Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 517.983.23+517.984.5

Теоремы о спектральных включениях для операторов Тёплица в пространствах Харди H^p над компактной абелевой группой

А.Р. Миротин, Р.С. Мельников

Доказаны теоремы о локализации спектров операторов Тёплица в пространствах Харди H^p над компактными абелевыми группами с линейно упорядоченной группой характеров. В частности, рассмотрен случай вещественнозначного символа.

Ключевые слова: компактная абелева группа, оператор Тёплица, пространство Харди, спектр оператора.

Theorems on the localization of spectra of Toeplitz operators in Hardy spaces H^p over compact abelian groups with linearly ordered dual are proved. In particular the case of real valued symbol is considered.

Keywords: compact abelian group, Toeplitz operator, Hardy space, spectrum of the operator.

Тёплицевы операторы в гильбертовых пространствах Харди $H^2(G)$ над компактной абелевой группой были введены Дж. Мёрфи [1] и в дальнейшем интенсивно изучались (см., например, работы [1]–[7] и литературу к ним). Случай банаховых пространств $H^p(G)$ впервые рассмотрен в работе [8], где была изучена фредгольмовость и вычислен спектр тёплицевых операторов с непрерывным символом в этих пространствах. Данная работа является продолжением исследований в этом направлении.

Ниже G – компактная связная абелева группа, группа характеров X которой линейно упорядочена положительным конусом X_+. Через $Pol(G)$ ($Pol_+(G)$) будет обозначаться пространство тригонометрических полиномов, т. е. линейных комбинаций характеров (соответственно тригонометрических полиномов аналитического типа, т. е. линейных комбинаций характеров из X_+) на группе G. При $1 \le p \le \infty$ через $H^p(G)$ обозначим подпространство тех $f \in L^p(G)$, преобразование Фурье которых сосредоточено на X_+, с нормой, индуцированной из $L^p(G)$. *Проектор Рисса* $P_+ : Pol(G) \to Pol_+(G)$ определяется равенством

$$P_+\left(\sum_{\chi\in M} c_\chi \chi\right) = \sum_{\chi\in M\cap T} c_\chi \chi .$$

Известно [9], что при $1 < p < \infty$ проектор Рисса L^p ограничен, а поэтому продолжается до ограниченного проектора $P_+ : L^p(G) \to H^p(G)$. Положим $c_p = \|P_+\|$ $(c_2 = 1)$.

Определение 1. Пусть $1 < p < \infty$. *Тёплицев оператор* T_φ в $H^p(G)$ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ определяется следующим образом:

$$T_\varphi f = P_+(\varphi f).$$

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$, K_p – открытый круг в комплексной плоскости с центром 1 радиуса $1/c_p$. Элемент $\varphi \in L^\infty(G)$ называется p*-секториальным,* если $aR(\varphi) \subset K_p$ при некотором $a \in C$, $a \ne 0$, где $R(\varphi)$ – множество существенных значений функции φ.

Предложение 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Если элемент* $\varphi \in L^\infty(G)$ p*-секториален, то оператор* T_φ *обратим.*

Доказательство. Действительно,

$$\|T_{a\varphi} - I\| = \|T_{a\varphi-1}\| \le c_p \|a\varphi - 1\|_\infty < 1,$$

а потому оператор $T_{a\varphi} = aT_\varphi$, а вместе с ним и T_φ обратимы.

В случае $p=2$ известно [4], что $\sigma(T_\varphi)$ содержится в выпуклой оболочке $conv\,R(\varphi)$ множества $R(\varphi)$. Ниже мы установим аналог этого включения для $p\neq 2$.

