МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА-ГЕЛЬДЕРА В ТЕОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

А.Д. Ходалевич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

JORDAN-HOLDER THEOREM IN THE THEORY OF UNIVERSAL ALGEBRAS OF MAL'CEV VARIETIES

A.D. Hodalevich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Изучаются некоторые свойства главных рядов конгруэнций мальцевских алгебр.

Ключевые слова: *универсальная алгебра, ряды конгруэнций, мальцевская алгебра.*

Some properties of the chief series of congruences of universal Mal'cev algebras are studied.

Keywords: *universal algebra, series of congruences, Mal'cev algebra.*

Введение

Начиная с известной работы Картера, Фишера, Хоукса [1], вначале в теории конечных групп, затем в других алгебраических системах сложилось направление исследований, связанное с получением новых свойств, дополняющих теорему Жордана-Гельдера. Отметим, что основные этапы этого направления и достаточно полная библиография отражены в работе Лафуенте [2]. Уточняя структурную теорему Жордана-Гельдера для рядов конгруэнций, в настоящей статье доказывается следующий результат: между факторами двух произвольных главных рядов ϕ-разрешимой универсальной алгебры A, принадлежащей мальцевскому многообразию, можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо нефраттиниевы. Как следствие, отсюда получаем аналогичные результаты работы [1] для конечных групп и результаты работы [3] для мультиколец.

Под термином «алгебра» в дальнейшем будем понимать универсальную алгебру. Все рассматриваемые алгебры предполагаются входящими в фиксированное мальцевское многообразие. Основные определения и обозначения взяты из работы [3].

Дополнительно отметим, что конгруэнции произвольной алгебры обозначаются греческими буквами. Если α – конгруэнция на алгебре A, то $\alpha x = \{y \mid (x, y) \in \alpha\}$ – класс эквивалентности алгебры A по конгруэнции α, $A/\alpha = \{\alpha x \mid x \in A\}$ – факторалгебра алгебры A по конгруэнции α. Если B – подалгебра алгебры A, то αB – совокупность всех классов эквивалентности αx, таких, что $x \in B$. Если α и β – конгруэнции на алгебре A, и $\alpha \subseteq \beta$, то конгруэнцию β/α на алгебре A/α назовем фактором на A. Очевидно, что $(\alpha x, \alpha y) \in \beta/\alpha$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \beta$. Через 0_A (или 0)и 1_A (или A^2) будем обозначать соответственно наименьший и наибольший элементы решетки конгруэнций алгебры A.

Будем пользоваться следующим определением централизуемости конгруэнций, эквивалентность которого определению Смита [4] доказана в работе [5].

1 Основные определения и леммы

***Определение* 1.1.** *Пусть α и β – конгруэнции на алгебре A. Тогда β централизует α (записывается: $\beta \subseteq C_A(\alpha)$), если на α существует такая конгруэнция $C(\alpha, \beta)$, что:*

1) *из $(x, y)\ \ C(\alpha, \beta)\ \ (x', y')$ всегда следует $(x, x') \in \beta$;*

2) *для любого элемента $(x, y) \in \beta$ всегда выполняется $(x, x) C(\alpha, \beta) (y, y)$;*

3) *если $(x, x)\ \ C(\alpha, \beta)\ \ (x, y)$, то $x = y$.*

Следующие свойства централизуемости, полученные Смитом [4], сформулируем в виде леммы.

***Лемма* 1.1.** *Пусть $\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Тогда:*

1) *существует единственная конгруэнция $C(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая определению* 1.1;

2) $\alpha \subseteq C_A(\beta)$;

3) *если $\beta \subseteq C_A(\gamma)$, то $\beta \subseteq C_A(\alpha\gamma)$.*

Из леммы 1.1 и леммы Цорна следует, что для произвольной конгруэнции α на алгебре A существует такая единственная наибольшая конгруэнция β, что $\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Эту конгруэнцию β будем называть централизатором конгруэнции α в A и обозначать $C_A(\alpha)$.

***Лемма* 1.2.** *Пусть* α_1, α_2 *– конгруэнции на алгебре* A, $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$, $\beta_i \subseteq C_A(\alpha_i)$, $i = 1,2$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\beta_1 \subseteq C_A(\alpha_2)$;

2) $C(\alpha_2, \beta) = \alpha_2^2 \cap C(\alpha_1, \beta)$, *где* $\beta \subseteq \beta_1 \cap \beta_2$;

3) *если* $(x,y)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (x,z)$, *либо*

$(x,x)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (y,z)$, *либо*

$(y,x)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (z,x)$ *то всегда* $y = z$.

4) *из* $(x,y)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (x',y')$ *всегда следует* $(y,y') \in \beta_1$.

Доказательство.

1) Очевидно, что $\alpha_2^2 \bigcap C(\alpha_1,\beta_1)$ – конгруэнция на α_2, удовлетворяющая определению 1.1. Значит, в силу п. 1) леммы 1.1, $\beta_1 \subseteq C_A(\alpha_2)$.

2) Так как $\beta \subseteq C_A(\alpha_1)$, то

$$\alpha_2^2 \bigcap C(\alpha_1,\beta) = C(\alpha_2,\beta).$$

3) Пусть $(x,y)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (x,z)$. Тогда $(x,x)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (x,x)$, $(y,x)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (y,x)$.

