Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(69), 2011

Математика

УДК 517.925

Построение двумерных систем с заданной отражающей функцией

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

Показано, что при построении двумерной дифференциальной системы по заданной отражающей функции одно из уравнений может быть выбрано, грубо говоря, произвольным образом. После этого второе уравнение определяется однозначно.

Ключевые слова: дифференциальная система, отражающая функция.

It is established that while constructing a two-dimensional differential system with the given reflecting function either equation can be chosen, roughly speaking, arbitrarily. After that the other equation will be definitely determined.

Keywords: differential system, reflecting function.

Введение. Безотносительно к теории дифференциальных уравнений отражающая функция (ОФ) может быть определена как дифференцируемая вектор-функция $F(t,x),\quad F: G \to R^n$, определенная в некоторой области $G \subset R^{1+n}$, содержащей гиперплоскость $t=0$ и обладающая свойством

$$F\big(-t, F(t,x)\big) \equiv F(0,x) \equiv x. \tag{1}$$

Примерами таких функций могут служить решения системы вида

$$U(-t,F) = U(t,x),$$

где $U(t,x)$ есть произвольная вектор-функция $U: G \to R^n$.

Для дифференциальной системы

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n, \tag{2}$$

с общим решением $\varphi(t;t_0,x_0)$ в форме Коши эта функция определяется формулой $F(t,x) := \varphi(-t;t,x)$ и обладает рядом свойств, облегчающих исследование свойств решений системы (2).

Для каждого решения $x(t)$ этой системы верно тождество $x(-t) \equiv F\big(t, x(t)\big)$, позволяющее по прошлому состоянию $x(-t)$ системы строить ее будущее состояние $x(t) \equiv F\big(-t, x(-t)\big)$. Знание ОФ $2\omega-$периодической системы (2) позволяет построить отображение за период $[-\omega;\omega]$ (отображение Пуанкаре) этой системы.

Различные системы вида (2) могут иметь одну и ту же ОФ и, значит, одно и то же отображение за период $[-\omega;\omega]$.

Всякая система вида (2), ОФ которой совпадает с $F(t,x)$ в их общей области определения, может быть записана в виде

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(-t,F)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(-t,F)R(t,x) - R(-t,F), \tag{3}$$

где R есть произвольная дифференцируемая вектор-функция.

Если какая-то система вида (2) принадлежит множеству систем вида (3), то ее ОФ совпадает с $F(t,x)$ в их общей области определения.

Функция $F(t,x)$ является ОФ системы (2) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0,\quad F(0,x)\equiv x. \tag{4}$$

Другие ее свойства и примеры их использования читатель найдет в [1–5], в работах Zhou Zhengxin, Э.В. Мусафирова, П.П. Вересовича и др., а также на сайте http://reflecting-function.narod.ru.

Основной результат этой работы содержит

Теорема. *Отражающая функция системы*

$$\dot{x}=P(t,x,y),\quad \dot{y}=Q(t,x,y),\quad t\in R,\quad (x,y)\in D_0\subset R^2 \tag{5}$$

в своей области определения совпадает с вектор-функцией $\left(F_1(t,x,y)\; F_2(t,x,y)\right)^T$, *удовлетворяющей обычным для ОФ соотношениям*

$$F_1(-t,F_1,F_2\equiv x,\quad F_2(-t,F_1,F_2)\equiv y, \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда функция

$$Z(t,x,y):=\left[-\frac{\partial F_1}{\partial t}-\frac{\partial F_1}{\partial x}P(t,x,y)-P(-t,F_1,F_2)\right]\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}$$

доопределяется до непрерывной функции там, где $\frac{\partial F_1}{\partial y}(t,x,y)$ *обращается в нуль и совпадает с функцией* $Q(t,x,y)$, *т.е. если* $Z(t,x,y)\equiv Q(t,x,y)$.

Доказательство. Тождества (5), как было отмечено выше, являются обычным свойством всякой двумерной ОФ, ибо они представляют собой соотношения (1). Дифференцируя эти тождества частным образом, мы получим новые тождества

$$\begin{gathered}
\overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial x}\equiv 1,\quad \overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial y}+\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial y}\equiv 0,\\
\overline{\frac{\partial F_2}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\overline{\frac{\partial F_2}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial x}\equiv 0,\quad \overline{\frac{\partial F_2}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial y}+\overline{\frac{\partial F_2}{\partial y}}\frac{\partial F_1}{\partial y}\equiv 1,\\
-\overline{\frac{\partial F_1}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial t}+\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial t}\equiv 0,\quad -\overline{\frac{\partial F_2}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial F_2}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial t}+\overline{\frac{\partial F_2}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial t}\equiv 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

где для любой функции $\Phi(t,x,y)$ положено $\overline{\Phi}:=\Phi(-t,F_1,F_2)$. Ясно, что тогда $\overline{\overline{\Phi}}=\Phi(t,x,y)$. Уравнение (4) в нашем случае принимает вид:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+\frac{\partial F_1}{\partial x}P+\frac{\partial F_1}{\partial y}Q+\overline{P}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial F_2}{\partial x}P+\frac{\partial F_2}{\partial y}Q+\overline{Q}=0. \tag{9}$$

Поэтому мы докажем теорему, если установим, что тождества (8–9) равносильны тождеству $Q\equiv Z$.

Из (8) тождество $Z\equiv Q$ следует очевидным образом, так что его необходимость доказана.

Докажем достаточность. Для этого нам следует установить, что из тождества $Z\equiv Q$ следуют тождества (8) и (9). Тождество (8) является очевидным следствием тождества $Z\equiv Q$. Для доказательства тождества (9) воспользуемся тождествами (7). Имеем

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial F_2}{\partial x}P-\frac{\partial F_2}{\partial y}\left[\frac{\partial F_1}{\partial t}+\frac{\partial F_1}{\partial x}P+\overline{P}\right]\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}-\left[\overline{\frac{\partial F_1}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\,\overline{P}+P\right]\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1}=$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial t} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1} - \overline{\frac{\partial F_1}{\partial t}}\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1} + P\left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1} - \left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1}\right] -$$

$$- \overline{P}\left[\frac{\partial F_2}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1} + \overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}\right] = \frac{\partial F_2}{\partial t} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1} -$$

$$-\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial t} + \overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1} + P\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1}\left[\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] +$$

$$+ \overline{P}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1}\left[\overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial y} + \overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial y}\right] = -\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial y} + \overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\frac{\partial F_1}{\partial t} +$$

$$+P\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1}\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial x} - \overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] =$$

$$= P\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{-1}\left(\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)^{-1}\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\overline{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \overline{\frac{\partial F_1}{\partial x}}\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] = 0.$$

Тождество (9), а с ней и теорема доказаны.

Литература

1 Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

2 Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 196 с.

3 Мироненко, В.И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий, и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 10. – С. 1347–1352.

4 Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356 –1359.

5 Mironenko, V.I. Time symmetries and in-period transformations / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematics Letters. – 2011. – P. 1721–1723.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 08.11.11