УДК 517.444

ТЕОРЕМА О СВЕРТКЕ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА

И.С. Ковалева, А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

CONVOLUTION THEOREM FOR THE MARKOV – STIELTJES TRANSFORMATION

I.S. Kovaliova, A.R. Mirotin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Устанавливается теорема о свертке для преобразования Маркова – Стилтьеса и дается ее применение к решению одного класса сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: *интегральное преобразование, функция Маркова – Стилтьеса, свертка, интегральное уравнение.*

A convolution theorem for the Markov – Stieltjes transformation is stated and its application to a class of singular integral equations is given.

Keywords: *integral transform, Markov – Stieltjes function, convolution, integral equation.*

Введение

Общее определение преобразования Стилтьеса мер над полугруппой было дано в [1, глава 6]. В случае аддитивной полугруппы Z_+ неотрицательных целых чисел оно приводит к следующему интегральному преобразованию.

***Определение* 0.1** [1]. *Преобразованием Маркова – Стилтьеса измеримой функции* $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ *будем называть функцию, определяемую соотношением*

$$Sf(z)=\int_0^1\frac{f(t)}{1-tz}dt\ . \qquad (0.1)$$

(Терминология мотивирована тем обстоятельством, что в теории приближений функции вида (0.1) называются функциями типа Маркова – Стилтьеса, см., например, [2]). При этом предполагается, что интеграл существует как интеграл Лебега или в смысле главного значения. Последнее означает, что при $z\in[1,\infty)$ он понимается как предел

$$P\int_0^1\frac{f(t)}{1-tz}dt:=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\{t\in[0,1]:|t-z^{-1}|>\varepsilon\}}\frac{f(t)}{1-tz}dt.$$

***Пример* 0.1.** Пусть $f(t)=(t(1-t))^{-1/2}$. С помощью замены $t=x^2/(1+x^2)$ нетрудно подсчитать, что в этом случае $Sf(z)=(1-z)^{-1/2}$, если $z\notin[1,\infty)$ (берется главное значение корня), но $Sf(z)=0$ при $z\in[1,\infty)$.

Как известно, свертка является одной из важнейших операций в анализе и его приложениях (см., например, [3]). Теорема о свертке для классического преобразования Стилтьеса была доказана в работе [4], там же было дано ее применение к решению одного класса сингулярных интегральных уравнений. В настоящей работе аналогичные результаты устанавливаются для преобразования Маркова – Стилтьеса. Указаны также и другие следствия основной теоремы.

1 Свойства преобразования Маркова – Стилтьеса

Нам понадобится ряд свойств рассматриваемого преобразования.

***Теорема* 1.1.** *При* $f\in L^1[0,1]$ *функция* Sf *определена и аналитична в комплексной плоскости с разрезом вдоль луча* $[1,\infty)$.

Доказательство. При $z\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ интеграл в (0.1) существует как интеграл Лебега, поскольку при этих z имеет место неравенство

$$\min_{t\in[0,1]}|1-tz|=|1-t_z z|>0.$$

Докажем аналитичность функции Sf в области $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$. Для любой точки $s_0\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ рассмотрим окрестность $U(s_0)$, замыкание $\bar U(s_0)$ которой не пересекается с лучом $[1,\infty)$. Тогда

$$M=\max_{\substack{s\in\bar U(s_0)\\0\le t\le1}}\frac{1}{\left(1-ts\right)^2}=\frac{1}{\min\limits_{\substack{s\in\bar U(s_0)\\0\le t\le1}}\left(1-ts\right)^2}=\frac{1}{\left(1-t_1s_1\right)^2}<\infty.$$

Поэтому при всех $s\in U(s_0),t\in[0,1]$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{f(t)}{1-ts}\right)\right|=\left|\frac{tf(t)}{\left(1-ts\right)^2}\right|\le M\left|f(t)\right|.$$

Поскольку $M\left|f(t)\right| \in L^1\left[0,1\right]$, функция Sf дифференцируема в любой точке $s_0 \in \mathbb{C} \setminus [1,\infty)$ по теореме о дифференцировании интеграла Лебега, зависящего от параметра, что и требовалось доказать.