Применим мальцевский оператор P, $(P(x,x,y) = P(y,x,x) = y)$, для любых элентов x, y из A к последним трем соотношениям. Получаем,

$$(y,y) C(\alpha_1,\beta_1)(y,z).$$

Итак, $y = z$. Аналогичным образом доказываются остальные случаи.

4) Пусть $(x,y)\ \ C(\alpha_1,\beta_1)\ \ (x',y')$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$(x,y)C(\alpha_1,\beta_1)(x,y),$$
$$(x,x)C(\alpha_1,\beta_1)(x,x),$$
$$(x',x')C(\alpha_1,\beta_1)(x,x).$$

Следовательно,

$$(x', P(y,x,x'))C(\alpha_1,\beta_1)(x,y),$$

где P – мальцевский оператор. Тогда,

$$(x', P(y,x,x'))C(\alpha_1,\beta_1)(x',y')$$

и, в силу п. 3) доказываемой леммы, $P(y,x,x') = y'$. Так как $(y,y) \in \beta$, $(x,x') \in \beta$ и $(x',x') \in \beta$, то $(P(y,x,x'), y) \in \beta$. Таким образом $(y,y') \in \beta$. Лемма доказана.

Если α/β и γ/β – факторы алгебры A такие, что $C_{A/\beta}(\alpha/\beta) = \gamma/\beta$, то конгруэнцию γ обозначим как $C_A(\alpha/\beta)$ и назовем централизатором фактора α/β в A.

Сформулируем следующие свойства централизаторов конгруэнций, которые доказываются непосредственной проверкой. Предварительно напомним, что факторы α/β и γ/τ на алгебре A называются перспективными, если либо $\alpha = \beta\gamma$ и $\tau = \beta \cap \gamma$, либо $\gamma = \tau\alpha$ и $\beta = \tau \cap \alpha$.

***Лемма* 1.3.** *Пусть* $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ *– конгруэнции на алгебре* A. *Тогда:*

1) *если* $\beta \subseteq \alpha$, *то* $\beta \subseteq C_A(\alpha/\beta)$;

2) *если* $\beta \subseteq \alpha \subseteq \gamma$, *то*

$$C_A(\gamma/\beta) \subseteq C_A(\alpha/\beta) \cap C_A(\gamma/\alpha);$$

3) *если* $\beta \subseteq \alpha$, $\tau \subseteq \gamma$ *и факторы* α/β, , γ/τ *перспективны, то* $C_A(\alpha/\beta) = C_A(\gamma/\tau)$;

4) *если* $\alpha_z \subseteq \alpha_1$ *– конгруэнции на* A *и* $B \subseteq A$, *то* $C_A(\alpha_1/\alpha_2) \cap B^2 \subseteq C_B(\beta_1/\beta_2)$, *где* $\beta_i = B^2 \cap \alpha_i$, $i = 1,2$.

В дальнейшем мы будем часто ссылаться на следующий хорошо известный факт (доказательство см., например, [5]).

***Лемма* 1.4.** *Всякая подалгебра алгебры* A^2, *содержащая конгруэнцию* O_A, *является конгруэнцией на* A.

Пусть α – конгруэнция на алгебре A, B – подалгебра алгебры A, $\gamma \subseteq C_A(\alpha)$ и $\gamma B = A$. Обозначим

$$C(\alpha,\gamma,A,B) =$$
$$= \{(x,y) \in \alpha \mid (x,y)C(\alpha,\gamma)(b,b'), (b,b') \in B^2\}.$$

***Лемма* 1.5.** *Пусть определено множество* $C(\alpha,\gamma,A,B) = \beta$. *Тогда* β *– конгруэнция на* A *и* $\beta \cap B^2 = \alpha \cap B^2$. *Если к тому же* $\alpha \subseteq \gamma$, *либо* $\gamma \cap B^2 = O_B$, *то* $\beta B = B$.

Доказательство. Так как $\gamma B = A$, то для любого элемента $x \in A$ всегда найдется такой элемент $b \in B$, что $(x,b) \in \gamma$. Следовательно,

$$(x,x)\tau(b,b),$$

где $\tau = C(\alpha,\gamma)$. Итак, $O_A \subseteq \beta$. Пусть теперь $(x_i,x_i) \in \beta$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда

$$(x_i,x_i)\tau(b_i,b_i),$$

где $(b_i,b_i) \in B^2$. Следовательно, для любой n-арной операции ω получаем

$$(x_1 \ldots x_n\omega, x_1 \ldots x_n\omega)\tau(b_1 \ldots b_n\omega, b_1 \ldots b_n\omega).$$

Таким образом, в силу леммы 1.4, β – конгруэнция на A.

Пусть $(x,y) \in B^2 \cap \alpha$. Тогда, очевидно, $(x,y)\tau(x,y)$, т.е. $(x,y) \in B^2 \cap \beta$. Так как $B^2 \cap \beta \subseteq B^2 \cap \alpha$, то $\beta \cap B^2 = \alpha \cap B^2$.

Пусть теперь $\alpha \subseteq \gamma$, либо $\gamma \cap B^2 = O_B$. Покажем, что $\beta B = B$. Допустим противное. Тогда найдется такая пара $(x,b) \in \beta$, что $x \notin B$ и $b \in B$.