Определение 3. Пусть $1<p<\infty$. *p-оболочку* множества M комплексных чисел определим равенством (штрих обозначает дополнение в C)

$$hull_p(M)=\bigcap\left\{M+(wK_p)' \mid w\in C\,,w\neq 0\right\}.$$

Теорема 1. Пусть $1<p<\infty$. *Имеют место включения*

$$R(\varphi)\subset\sigma(T_\varphi)\subset hull_p(R(\varphi)).$$

Доказательство. Первое включение доказано в [8]. Для доказательства второго заметим, что в силу предложения 1, если $\varphi-\lambda$ p-секториален, то оператор $T_{\varphi-\lambda}=T_\varphi-\lambda I$ обратим, т. е. $\lambda\notin\sigma(T_\varphi)$. Пусть $\lambda\in\sigma(T_\varphi)$. Тогда $\varphi-\lambda$ не p-секториален. Согласно определению 2 это значит, что

$$\forall a\neq 0 \quad aR(\varphi-\lambda)\not\subset K_p.$$

Последнее соотношение эквивалентно тому, что

$$\forall a\neq 0 \quad R(\varphi)-\lambda\not\subset \frac{1}{a}K_p=w_1K_p,$$

где $w_1=1/a$, причем $w_1\neq 0$. Тогда для любого $w_1\neq 0$ найдется такое $\zeta_{w_1}\in R(\varphi)$, что

$$\zeta_{w_1}-\lambda\notin w_1K_p.$$

В свою очередь, это эквивалентно тому, что $\lambda\in\zeta_{w_1}-(w_1K_p)'$ при всех $w_1\neq 0$. Отсюда вытекает, что при всех $w_1\neq 0$

$$\lambda\in R(\varphi)-(w_1K_p)'.$$

Таким образом,

$$\lambda\in\bigcap_{w\neq 0}\left(R(\varphi)+(wK_p)'\right).$$

Теорема доказана.

В случае вещественнозначных символов теорему 1 можно дополнить. В связи с этим отметим, что классический результат $\sigma(T_\varphi)=[m_\varphi,M_\varphi]$, где $m_\varphi=\operatorname{ess\,inf}\varphi, M_\varphi=\operatorname{ess\,sup}\varphi$ ($G=T$), на пространства $H^2(G)$ перенесен в [4]. С другой стороны, известно, что при $p\neq 2$ включение $\sigma(T_\varphi)\subset[m_\varphi,M_\varphi]$ неверно даже в классическом случае $G=T$ (см., например, [10, с. 69]). Нам понадобится

Лемма 1. *Пусть* $p\neq 2, c_p>1$. *Вещественнозначная функция* $\varphi\in L^\infty(G)$ *есть* p-*секториальный элемент алгебры* $L^\infty(G)$, *если и только если*

$$m_\varphi>0, M_\varphi/m_\varphi<\gamma_p,\ \text{либо}\ M_\varphi<0, m_\varphi/M_\varphi<\gamma_p,$$

где $\gamma_p=(c_p+1)/(c_p-1)$.

Доказательство. Необходимость. Условие p-секториальности равносильно тому, что для некоторого вещественного α и положительного k справедливо включение $e^{i\alpha}R(\varphi)\subset kK_p$. Следовательно, $e^{i\alpha}[m_\varphi,M_\varphi]\subset kK_p\subset\{\operatorname{Re}z>0\}$, а потому $0\notin[m_\varphi,M_\varphi]$. Предположим, что $m_\varphi>0$ (случай $M_\varphi<0$ сводится к этому заменой φ на $-\varphi$). Из геометрических соображений ясно, что $[m_\varphi,M_\varphi]\subset kK_p$, а стало быть,

$$\frac{M_\varphi}{m_\varphi}<\frac{k(1+1/c_p)}{k(1-1/c_p)}=\gamma_p.$$

Достаточность. Пусть $m_\varphi>0, M_\varphi/m_\varphi<\gamma_p$ (случай $M_\varphi<0, m_\varphi/M_\varphi<\gamma_p$ сводится к этому заменой φ на $-\varphi$). Положим, $k'=M_\varphi/(1+1/c_p)$. Тогда $(1-1/c_p)k'=M_\varphi/\gamma_p<m_\varphi$, а по-