***Замечание* 1.1.** Пример 0.1 показывает, что теорему 1.1 нельзя усилить.

***Теорема* 1.2** (единственности). *Пусть $f \in L^1[0,1]$ и множество $E \subset \mathbb{C} \setminus [1,\infty)$ имеет предельную точку, принадлежащую E. Если $Sf\left|E\right. = 0$, то $f = 0$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $Sf(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus [1,\infty)$ в силу теоремы 1.1. Разлагая ядро оператора в сумму бесконечной геометрической прогрессии и применяя теорему Лебега о почленном интегрировании ряда, получаем, что при всех $x \in (0,1)$

$$Sf\left(x\right) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tx} dt =$$

$$= \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n x^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\int_0^1 f(t) t^n dt \right) = 0.$$

(Применимость теоремы Лебега следует из сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\int_0^1 \left|f(t)\right| t^n dt \right)$$

при всех $x \in (0,1)$, что, в свою очередь, вытекает из ограниченности коэффициентов ряда: $\int_0^1 t^n \left|f(t)\right| dt \le \int_0^1 \left|f(t)\right| dt.$)

Таким образом, $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$ для любого целого $n \ge 0$, а потому

$$\int_0^1 f\left(t\right) p\left(t\right) dt = 0$$

для любого алгебраического многочлена p. В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса отсюда следует, что $f = 0$ п. в. (можно считать функцию f вещественнозначной; поскольку для любого алгебраического многочлена p

$$\int_0^1 p\left(t\right) f^+\left(t\right) dt = \int_0^1 p\left(t\right) f^-\left(t\right) dt,$$

где $f^{\pm}$ – положительная и отрицательная части f, то $f^+ = f^-$ п. в. в силу теоремы Вейерштрасса и теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в $C[0,1]$). Теорема доказана.

Известно (см., например, [1], [5]), что при $1 < p < \infty$ *преобразование Гильберта*

$$Hf(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

есть ограниченный оператор в $L^p(\mathbb{R})$ (теорема М. Рисса), и справедлива формула обращения

$$f\left(t\right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf(z)}{z-t} dz \qquad (1.1)$$

(интегралы понимаются в смысле главного значения). Отсюда легко следует, что преобразование Маркова – Стилтьеса есть ограниченный оператор в $L^p\left[0,1\right]\left(1 < p < \infty\right)$ (но он не ограничен в $L^1\left[0,1\right]$, см. [1]).

Из (1.1) нетрудно получить формулу обращения для преобразования Маркова – Стилтьеса.

***Теорема* 1.3.** *Если $f \in L^p\left[0,1\right]\left(1 < p < \infty\right)$, то при п. в. $x \in \mathbb{R}$ существует преобразование Маркова-Стилтьеса $f^*\left(x\right) := Sf(x)$, и справедливо равенство*

$$f\left(t\right) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*\left(x\right)}{1-tx} dx.$$

Доказательство. Полагая в определении преобразования Маркова – Стилтьеса

$$z = 1/y \ (y \in \mathbb{R},\ y \ne 0),$$

имеем

$$f^*\left(z\right) = y \int_0^1 \frac{f\left(t\right)}{y-t} dt = y\pi Hf_1\left(y\right),$$

где функция

$$f_1\left(t\right) := \begin{cases} f\left(t\right), & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin \left[0,1\right] \end{cases}$$

принадлежит $L^p(\mathbb{R})$, а потому преобразование существует. Ясно, что

$$Hf_1\left(y\right) = \frac{1}{\pi y} f^*\left(\frac{1}{y}\right).$$

В силу (1.1) получаем после замены $y = 1/x$

$$f_1\left(t\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf_1(y)}{y-t} dy = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1/y) f^*\left(1/y\right)}{y-t} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{\infty} \frac{(1/y) f^*\left(1/y\right)}{y-t} dy \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{\infty} \frac{x^2 f^*\left(x\right)}{x^2(1-tx)} dx \right) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*\left(x\right)}{1-tx} dx.$$

В частности, при $t \in [0,1]$ имеем

$$f\left(t\right) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*\left(x\right)}{1-tx} dx,$$

что и завершает доказательство.