Из определения β следует, что существует такая пара $(b', b'') \in B^2$, что $(x,b)\tau(b',b'')$ и, очевидно, $(b',b'')\tau(b',b'')$. Если $\alpha \subseteq \gamma$, то $(b',b'') \in \alpha \subseteq \gamma$, и, значит, $(b',b')\tau(b'',b'')$. Теперь для мальцевского оператора P, применяемого для последних трех соотношений относительно τ, получаем

$$(x, P(b,b'',b'))\tau(b'',b'').$$

Значит, $x = P(b,b'',b') \in B$. Тем самым показано, что $\beta B = B$.

Если же $\gamma \cap B^2 = O_B$, то по лемме 1.2 $(b',b'') \in \gamma \cap B^2 = O_B$. Следовательно, $b = b''$, т.е. $(x,b)\tau(b',b)$. Но в этом случае из п. 3) леммы 1.2 следует, что $x = b' \in B$. Противоречие. Итак, $\beta B = B$. Лемма доказана.

***Лемма* 1.6.** *Пусть α_1, α_2 – конгруэнции на алгебре A, $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$ и B – подалгебра алгебры A. Тогда для любой конгруэнции $\gamma_1 \subseteq C_A(\alpha_1)$ такой, что $\gamma_1 B = A$ имеет место включение*

$$C(\alpha_2, \gamma_1, A, B) \subseteq C(\alpha_1, \gamma_1, A, B).$$

В частности, если $\alpha_2 = \gamma_1$, то

$$\alpha_2 = C(\alpha_1, \alpha_2, A, B) \cap C(\alpha_2, \alpha_2, A, B).$$

Доказательство. По лемме 1.2 $\gamma_1 \subseteq C_A(\alpha_2)$. Обозначим $\beta_1 = C(\alpha_1, \gamma_1, A, B)$, $\beta_2 = C(\alpha_2, \gamma_1, A, B)$. Пусть $(x,y) \in \beta_2$. Тогда $(x,y)\tau_2(b,b')$, где $\tau_2 = C(\alpha_2, \gamma_1)$, $(b,b') \in B^2$. Из леммы 1.2 следует, что $\tau_2 \subseteq \tau_1$, где $\tau_1 = C(\alpha_1, \gamma_1)$. Следовательно, $(x,y) \in \beta_1$. Итак $\beta_2 \subseteq \beta_1$.

Пусть $\alpha_2 = \gamma_1$. Так как $\beta_2 \subseteq \alpha_2$, то $\beta_2 \subseteq \alpha_2 \cap \beta_1$. Докажем обратное включение. Пусть $(x,y) \in \alpha_2 \cap \beta_1$. Тогда $(x,y)C(\alpha_1,\alpha_2)(b,b')$ и $(b,b') \in B^2$. Так как $(x,y) \in \alpha_2$, $(x,b) \in \alpha_2$ и $(y,b') \in \alpha_2$, то $(b,b') \in \alpha_2$. Теперь из равенства $\alpha_2^2 \cap C(\alpha_1,\alpha_2) = C(\alpha_2,\alpha_2)$ следует, что $(x,y)C(\alpha_2,\alpha_2)(b,b')$, т. е. $(x,y) \in \beta_2$. Тем самым показано, что $\beta_2 \supseteq \alpha_2 \cap \beta_1$. Значит $\beta_2 = \alpha_2 \cap \beta_1$. Лемма доказана.

Напомним, что конгруэнция $\alpha \neq O_A$ на алгебре A называется минимальной, если из включения $\beta \subset \alpha$ всегда следует $\beta = O_A$. Фактор α / β на алгебре A называется главным, если α / β – минимальная конгруэнция на факторалгебре A / β.

Фактор α / β алгебры A назовем дополняемым в A, если на факторалгебре A / β существует хотя бы одна такая подалгебра B / β, что $\alpha B/\beta = A/\beta$ и $\alpha/\beta \cap B^2/\beta = 0$. Подалгебру B будем называть дополнением к α / β в A. Конгруэнция α дополняема в A, если дополняем в A фактор $\alpha / 0$.

***Лемма* 1.7.** *Пусть α_1, α_2 – конгруэнции на алгебре A такие, что $\alpha_2 \subset \alpha_1$, $\alpha_2 \subseteq C_A(\alpha_1)$ и B – дополнение к α_2 в A. Тогда, если $\beta_1 = C(\alpha_1, \alpha_2, A, B)$, $\beta_2 = C(\alpha_2, \alpha_2, A, B)$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\beta_1 \cap \alpha_2 = \beta_2 = O_A$;

2) $\alpha_1 \cap B^2 \neq O_B$. $\beta_1 \subset \alpha_1$ *и* $\beta_1 \neq O_A$;

3) *если α_1/α_2 – главный фактор на A, то β_1 – минимальная конгруэнция на A и*

$$\alpha_1/\alpha_2 = \beta_1\alpha_1/\alpha_2.$$

Доказательство. Пусть $(x,y) \in \beta_2$. Тогда $(x,y)C(\alpha_2,\alpha_2)(b,b')$, где $(b,b') \in B^2 \cap \alpha_2 = O_B$. Следовательно, $b = b'$ и по лемме 1.3 $x = y$. Итак, $\beta_2 = O_A$. Из леммы 1.6 теперь следует, что $\beta_1 \cap \alpha_2 = \beta_2 = O_A$. Пусть $\alpha_1 \cap B^2 = O_B$. Тогда

$$A/\alpha_1 = \alpha_1 B/\alpha_1 \simeq B \simeq \alpha_2 B/\alpha_2 = A/\alpha_2.$$

Противоречие, которое показывает, что $\alpha_1 \cap B^2 \neq O_B$. Из леммы 1.5 следует, что $\beta_1 \cap B^2 = \alpha_1 \cap B^2$, т. е. $\beta_1 \neq O_A$. А так как $\beta_1 \subseteq \alpha_1$, $\alpha_1 B = A$ и $\beta_1 B = B$, то $\beta_1 \subset \alpha_1$.

