\sqrt{3}t-\\
-\sqrt{3}b_1(t)\cos\sqrt{3}t\sin t\cos t+4\cos t\sin t\sin\sqrt{3}t+\\
+2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t=0.
\end{gathered}\tag{2.2}$$

Из первого уравнения системы (2.2) имеем

$$b_0(t)=4-b_1(t)\frac{\cos 2t}{\sin t\cos t}.$$

Подставляем $b_0(t)$ во второе уравнение последней системы и находим

$$b_1(t)=\frac{2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t}{\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t\sin t-\sin\sqrt{3}t\cos^2 t}.$$

Тогда

$$b_0(t)=\frac{2\sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t-4\sin\sqrt{3}t\cos^3 t}{(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t-\sin\sqrt{3}t\cos t)\cos^2 t}.$$

Найденные $b_0(t)$ и $b_1(t)$ удовлетворяют также третьему и четвертому уравнениям системы (2.2).

Далее ищем нечётные функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, которые удовлетворяют тождеству

$$b_0(t)\alpha(t)+b_1(t)\dot\alpha(t)+\ddot\alpha(t)\equiv 0.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{2\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t-4\sin\sqrt{3}t\cos^3 t}{(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t-\sin\sqrt{3}t\cos t)\cos^2 t}\alpha(t)+$$
$$+\frac{2\sqrt{3}\sin^2 t\cos\sqrt{3}t}{(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\sin t-\sin\sqrt{3}t\cos t)\cos t}\dot\alpha(t)+\ddot\alpha(t)=0.$$

Можно проверить, что функции

$$\alpha_1(t) = \sin t \cos t,$$

$$\alpha_2(t) = \sin\sqrt{3}t\cos t$$

удовлетворяют последнему равенству.

Теперь можно составить систему, из которой найдём функции

$$\Delta_1(t,x,y) = (\Delta_1^{(1)}(t,x,y),\, \Delta_1^{(2)}(t,x,y))^T$$

и

$$\Delta_2(t,x,y) = (\Delta_2^{(1)}(t,x,y),\, \Delta_2^{(2)}(t,x,y))^T:$$

$$\Delta_1^{(1)}\sin t\cos t + \Delta_2^{(1)}\sin\sqrt{3}t\cos t =$$
$$= \frac{\cos t}{1+3x^2}(-\sin t\sin\sqrt{3}t + x\sin\sqrt{3}t +$$
$$+ y(\sin t + \sin\sqrt{3}t) - x^3\sin t),$$

$$\Delta_1^{(2)}\sin t\cos t + \Delta_2^{(2)}\sin\sqrt{3}t\cos t =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{1+3x^2}\right)(-\sin t\sin\sqrt{3}t + x\sin\sqrt{3}t +$$
$$+ y(\sin t + \sin\sqrt{3}t) - x^3\sin t)\cos t,$$

$$\Delta_1^{(1)}(\cos^2 t - \sin^2 t) +$$
$$+\Delta_2^{(1)}(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t - \sin\sqrt{3}t\sin t) =$$
$$= \frac{1}{1+3x^2}(\sin^2 t\sin\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t\cos t +$$
$$+ x(-\sin t\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) +$$
$$+ y(-\sin^2 t - \sin t\sin\sqrt{3}t + \cos^2 t +$$
$$+ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) + x^3(\sin^2 t - \cos^2 t)),$$

$$\Delta_1^{(2)}(\cos^2 t - \sin^2 t) +$$
$$+\Delta_2^{(2)}(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t - \sin\sqrt{3}t\sin t) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{1+3x^2}\right)(\sin^2 t\sin\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin t\cos\sqrt{3}t\cos t +$$
$$+ x(-\sin t\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) +$$
$$+ y(-\sin^2 t - \sin t\sin\sqrt{3}t + \cos^2 t +$$
$$+ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\cos t) + x^3(\sin^2 t - \cos^2 t))\cos t.$$

Решая эту систему, находим

$$\Delta_1(t,x,y) = \left(\frac{y - x^3}{1+3x^2}, \frac{3x^2y - 3x^5}{1+3x^2}\right)^T,$$

$$\Delta_2(t,x,y) =$$
$$= \left(\frac{-\sin t + x + y}{1+3x^2}, \frac{-3x^2\sin t + 3x^3 + 3x^2y}{1+3x^2}\right)^T.$$

Можно проверить, что найденные функции являются решениями дифференциальной системы в частных производных (1.3).

Таким образом, дифференциальную систему (2.1) можно представить в виде (1.1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{1+3x^2}\Big(1 + (y - x^3)\sin t +$$
$$+ (x + y - \sin t)\sin\sqrt{3}t\Big),$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{1}{1+3x^2}\right)\Big(1 + (y - x^3)\sin t +$$
$$+ (x + y - \sin t)\sin\sqrt{3}t\Big)\cos t.$$

Следовательно, квазипериодическая дифференциальная система (2.1) эквивалентна в смысле совпадения отражающих функций периодической системе (1.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко// Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 1635–1638.

2. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Мн.: Университетское, 1986. – 76 с.

3. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: Мин. Образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 196 с.

4. *Мироненко*, *В.И.* Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.

5. *Musafirov*, *E.V.* Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.

6. *Мироненко*, *В.И.* Временные симметрии уравнения Риккати / В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 31–33.

7. *Mironenko*, *V.I.* How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.

Поступила в редакцию 28.06.14.