2 Теорема о свертке

Теперь установим основной результат данной работы.

***Определение* 2.1.** *Пусть функции f и g определены и измеримы на отрезке $\left[0,1\right]$. Определим функцию h на $\left[0,1\right]$ следующим образом:*

$$h(t) = tf(t)\int_0^1 \frac{g(u)}{t-u}du + tg(t)\int_0^1 \frac{f(u)}{t-u}du, \quad (2.1)$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, если оно существует. Функцию h будем называть сверткой Маркова-Стилтьеса функций f и g и обозначать $h = f \bullet g$.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $f \in L^p[0,1]$, $g \in L^q[0,1]$, *где* $1 < p < \infty; 1 < q < \infty$ *и* $1/r := 1/p + 1/q < 1$. *Тогда свертка* $h = f \bullet g$ *существует, принадлежит* $L^r[0,1]$, *и ее преобразование Маркова-Стилтьеса удовлетворяет равенству*

$$Sh(s) = Sf(s)\cdot Sg(s). \quad (2.2)$$

Доказательство. Введем вспомогательные функции

$$F(t) := \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(u)}{t-u}du, t \in [0,1],$$
$$f_1(t) := \begin{cases} f(t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Очевидно, что $f_1 \in L^p(\mathbb{R})$ при $f \in L^p[0,1]$. Кроме того, $Hf_1 \in L^p(\mathbb{R})$ по теореме М. Рисса. Отсюда выводим, что $F = Hf_1 \,|\, [0,1] \in L^p[0,1]$. По условию теоремы $g \in L^q[0,1]$, а потому $(tg(t))^r \in L^{q/r}[0,1]$. Аналогично $F^r \in L^{p/r}[0,1]$. Применяя теперь неравенство Гёльдера, получим

$$(tg(t)F(t))^r \in L^1[0,1],$$

т. е.

$$tg(t)F(t) \in L^r[0,1].$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$G(t) := \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{g(u)}{t-u}du \in L^q[0,1]$$

и

$$tf(t)G(t) \in L^r[0,1].$$

Поэтому $h \in L^r[0,1]$, и первое утверждение теоремы доказано.

Из него следует, что по теореме Гёльдера существует преобразование Маркова-Стилтьеса $Sh(s)$ для любого $s \in [0,1)$. При этом

$$Sh(s) = \int_0^1 \frac{tf(t)}{1-ts}\left(\int_0^1 \frac{g(u)}{t-u}du\right)dt + $$
$$+\int_0^1 \frac{tg(t)}{1-ts}\left(\int_0^1 \frac{f(u)}{t-u}du\right)dt. \quad (2.4)$$

Положим

$$F_\varepsilon(t) := \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^1\right)\frac{f(u)}{t-u}du \quad (\varepsilon > 0),$$

где по умолчанию предполагается, что первый интеграл равен нулю при $0 < t < \varepsilon$. Тогда

$$F_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{f_1(u)}{t-u}du =: H_\varepsilon f_1(t)$$

есть усеченное преобразование Гильберта. Известно (см., например, [5]), что максимальное преобразование Гильберта

$$H_M f(t) := \sup_{\varepsilon>0}|H_\varepsilon f(t)|$$

удовлетворяет неравенству

$$\|H_M f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

с константой C_p, не зависящей от f. Следовательно,

$$\|F_\varepsilon\|_{L^p[0,1]} = \|H_\varepsilon f_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \le$$
$$\le C_p \|f_1\|_{L^p(\mathbb{R})} = C_p \|f\|_{L^p[0,1]}. \quad (2.5)$$