Пусть теперь α_1/α_2 – главный фактор на A. Если $\beta_1\alpha_2 = \alpha_2$, то $\beta_1 \subseteq \alpha_2$. Тогда из равенства $\beta_1 \cap \alpha_2 = \beta_2$ следует, что $\beta_1 = \beta_2 = O_A$. Противоречие. Следовательно, $\beta_1\alpha_2 \supset \alpha_2$. Так как $\beta_1 \subset \alpha_1$, $\alpha_2 \subset \alpha_1$ и α_1/α_2 – главный фактор на A, то $\beta_1\alpha_2 = \alpha_1$. Но фактор $\beta_1\alpha_2/\alpha_2$ перспективен β_1, значит, β_1 – минимальная конгруэнция на A. Лемма доказана.

Фактор α / β алгебры A назовем абелевым в A, если $C_A(\alpha/\beta) \supseteq \alpha$. Конгруэнцию α на алгебре A назовем абелевой, если фактор α / O_A абелев. В частности, если $\alpha = A^2$, то говорят, что A – абелева алгебра.

Конгруэнцию α на алгебре A назовем разрешимой в A, если существует такая цепь конгруэнций алгебры A

$$O_A = \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq ... \alpha_t = \alpha,$$

что фактор α_i/α_{i-1} абелев в A для любого $i = 1, ..., t$.

В частности, если $\alpha = A^2$, то получаем определение разрешимой алгебры.

***Лемма* 1.8.** *Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A, $\beta \subseteq \alpha$ и α разрешима в A. Тогда β также разрешима в A.*

Доказательство. Пусть $O_A = \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq .. \alpha_t = \alpha$ – такая цепь конгруэнций на A, что

$C_A(\alpha_i/\alpha_{i-1}) \supseteq \alpha_i$ для любого $i=1,\dots,t$. Рассмотрим следующую цепь конгруэнций:

$$O_A = \beta_0 \subseteq \beta_1 \subseteq \dots \beta_t = \beta,$$

где $\beta_i = \alpha_i \cap \beta$ для любого $i=1,\dots,t$. Так как фактор $\beta_i/\beta_{i-1} = \alpha_i \cap \beta/\alpha_{i-1} \cap \beta$ перспективен фактору $(\alpha_i \cap \beta)\alpha_{i-1}/\alpha_{i-1} = \beta_i\alpha_{i-1}/\alpha_{i-1}$ и по лемме 1.3 $C_A(\beta_i\alpha_{i-1}/\alpha_{i-1}) \supseteq \beta_i\alpha_{i-1} \supseteq \beta_i$, то и $C_A(\beta_i/\beta_{i-1}) \supseteq \beta_i$ для любого $i=1,\dots,t$. Следовательно, β разрешима в A. Лемма доказана.

***Лемма* 1.9.** *Пусть α – конгруэнция на алгебре A, B и C – подалгебры алгебры A, причем $\alpha B = B$. Тогда $\alpha(B \cap C) = \alpha B \cap \alpha C$.*

Доказательство. Очевидно, что $\alpha(B \cap C) \subseteq \alpha B \cap \alpha C$. Покажем обратное включение. Пусть $x \in \alpha B \cap \alpha C$. Так как $x \in \alpha C$, то найдется такой элемент $c \in C$, что $(x,c) \in \alpha$. Из того, что $x \in B$ и $(x,c) \in \alpha$ следует, что $c \in \alpha B = B$. Таким образом $c \in B \cap C$ и, значит, $x \in \alpha(B \cap C)$. Итак, $\alpha B \cap \alpha C \subseteq \alpha(B \cap C)$. Лемма доказана.

***Лемма* 1.10.** *Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A, B и C – дополнения к α и β в A соответственно. Тогда*

$$\alpha\beta \cap (B \cap C)^2 = 0_A.$$

Доказательство. Пусть $(x,y) \in \alpha\beta \cap (B \cap C)^2$. Тогда $(x,y) \in \alpha$, $(z,y) \in \beta$. Так как $x \in B$ и $\alpha B = B$, то $z \in B$. А так как $y \in C$ и $\beta C = C$, то $z \in C$. Таким образом $z \in B \cap C$ и, следовательно, $(x,z) \in (B \cap C)^2$, $(z,y) \in (B \cap C)^2$. Очевидно, что $\alpha \cap (B \cap C)^2 \subseteq \alpha \cap B^2 = O_B$. Значит, $x = z$. Аналогичным образом, из $\beta \cap (B \cap C)^2 \subseteq \beta \cap C^2 = O_C$ следует, что $y = z$. Таким образом $x = y$. Лемма доказана.

***Лемма* 1.11.** *Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A и B – подалгебра алгебры A. Тогда $(\alpha\beta)B = \alpha(\beta B)$.*

Доказательство этой леммы очевидно.

***Лемма* 1.12.** *Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A такие, что $\alpha \cap \beta = O_A$. Тогда $\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Если к тому же α и β абелевы в A, то $\alpha\beta$ абелева в A.*

Доказательство. Определим на α бинарное соотношение τ следующим образом: $(x,y)\tau(x',y')$ тогда и только тогда, когда $(x,x') \in \beta$, $(y,y') \in \beta$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\tau = C(\alpha,\beta)$.