тому $M_\varphi = k'(1+1/c_p), m_\varphi > k'(1-1/c_p)$. Следовательно, если $k > k'$, причем разность $k-k'$ достаточно мала, то $[m_\varphi, M_\varphi] \subset kK_p$, что и завершает доказательство.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Если функция $\varphi \in L^\infty(G)$ вещественнозначна, то*

$$\sigma(T_\varphi) \cap R \subset \left[\frac{(c_p+1)m_\varphi - (c_p-1)M_\varphi}{2}, \frac{(c_p+1)M_\varphi - (c_p-1)m_\varphi}{2} \right].$$

Доказательство. При $c_p = 1$ справедливо включение $\sigma(T_\varphi) \subset [m_\varphi, M_\varphi]$. Это доказывается так же, как и в случае $p = 2$. В самом деле, $[m_\varphi, M_\varphi] = convR(\varphi)$, а выпуклая оболочка множества есть пересечение открытых полуплоскостей, содержащих это множество. Поэтому нам достаточно показать, что любая открытая полуплоскость, содержащая множество $R(\varphi)$, содержит также и множество $\sigma(T_\varphi)$. Так как отображение $\varphi \mapsto T_\varphi$ линейно, то мы можем считать, что рассматриваемая полуплоскость совпадает с множеством $\{\xi \in C : \mathrm{Re}\,\xi > 0\}$. Более того, достаточно показать, что в том случае, когда $R(\varphi) \subset \{\xi \in C : \mathrm{Re}\,\xi > 0\}$, оператор T_φ обратим.

Покажем, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $r < 1$, что справедливо включение

$$\varepsilon R(\varphi) \subset \{\xi : |1-\xi| < r\}.$$

Действительно, круги $D_R = \{\xi : |R-\xi| < R, R > 0\}$ покрывают полуплоскость $\{\xi : \mathrm{Re}\,\xi > 0\}$. Так как множество $R(\varphi)$ компактно, то оно содержится в некотором круге D_R. Тогда для любого $\delta > 0$ верно включение

$$R(\varphi) \subset \{\xi : |R-\xi| < R-\delta\}.$$

Поэтому при $\varepsilon = 1/R$, $r = 1-\delta/R$ имеем

$$\varepsilon R(\varphi) \subset \{\xi : |1-\xi| < r\}.$$

Отсюда следует, что $\|\varepsilon\varphi - 1\|_\infty < 1$. Поэтому

$$\|T_{\varepsilon\varphi} - I\| = \|T_{\varepsilon\varphi-1}\| \le c_p \|\varepsilon\varphi - 1\|_\infty = \|\varepsilon\varphi - 1\|_\infty < 1.$$

Следовательно, оператор $T_{\varepsilon\varphi} = \varepsilon T_\varphi$, а вместе с ним и T_φ, обратимы, и наше утверждение в рассматриваемом случае доказано.

Будем теперь предполагать, что $c_p > 1$, и пусть $\lambda \in \sigma(T_\varphi) \cap R$. Тогда функция $\varphi - \lambda$ вещественнозначна и есть не является p-секториальным элементом алгебры $L^\infty(G)$ (предложение 1). Предположим, что $\lambda \notin [m_\varphi, M_\varphi]$. Тогда либо $m_{\varphi-\lambda} = m_\varphi - \lambda > 0$, либо $M_{\varphi-\lambda} = M_\varphi - \lambda < 0$.

Рассмотрим случай $m_\varphi - \lambda > 0$. Из не p-секториальности $\varphi - \lambda$ в силу леммы 1 выводим $(M_\varphi - \lambda)/(m_\varphi - \lambda) \ge \gamma_p$. Решая это неравенство, получаем

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}\left((c_p+1)m_\varphi - (c_p-1)M_\varphi \right), m_\varphi \right].$$

Аналогично в случае $M_\varphi - \lambda < 0$ из неравенства $(m_\varphi - \lambda)/(M_\varphi - \lambda) \ge \gamma_p$ выводим, что

$$\lambda \in \left[M_\varphi, \frac{1}{2}\left((c_p+1)M_\varphi - (c_p-1)m_\varphi \right) \right].$$