Отметим также, что $\forall s \in [0,1)$

$$(1-ts)^{-1} \in L^\varrho[0,1] \ (r^{-1} + \varrho^{-1} = 1)..$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера для трех функций, получаем, что $\forall s \in [0,1)$

$$\phi_\varepsilon(t) := (1-ts)^{-1}\, tg(t) F_\varepsilon(t) \in L^1[0,1]$$

и, кроме того,

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^1[0,1]} \le \left\|\frac{1}{1-ts}\right\|_{L^\varrho[0,1]} \|F_\varepsilon\|_{L^p[0,1]} \|tg\|_{L^q[0,1]} \le$$
$$\le C\left\|\frac{1}{1-ts}\right\|_{L^\varrho[0,1]} \|f\|_{L^p[0,1]} \|tg\|_{L^q[0,1]}. \quad (2.6)$$

Так как правая часть в (2.6) конечна и не зависит от ε, то $\forall s \in [0,1)$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}\|\phi_\varepsilon\|_{L^1[0,1]} < \infty.$$

Кроме того, в силу (2.5)

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}|\phi_\varepsilon| \in L^p[0,1].$$

Таким образом, применяя теорему Лебега, получаем

$$\int_0^1\left(\lim_{\varepsilon\to 0+}\phi_\varepsilon(t)\right)dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^1 \phi_\varepsilon(t)\,dt$$

или, что эквивалентно,

$$\int_0^1 \frac{tg(t)}{1-ts}\left(\int_0^1 \frac{f(u)}{t-u}du\right)dt =$$
$$= \int_0^1 f(u)\left(\int_0^1 \frac{tg(t)}{(1-ts)(t-u)}dt\right)du.$$

Следовательно, формула (2.4) превращается в

$$Sh(s) = \int_0^1 \frac{tf(t)}{1-ts}\int_0^1 \frac{g(u)}{t-u}dudt +$$
$$+\int_0^1 \frac{tg(t)}{1-ts}\int_0^1 \frac{f(u)}{t-u}dudt =$$
$$= \int_0^1 f(t)\int_0^1 \frac{tg(u)}{(1-ts)(t-u)}dudt +$$
$$+\int_0^1 f(u)\int_0^1 \frac{tg(t)}{(1-ts)(t-u)}dtdu =$$

$$=\int_0^1 f(t)\int_0^1 \frac{tg(u)}{(1-ts)(t-u)}dudt+$$

$$+\int_0^1 f(t)\int_0^1 \frac{ug(u)}{(1-us)(u-t)}dudt=$$

$$=\int_0^1 f(t)\int_0^1 \frac{g(u)}{t-u}\left(\frac{t}{1-ts}-\frac{u}{1-us}\right)dudt=$$

$$=\int_0^1 \frac{f(t)}{1-ts}\int_0^1 \frac{g(u)}{1-us}dudt.$$

Таким образом, при всех $s\in[0,1)$ имеем

$$Sh(s)=Sf(s)Sg(s). \qquad (2.7)$$

А так как $f\in L^p[0,1]\subset L^1[0,1]$ и аналогично $g,h\in L^1[0,1],$ то в силу теоремы 1.1 равенство (2.7) верно во всей комплексной s-плоскости с разрезом по $[1,\infty),$ что и завершает доказательство.

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $f\in L^p[0,1]$ *и* $g\in L^q[0,1],$ *где* $1<p<\infty;\ 1<q<\infty$ *и*

$$1/r:=1/p+1/q<1.$$

Если $f\bullet g=0$ *п. в., то либо* $f=0,$ *либо* $g=0$ *п. в.*

Доказательство. Пусть $f\bullet g=0$ п. в. Тогда $Sf(s)Sg(s)=0$ в области $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ по теореме 2.1. Другими словами, $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)=\Omega_f\cup\Omega_g$, где

$$\Omega_f=\{s\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty):Sf(s)=0\},$$

$$\Omega_g=\{s\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty):Sg(s)=0\}.$$

Так как множества Ω_f и Ω_g замкнуты в $\mathbb{C}\setminus[1,\infty),$ то хотя бы одно из них имеет непустую внутренность. Пусть, для определенности, $int\Omega_f\neq\varnothing.$ В силу теоремы 1.1 $Sf=0$ в $\mathbb{C}\setminus[1,\infty),$ а потому (теорема 1.2) $f=0$ п. в.