Пусть α,β – абелевы конгруэнции. Так как $\beta \subseteq C_A(\beta)$, то по лемме 1.1 $\beta \subseteq C_A(\alpha\beta)$ и, значит, $\alpha\beta \subseteq C_A(\beta)$. Аналогичным образом получаем, что $\alpha\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Следовательно, $\alpha\beta \subseteq C_A(\alpha\beta)$. Лемма доказана.

Если алгебра A обладает минимальными конгруэнциями, то конгруэнция, порожденная всеми ее минимальными конгруэнциями, называется цоколем и обозначается через $Soc(A)$.

Напомним, что согласно [3], конгруэнция π на алгебре A называется фраттиниевой, если $\pi H \neq A$ для любой собственной подалгебры H алгебры A. Тогда фактор α/β алгебры A назовем фраттиниевым, если α/β – фраттиниева конгруэнция на A/β.

***Лемма* 1.13.** *Пусть α – абелева конгруэнция на алгебре A. Тогда если α удовлетворяет условиям максимальности и минимальности для подалгебр, являющихся конгруэнциями в A, и всякая минимальная конгруэнция алгебры A, входящая в α, нефраттиниева, то α дополняема в A и $\alpha \subseteq Soc(A)$. Если, кроме того, α – наибольшая абелева конгруэнция алгебры A и конгруэнция $\gamma = C_A(\alpha)$ разрешима в A, то $\gamma = \alpha$.*

Доказательство. Пусть цепь

$$O_A = \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq \dots \alpha_t = \alpha$$

конгруэнций алгебры A такова, что α_i/α_{i-1} – главный фактор A для любого $i=1,\dots,t$. Докажем первые два утверждения леммы индукцией по t. Пусть $t=1$. Тогда по условию конгруэнция α_1 нефраттиниева, следовательно, в A найдется такая собственная подалгебра M, что $\alpha_1 M = A$. Обозначим $\gamma_1 = C_A(\alpha_1)$. Тогда, в силу абелевости α_1, $\gamma_1 M = A$ и по лемме 1.5 $\beta_1 = C(\alpha_1,\gamma_1,A,M)$ – конгруэнция на A такая, что $\beta_1 \cap M^2 = \alpha_1 \cap M^2$ и $\beta_1 M = M$. Поэтому, если $\alpha_1 \cap M^2 \neq O_M$, то $\beta_1 \subset \alpha_1$ и $\beta_1 \neq O_A$. Противоречие с минимальностью α_1. Итак $\alpha_1 \cap M^2 = O_M$, т.е. M – дополнение к α_1 в A.

Пусть теперь $t>1$ и конгруэнция α_{t-1} дополняется подалгеброй H алгебры A. По лемме 1.7 $\beta = C(\alpha,\alpha_{t-1},A,H)$ – минимальная конгруэнция на A. Следовательно, β обладает дополнением B в A. Обозначим $T = H \cap B$. Покажем, что T – дополенние к α в A.

Так как $\alpha_{t-1}\beta = \alpha$, $\beta H = H$, то с учетом лемм 1.9 и 1.11 получаем, что

$$\alpha T = \alpha_{t-1}\beta(H \cap B) = \alpha_{t-1}(\beta H \cap \beta B) =$$
$$= \alpha_{t-1}(H \cap A) = \alpha_{t-1}H = A.$$

А по лемме 1.10

$$\alpha \cap T^2 = \alpha_{t-1}\beta \cap (H \cap B)^2 = O_T.$$

Следовательно, T – дополнение к α в A.

Если $t=1$, то $\alpha_1 \subseteq Soc(A)$. Пусть по индукции $\alpha_{t-1} \subseteq Soc(A)$. Так как $\alpha = \alpha_{t-1}\beta$ и β – минимальная конгруэнция на A, то $\alpha \subseteq Soc(A)$.

Докажем теперь третье утверждение леммы. Пусть B – дополнение к α в A и $\gamma = C_A(\alpha) \supset \alpha$. Так как $\alpha \subseteq C_A(\gamma)$, то по лемме 1.7 на A существует такая конгруэнция $\beta \neq O_A$, что $\beta \subset \gamma$ и $\beta \cap \alpha = O_A$. Ввиду леммы 1.8, конгруэнция β разрешима в A. Значит, на A существует такая абелева конгруэнция $\tau \neq O_A$, что $\tau \subseteq \beta$ и $\tau \cap \alpha = O_A$. Но тогда по лемме 1.12 $\tau\alpha$ – абелева конгруэнция на A и $\tau\alpha \supset \alpha$. Полученное противоречие показывает, что $C_A(\alpha) = \alpha$. Лемма доказана.

Пусть α_i – конгруэнция на алгебре A_i, $i = 1,\ldots,n$. Тогда бинарное отношение α на алгебре $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ такое, что $(a_1,\ldots,a_n)\alpha(a'_1,\ldots,a'_n)$ тогда и только тогда, когда $(a_i, a'_i) \in \alpha_i$ для любого $i = 1,\ldots,n$ является конгруэнцией на A. В этом случае будем говорить, что α является прямым произведением конгруэнций α_i и обозначать $\alpha = \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$.