Окончательно имеем

$$\lambda \in \left[\frac{(c_p+1)m_\varphi - (c_p-1)M_\varphi}{2}, m_\varphi \right] \cup [m_\varphi, M_\varphi] \cup \left[M_\varphi, \frac{(c_p+1)M_\varphi - (c_p-1)m_\varphi}{2} \right] =$$

$$=\left[\frac{(c_p+1)m_\varphi-(c_p-1)M_\varphi}{2},\frac{(c_p+1)M_\varphi-(c_p-1)m_\varphi}{2}\right].$$

Теорема доказана.

Используя теорему 5 работы [8], в случае непрерывного символа теорему 2 можно значительно усилить. Ниже $\sigma_e(T_\varphi)$ – существенный спектр Фредгольма оператора T_φ.

Предложение 2. *Пусть $1<p<\infty$. Если символ φ вещественнозначен и непрерывен на G, то*

$$\sigma_e(T_\varphi)=\sigma(T_\varphi)=[\min\varphi,\max\varphi].$$

Доказательство. В силу упомянутой теоремы из [8] спектр и существенный спектр Фредгольма оператора T_φ получаются из отрезка $\varphi(G)=[\min\varphi,\max\varphi]$ присоединением его дыр (если они существуют), а потому совпадают с ним.

В случае $\varphi\in H^\infty(G)$ оператор Тёплица принимает вид $T_\varphi f=\varphi f$. Такие операторы называют *аналитическими операторами Тёплица.*

Предложение 3. *Пусть $1<p<\infty$. Аналитический оператор Тёплица T_φ в $H^p(G)$ обратим тогда и только тогда, когда его символ φ обратим в алгебре $H^\infty(G)$.*

Доказательство. Пусть φ обратим в алгебре $H^\infty(G)$, т. е. существует такая функция $\psi\in H^\infty(G)$, что $\varphi\psi=1$. Тогда

$$T_\varphi T_\psi=T_\psi T_\varphi=T_{\varphi\psi}=I,$$

т. е. оператор T_φ обратим.

Пусть теперь оператор T_φ обратим. Тогда $T_\varphi H^p(G)=\varphi H^p(G)=H^p(G)$. Поэтому $\varphi\psi=1$ для некоторой функции $\psi\in H^p(G)$. Следовательно, $H^p(G)=\psi(\varphi H^p(G))=\psi H^p(G)$. Теперь по лемме 2 из [8] $\psi\in H^\infty(G)$, и предложение 3 доказано.

Теорема 3. *Пусть $\varphi\in H^\infty(G)$. Тогда спектр оператора Тёплица совпадает со спектром функции φ в алгебре $H^\infty(G)$, т. е. $\sigma(T_\varphi)=\sigma_{H^\infty}(\varphi)$.*

Доказательство. Это сразу следует из равенства $T_\varphi-\lambda I=T_{\varphi-\lambda}$ и предложения 3.

Равенство $T_{\varphi-\lambda}=T_\varphi-\lambda I$ показывает также, что для оператора Тёплица вопрос о спектре тесно связан с вопросом об обратимости. Рассмотрим его в случае, когда символ унимодулярен. Следующие теоремы обобщают классические результаты Видома и Девинатца.

Теорема 4. *Пусть $1<p<\infty$, $\theta\in L^\infty(G)$, $|\theta|=1$. Если оператор T_θ обратим, а $\psi\in H^\infty(G)$, причем $\|\bar\theta-\psi\|_\infty<1/c_p$, то элемент ψ обратим в алгебре $H^\infty(G)$.*

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1 из [8], имеем

$$\|I-T_{\theta\psi}\|=\|T_{1-\theta\psi}\|\le c_p\|1-\theta\psi\|_\infty=c_p\|\bar\theta-\psi\|_\infty. \qquad (1)$$

Поэтому оператор $T_{\theta\psi}=T_\theta T_\psi$ [8, предложение 1], а вместе с ним и T_ψ обратимы. В силу теоремы 3 это влечет обратимость элемента ψ в алгебре $H^\infty(G)$.

