Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 517.925

Отражающая функция дробно-тригонометрического уравнения с центром

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

В работе рассмотрено уравнение в полярных координатах, правая часть которого является отношением двух тригонометрических многочленов относительно полярного радиуса-вектора. Для этого уравнения указан вид отражающей функции и установлено, что начало координат для него является центром.

In the paper we consider an equation in the polar coordinate system, the right-hand side for which is the ratio of trigonometric polynomials with respect to polar radius. For this equation the reflecting function was obtained and was established that zero-point is center.

Введение. Понятие отражающей функции было введено Мироненко В.И. в [1] для изучения периодических решений дифференциальных систем. В [2] и [3] собраны его наиболее значимые результаты, связанные с отражающей функцией. Отражающую функцию использовали затем многие авторы: Zhou Zhengxin, Мироненко В.В., Мусафиров Э.В., Майоровская С.В., Вареникова Е.В., Вересович П.П., Альсевич Л.А., Кастрица О.А., Филипцов В.Ф., Бельский В.А. и др. При этом обычно искалась отражающая функция в явном виде. В этой работе отражающая функция будет иметь неявное задание.

Напомним основные сведения об отражающей функции, необходимые для дальнейшего изложения.

Для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \;\; x^T \in D \subset R^n, \;\; t \in R, \tag{1}$$

решения $\varphi(t;t_0,x_0)$ которой однозначно определяются своими начальными данными, отражающая функция $F(t,x)$ определяется формулой $F(t,x) \equiv \varphi(-t;t,x)$.

Для всякого решения $x(t)$ системы (1), определенного на симметричном интервале $(-\alpha;\alpha)$, верно соотношение $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$.

Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t,F) = 0, \; F(0,x) \equiv x. \tag{2}$$

Если система (1) 2ω–периодична по t, то $F(-\omega,x)$ есть ее отображение за период $[-\omega;\omega]$. Поэтому продолжимое на $[-\omega;\omega]$ решение $\varphi(t;-\omega,x_0)$ системы (1), –периодичной по t, будет 2ω–периодичным тогда и только тогда, когда x_0 является решением недифференциальной системы $F(-\omega,x) = x$.

Эти свойства, как и многие другие, позволили найти разнообразные приложения теории отражающей функции, в особенности с учётом того факта, что неинтегрируемые в квадратурах системы могут иметь отражающую функцию, задаваемую элементарными функциями.

Основной результат. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a_0 + a_1\cos r + b_1\sin r + a_2\cos 2r + b_2\sin 2r}{\cos r - m\sin r}. \tag{3}$$

Здесь $a_k(\varphi)$ и $m(\varphi)$ считаются непрерывными 2ω–периодическими функциями, а r и φ интерпретируются как полярные координаты.

Ниже используются обозначения

$$f_{od}=\frac{f(\varphi)+f(-\varphi)}{2},\ f_{ev}=\frac{f(\varphi)-f(-\varphi)}{2}$$

Теорема. *Пусть для коэффициентов дифференциального уравнения (3) функции*

$$\alpha_2:=\frac{b_2}{m};\ \alpha_1:=b_{1od};\ \text{p}:=\frac{b_{1ev}}{2\alpha_2};\ \alpha_0:=a_0-\alpha_1 p-\left(p^2+\frac{m^2+1}{2}\right)-p' \tag{4}$$

доопределяются по непрерывности до нечетных непрерывных функций, и пусть выполнены соотношения

$$a\equiv\alpha_1 m+2\alpha_2 pm-m';\ 2\alpha_2\equiv\alpha_2\left(m^2-1\right). \tag{5}$$

Тогда отражающая функция F *уравнения (3) задается соотношением* $m(-\varphi)\cos F+\sin F=m(\varphi)\cos r+\sin r+2p(\varphi),$ *а начало координат* $r=0$ *для уравнения (3) является центром при* $a_0=0.$

Для доказательства теоремы, согласно общей теории отражающей функции, достаточно проверить основное тождество (2). По теореме о неявно заданной функции [4] имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{m'\cos r+2p'-\overline{m}'\cos F}{\cos F-\overline{m}\sin F};\ \frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\cos r-m\sin r}{\cos F-\overline{m}\sin F},$$

где $\overline{m}:=m(\varphi),$ а штрих означает производную по φ. Подставляя эти производные в левую часть соотношения (2) и, умножая полученное выражение на $\cos F-\overline{m}\sin F,$ получим

$$\begin{aligned}&m'\cos r+2\eth'-\overline{m}'\cos F+a_0a_1\cos r+b_1\sin r+a_2\cos 2r+b_2\sin 2r+\\&+\overline{a_0}+\overline{a_1}\cos F+\overline{b_1}\sin F+\overline{a_2}\cos 2F+\overline{b_2}\sin 2F.\end{aligned} \tag{6}$$

Используя соотношения (4)-(5), найдем $b_2=m\alpha_2;\ b_1=b_{1od}+b_{1ev}=\alpha_1+2\alpha_2\,\text{p};$

$$a_0=\alpha_0+\alpha_1 p+\alpha_2\left(p^2+\frac{m^2+1}{2}\right)-p';\ a_0=\alpha_1 m+2\alpha_2 pm-m;\ a_2=\alpha_2\frac{m^2-1}{2}.$$

Подставив найденные выражения для a_k и b_k в соотношение (6), получим тождественный ноль, если учесть нечетность функций $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,$ и $p,$ а также само соотношение для отражающей функции. Из периодичности отражающей функции следует, что точка $r=0$ является центром.

Теорема доказана.

Литература:

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и классификация периодических систем / В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. / В.И. Мироненко. – Минск : Изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. / В.И. Мироненко. – Гомель : Изд-во УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 196 с.

4. Зорич, В.А. Математический анализ, часть I. / В.А. Зорич. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

Гомельский государственный
университет им.Ф. Скорины

Поступило в редакцию 14.11.2013