Назовем конгруэнцию $\beta \subseteq \alpha$ подпрямым произведением конгруэнций α_i, если $\beta^{\pi_i} = \alpha_i$, где π_i – проектирование β на α_i.

***Лемма* 1.14.** *Пусть α_i – конгруэнции на алгебре A, β – конгруэнция на A такая, что $\beta \supseteq \alpha_i$ для любого $i = 1,\ldots,n$ и $\gamma = \bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i$. Тогда фактор β/γ изоморфен подпрямому произведению конгруэнций β/α_i.*

Доказательство. Можно считать, что $\gamma = O_A$. Обозначим $\tau = \beta/\alpha_1 \times \beta/\alpha_2 \times \ldots \times \beta/\alpha_n$. Тогда $(\alpha_1 x_1,\ldots,\alpha_n x_n)\tau(\alpha_1 y_1,\ldots,\alpha_n y_n)$ в том и только в том случае, когда $(x_i, y_i) \in \beta$, $i = 1,2,\ldots,n$. Легко проверить, что отображение

$$\omega : \beta \to \beta/\alpha_1 \times \beta/\alpha_2 \times \ldots \times \beta/\alpha_n$$

такое, что для любой пары $(x, y) \in \beta$,

$$(x, y)^{\omega} = (\alpha_1 x,\ldots,\alpha_n x)\tau(\alpha_1 y,\ldots,\alpha_n y)$$

является изоморфизмом конгруэнции β на подпрямое произведение конгруэнций β/α_i. Лемма доказана.

***Лемма* 1.15.** *Подпрямое произведение абелевых конгруэнций является абелевой конгруэнцией.*

Доказательство. Пусть α_i – абелева конгруэнция на алгебре A_i, $i = 1,\ldots,n$. Покажем, что $\alpha = \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ – абелева конгруэнция на алгебре A. Можно считать, что i=1,2. Обозначим $\beta_i = C_A(\alpha_i)$ и определим на α бинарное отношение τ следующим образом:

$$((x_1, x_z),(y_1, y_z))\tau((x'_1, x'_2),(y'_1, y'_2))$$

тогда и только тогда, когда

$$(x_1, y_1)C(\alpha_1, \beta_1)(x'_1, y'_1) \text{ и } (x_2, y_2)C(\alpha_2, \beta_2)(x'_2, y'_2).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что τ – конгруэнция, удовлетворяющая определению 1.1. Так как $(x_1, x'_1) \in \beta_1$ и $(x_2, x'_2) \in \beta_2$, , то $(x_1, x_2)\beta(x'_1, x'_2)$, где $\beta = \beta_1 \times \beta_2 \supseteq \alpha$. Это и означает, что $\beta \subseteq C_A(\alpha)$, т.е. α – абелева конгруэнция на A. Если теперь γ – конгруэнция на A такая, что $\gamma \subseteq \alpha$, то по лемме 1.2 $\beta \subseteq C_A(\gamma)$. Следовательно, γ абелева. Лемма доказана.

Заметим, что из леммы 1.15 и леммы 1.3 следует, что класс всех абелевых алгебр является наследственной формацией.

Согласно [3], для любой подалгебры H алгебры A обозначим через H_A конгруэнцию на A, порожденную всеми такими конгруэнциями π на A, что $\pi H = H$.

Лемма 1.16. *Пусть α/β – главный фактор на алгебре A, M – подалгебра алгебры A такая, что $\beta M = M$ и $\alpha M = A$. Тогда фактор $\alpha M_A/M_A$ перспективен α/β. Если к тому же α/β – абелев фактор в A дополняемый M в A и $\gamma = C_A(\alpha/\beta)$, то M дополняет фактор $\gamma/M_A = \alpha M_A/M_A$.*

Доказательство. Очевидно, что $\alpha \cap M_A \supseteq \beta$. Если $\alpha \cap M_A \supset \beta$, то из того, что $\alpha \supseteq \alpha \cap M_A$ и α/β – главный фактор следует, что $\alpha \cap M_A = \alpha$. Но это противоречит тому, что $\alpha M = A$. Значит, $\alpha \cap M_A = \beta$ и фактор $\alpha M_A/M_A$ перспективен фактору α/β. Пусть α/β – абелев фактор. Тогда $\gamma = C_A(\alpha M_A/M_A) \supseteq \alpha M_A$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $M_A = O_A$. Тогда α – минимальная конгруэнция на A и $M^2 \cap \alpha = O_M$. Так как $\alpha \subseteq C_A(\gamma)$, то по лемме 1.5 на γ существует такая конгруэнция $\tau \subseteq \gamma$, что $\tau M = M$ и $\tau \cap M^2 = \gamma \cap M^2$. Поэтому, если $\gamma \cap M^2 \neq O_M$, то $\tau \neq O_A$. Противоречие с тем, что $M_A = O_A$. Следовательно, $\gamma \cap M^2 = O_M$. Теперь очевидно, что

$$A/\alpha = \alpha M/\alpha \simeq M \simeq \gamma M/\gamma = A/\gamma.$$

Отсюда следует, что $\alpha = \gamma$. Лемма доказана.

Лемма 1.17. *Пусть α/β – главный фактор алгебры A и пусть γ – конгруэнция на A. Тогда либо фактор $\alpha\gamma/\beta\gamma$, либо фактор $\alpha \cap \gamma/\beta \cap \gamma$ перспективен α/β.*

Доказательство. Пусть $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Тогда фактор $\alpha\gamma/\beta\gamma$ перспективен фактору $\alpha/\alpha \cap \beta\gamma$ и $\alpha \cap \beta\gamma \subset \alpha$. Так как $\alpha \cap \beta\gamma = \beta(\alpha \cap \gamma) \supseteq \beta$, то $\alpha \cap \beta\gamma = \beta$.