Теорема 5. *Пусть $p=2$, $\theta\in L^\infty(G),|\theta|=1$. Оператор T_θ обратим слева (справа), если и только если $dist_{L^\infty}(\theta,H^\infty(G))<1$ (соответственно $dist_{L^\infty}(\bar\theta,H^\infty(G))<1$).*

Доказательство. Пусть $H_\theta:H^2(G)\to H^2_-(G)$ – оператор Ганкеля [11]. Из равенства $H_\theta f+T_\theta f=\theta f\,(f\in H^2(G))$ следует, что $\|H_\theta f\|^2+\|T_\theta f\|^2=\|f\|^2$. Поэтому неравенство $\|T_\theta f\|\ge C\|f\|$ (C – положительная константа), которое равносильно существованию ограниченного левого обратного к T_θ, возможно, если и только если $\|H_\theta\|<1$. Для доказательства первого утверждения осталось заметить, что $\|H_\theta\|=dist_{L^\infty}(\theta,H^\infty(G))$ по теореме 2.1 из [11].

Второе утверждение теоремы следует из первого и равенства $T_\theta^* = T_{\bar\theta}$.

Теорема 6. *Пусть* $p = 2$, $\theta \in L^\infty(G), |\theta| = 1$. *Оператор* T_θ *обратим тогда и только тогда, когда существует такой обратимый в алгебре* $H^\infty(G)$ *элемент* ψ, *что* $\|\theta - \psi\|_\infty < 1$.

Доказательство. Если оператор T_θ обратим, то элемент ψ из $H^\infty(G)$ с требуемыми свойствами существует в силу теорем 4 и 5.

Пусть теперь элемент ψ обратим в алгебре $H^\infty(G)$ и $\|\theta - \psi\|_\infty < 1$. Тогда неравенство (1) показывает, что оператор $T_{\bar\theta\psi} = T_\theta^* T_\psi$ обратим. С учетом того, что оператор T_ψ обратим по теореме 3, отсюда следует обратимость оператора T_θ.

Замечание. Представляло бы интерес обобщение теорем 5 и 6 на случай $p \neq 2$.

Литература

1. Murphy, G.J. Ordered groups and Toeplitz algebras / G.J. Murphy // J. Operator Theory. – 1987. – vol. 18, № 2. – P. 303–326.
2. Murphy, G.J. Toeplitz operators and algebras / G.J. Murphy // Math. Z. – 1991. – vol. 208, № 1. – P. 355–362.
3. Murphy, G.J. Toeplitz operators on generalised H^2 spaces / G.J. Murphy // Integral Eqations Operator Theory. – 1992. – vol. 15, № 5. – P. 825–852.
4. Murphy, G.J. Spectral and index theory for Toeplitz operators / G.J. Murphy // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. – 1991. – vol. 91, № 1. – P. 1–6.
5. Murphy, G.J. Toeplitz operators associated to unimodular algebras / G.J. Murphy // Integral Equations Operator Theory. – 2003. – vol. 46, № 3. – P. 363–375.
6. Pavone, M. Toeplitz operators on discrete groups / M. Pavone // J. Operator Theory. – 1992. – vol. 27, № 2. – P. 359–384.
7. Xu, Q. A note on Toeplitz operators on discrete groups / Q. Xu, X. Chen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – vol. 126, № 12. – P. 3625–3631.
8. Миротин, А.Р. Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группам / А.Р. Миротин // Матем. сборник. – 2011. – 202, № 5. – С. 101–116.
9. Миротин, А.Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А.Р. Миротин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.
10. Bottcher, A. Analysis of Toeplitz operators. Springer Monogr. Math / A. Bottcher, B. Silbermann // Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York. – 2006. – 671 p.
11. Дыба, Р.В. Теорема Нехари на компактных абелевых группах с линейно упорядоченной группой характеров / Р.В. Дыба // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 57–60.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 30.10.2013