Пусть $\alpha\gamma = \beta\gamma$. Тогда $\alpha = \beta(\alpha \cap \gamma)$. Следовательно, $\alpha/\beta = \beta(\alpha \cap \gamma)/\beta$ и последний фактор перспективен фактору $\alpha \cap \gamma/\beta \cap \gamma$. Лемма доказана.

Факторы α/β и γ/τ алгебры A назовем проективными, если в A существуют такие факторы α/β, $\alpha/\beta = \pi_i/\phi_i, \ldots, \pi_n/\phi_n = \gamma/\tau$, что для любого $i = 1, \ldots, n-1$ факторы π_i/ϕ_i и π_{i+1}/ϕ_{i+1} перспективны.

***Определение* 1.3.** *Пусть α/β – нефраттиниев абелев главный фактор алгебры A, $\gamma = C_A(\alpha/\beta)$ и пусть Δ – пересечение всех тех конгруэнций τ из A, для которых $\tau \subseteq \gamma$, фактор γ/τ нефраттиниев и проективен фактору α/β. Тогда фактор γ/Δ назовем короной, соответствующей фактору α/β (или, иначе, α/β-короной алгебры A*).

Заметим, что если α/β – нефраттиниев абелев главный фактор алгебры A, то по лемме 1.5 всегда существует дополнение к α/β. Следовательно, в силу леммы 1.16, α/β – корона алгебры A всегда существует.

***Лемма* 1.18.** *Пусть A – алгебра, обладающая главными рядами конгруэнций, α/β – абелев нефраттиниев главный фактор и γ/Δ – α/β-корона алгебры A. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) $\gamma/\Delta \subseteq Soc(A/\Delta)$;

2) *фактор γ/Δ дополняем в A/Δ;*

3) *если α_1/β_1 – главный фактор алгебры A, то включения $\Delta\beta_1 \subset \Delta\alpha_1 \subseteq \gamma$ имеют место в точности тогда, когда фактор α_1/β_1 нефраттиниев и проективен фактору α/β.*

Доказательство. Пусть τ – пересечение некоторых конгруэнций $\pi_1, \ldots, \pi_t$ алгебры A, что $\pi_i \subseteq \gamma$, причем фактор γ/π_i нефраттиниев и проективен фактору α/β. Индукцией по t покажем, что $\gamma/\tau \subseteq Soc(A/\tau)$, фактор γ/τ дополняем в A, и если главный фактор α_1/β_1 алгебры A таков, что $\tau \subseteq \beta_1$ и $\alpha_1 \subseteq \gamma$, то фактор α_1/β_1 нефраттиниев и проективен фактору α/β. Можно считать, что $t > 1$ и

$$\tau_i = \pi_1 \cap \ldots \cap \pi_{i-1} \cap \pi_{i+1} \cap \ldots \cap \pi_t \neq \tau$$

для всех $i = 1, \ldots, t$. Кроме того, не теряя общности, можно положить $\tau = O_A$. Так как γ/π_1 – главный фактор алгебры A и $\pi_1\tau_1 \supset \pi_1$, то факторы γ/π_1 и τ_1/O_A перспективны. Следовательно, τ_1 – минимальная конгруэнция на A. По индукции $\gamma/\tau_1 \subseteq Soc(A/\tau_1)$. Так как факторы γ/τ_1 и π_1/O_A перспективны, то решетки конгруэнций алгебры A, заключенных соответственно между τ_1 и γ и между O_A и π_1 изоморфны. Значит, $\pi_1 \subseteq Soc(A)$. Поэтому $\gamma = \pi_1\tau_1 \subseteq Soc(A)$.

Покажем, что конгруэнция γ дополняема в A. Пусть π – минимальная конгруэнция алгебры A и $\pi \subseteq \gamma$. Так как $\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_t = O_A$, то найдется $r \in \{1, \ldots, t\}$ такое, что $\pi\pi_r$. Если π – фраттиниева конгруэнция, то фраттиниевым оказывается и фактор $\gamma\pi_r = \pi\pi_r/\pi_r$, что невозможно. Следовательно, любая минимальная конгруэнция алгебры A, входящая в γ, является нефраттиниевой. По лемме 1.14 конгруэнция γ изоморфна подпрямому произведению абелевых конгруэнций $\gamma/\pi_1, \ldots, \gamma/\pi_t$. Следовательно, по лемме 1.15 γ абелева. Теперь из леммы 1.13 следует, что конгруэнция γ дополняема в A.

Пусть M – дополнение к γ в A. По лемме 3.14 [3] в A найдется такая конгруэнция γ_1, что $\gamma_1\alpha_1 = \gamma$ и $\gamma_1 \cap \alpha_1 = O_A$. Если $(\gamma_1\beta_1)M = A$, то $A/\gamma_1\beta_1 \simeq A/\gamma$, противоречие. Следовательно, $(\gamma_1\beta_1)M \neq A$, и по лемме 1.11 $(\alpha_1\gamma_1\beta_1)M = A$. Это означает, что фактор α_1/β_1 нефраттиниев. Покажем, что факторы α_1/β_1 и α/β проективны. Пусть $\pi_1\alpha_1 \neq \pi_1\beta_1$. Тогда по лемме 1.17 фактор α_1/β_1 перспекитивен фактору $\pi_1\alpha_1/\pi_1\beta_1$. Если $\pi_1\alpha_1 \neq \gamma$, то $\pi_1\alpha_1 = \pi_1\beta_1$, противоречие. Значит, $\pi_1\alpha_1/\pi_1\beta_1 = \gamma/\beta_1$. Последний фактор проективен фактору α/β, следовательно, факторы α_1/β_1 и α/β проективны. Пусть $\pi_1\alpha_1 = \pi_1\beta_1$. Тогда по лемме 1.17 факторы α_1/β_1 и $\alpha_1 \cap \pi_1/\beta_1 \cap \pi_1$ перспективны. Если $\tau_1(\alpha_1 \cap \pi_1) = \tau_1(\beta_1 \cap \pi_1)$, то последний фактор по лемме 1.17 перспективен фактору $(\tau_1 \cap \alpha_1 \cap \pi_1)/(\tau_1 \cap \beta_1 \cap \pi_1) = O_A/O_A$. Противоречие. Следовательно, в силу леммы 1.17, фактор $(\alpha_1 \cap \pi_1)/(\beta_1 \cap \pi_1)$ перспективен фактору $\tau_1(\alpha_1 \cap \pi_1)/\tau_1(\beta_1 \cap \pi_1)$. Но по индукции последний фактор проективен фактору α/β. Значит, факторы α_1/β_1 и α/β проективны.

Покажем теперь, что корона γ/Δ удовлетворяет условию 3). Пусть α_1/β_1 – такой главный фактор алгебры A, что $\Delta\beta_1 \subset \Delta\alpha_1 \subseteq \gamma$. Тогда факторы α_1/β_1 и $\Delta\alpha_1/\Delta\beta_1$, в силу леммы 1.17, перспективны. Так как $\Delta\alpha_1/\Delta\beta_1$ – главный фактор в A, то, как показано выше, этот фактор нефраттиниев и перспективен фактору α/β. Но это означает, что и фактор α_1/β_1 нефраттиниев и проективен фактору α/β.

Обратно, пусть α_1/β_1 – нефраттиниев главный фактор алгебры A, проективный фактору α/β. В силу леммы 1.3, $\alpha_1 \subseteq \gamma$. Предположим, что $\Delta\beta_1 = \Delta\alpha_1$. Тогда $\alpha_1 = \beta_1(\alpha_1 \cap \Delta)$. Пусть M – подалгебра алгебры A такая, что $\alpha_1 M = A$ и $\beta_1 M = M$. По лемме 1.16 фактор γ/M_A нефраттиниев и перспективен фактору α_1/β_1. Значит, $\Delta \subseteq M_A$. Но тогда $\alpha_1 = \beta_1(\alpha_1 \cap \Delta) \subseteq M_A$. Противоречие Таким образом, $\Delta\beta_1 \subset \Delta\alpha_1$. Лемма доказана.

2 Основной результат

Алгебру A назовем ϕ-разрешимой, если она обладает главным рядом все фраттиниевые главные факторы которого абелевы.

***Теорема* 2.1.** *Пусть A – ϕ-разрешимая алгебра. Тогда между факторами двух произвольных главных рядов A можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо нефраттиниевы.*

Доказательство. Пусть α/β – главный фактор алгебры A. По теореме Жордана-Гельдера для рядов конгруэнций (см., например, теорему 8.4.2 [7]) любой главный ряд конгруэнций алгебры A содержит одно и то же число факторов, проективных фактору α/β. Поэтому достаточно установить, что в любых двух главных рядах A содержится по одинаковому числу нефраттиниевых факторов, проективных фактору α/β.

Пусть α/β неабелев фактор. Тогда, в силу леммы 1.3, каждый главный ряд A содержит лишь один фактор, проективный фактору α/β, и по условию все такие факторы нефраттиниевы.

Пусть α/β абелев фактор. Предположим, что A имеет нефраттиниев главный фактор π/τ, проективный фактору α/β. Обозначим через γ/Δ π/τ-корону. Тогда ввиду утверждения 3) леммы 1.18 каждый главный ряд конгруэнций алгебры A содержит точно t нефраттиниевых факторов, проективных фактору α/β, где t – длина участка главного ряда A, заключенного между Δ и γ. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter, R.* Extreme classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes. – J. Algebra, 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.

2. *Lafuente, J.* Maximal subgroups and the Jordan-Holder theorem / J. Lafuente. – J. Austral. Math. Soc. 1989. – Vol. 46, № 3. – P. 356–364.

3. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // М. : Наука, 1989. – 256 с.

4. *Smith, J.D.H.* Mal'cev Varieties / J.D.H. Smith // Lest. Notes. Math. 1976. – Vol. 554. – 158 p.

5. *Ходалевич, А.Д.* Формационные свойства нильпотентных алгебр / А.Д. Ходалевич // Вопросы алгебры. – Гомель : Изд-во Гомельского ун-та, 1992. – Вып. 7. – С. 76–85.

6. *Gaschutz, W.* Praefrattinigruppen / W. Gaschutz // Arch. Math. 1962. – Bd.13, № 3. – S. 418–426.

7. *Холл, М.* Теория групп / М. Холл // М. : ИЛ, 1962. – 468 с.

Поступила в редакцию 25.10.10.