Ясно, что свертка Маркова – Стилтьеса (при условии существования) обладает переместительным и распределительным свойствами. Укажем условия, при которых справедливо сочетательное свойство.

***Следствие* 2.2.** *Пусть*

$$f_i\in L^p[0,1]\ (1<p<\infty, i=1,2,3).$$

Если свертки $f_1\bullet f_2$, $f_2\bullet f_3$, $(f_1\bullet f)_2\bullet f_3$ *и* $f_1\bullet(f_2\bullet f_3)$ *существуют и принадлежат* $L^p[0,1]$, *то* $(f_1\bullet f_2)\bullet f_3=f_1\bullet(f_2\bullet f_3).$

Доказательство. Это сразу следует из теорем 2.1 и 1.2.

Отметим также следующий аналог неравенства Юнга.

***Следствие* 2.3.** *При условиях теоремы* 2.1 *справедливо неравенство*

$$\|f\bullet g\|_{L^r[0,1]}\le 2A_p\|f\|_{L^p[0,1]}\|g\|_{L^q[0,1]},$$

где

$$A_p=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}\ \ \textit{при}\ 1<p\le 2,$$

$$A_p=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p}\ \textit{при}\ 2\le p<\infty.$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 2.1 было отмечено, что $F=Hf_1\,|[0,1]\in L^p[0,1].$ Поэтому в силу неравенств Гельдера и М. Рисса имеем

$$\|tg(t)F(t)\|_{L^r[0,1]}\le\|g\|_{L^q[0,1]}\|F\|_{L^p[0,1]}\le$$

$$\le\|g\|_{L^q[0,1]}\|Hf_1\|_{L^p(\mathbb{R})}\le A_p\|g\|_{L^q[0,1]}\|f\|_{L^p[0,1]}.$$

Аналогично

$$\|tf(t)G(t)\|_{L^r[0,1]}\le A_p\|g\|_{L^q[0,1]}\|f\|_{L^p[0,1]}.$$

Осталось заметить, что

$$f\bullet g(t)=tf(t)G(t)+tg(t)F(t).$$

Использованное выше точное значение константы A_p в неравенстве М. Рисса было дано в [6].

3 Одно применение теоремы о свертке

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$f(t)+\lambda\int_0^1\frac{f(u)}{t-u}du=g(t)\ \ (\lambda\neq 0) \qquad (3.1)$$

с неизвестной функцией f (мы предполагаем, что функции f и g таковы, что нижеследующие рассуждения имеют смысл). Решение уравнений вида (3.1) (и даже более общих уравнений) было получено ранее сведением к краевой задаче Римана (см., например, [7, глава 6, § 47]). Покажем, как для этой цели могут быть использованы теоремы 1.3 и 2.1.

Известно [8, с. 242], что при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$

$$\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha}}{t-u}du=$$

$$=\begin{cases}\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi\dfrac{t^{\alpha-1}}{(1-t)^{\alpha}},\ 0<t<1\\[2ex] \dfrac{-\pi}{\sin\alpha\pi(1-t)}\left|\dfrac{-t}{1-t}\right|^{\alpha-1},\ t<0\,\text{или}\ t>1.\end{cases} \qquad (3.2)$$

Поэтому при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$

$$f(t)\bullet\frac{t^{\alpha-1}}{(1-t)^{\alpha}}=$$

$$=tf(t)\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{-\alpha}}{t-u}du+\frac{t^{\alpha}}{(1-t)^{\alpha}}\int_0^1\frac{f(u)}{t-u}du=$$

$$=f(t)\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi\frac{t^{\alpha}}{(1-t)^{\alpha}}+\frac{t^{\alpha}}{(1-t)^{\alpha}}\int_0^1\frac{f(u)}{t-u}du=$$

$$=\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi\frac{t^{\alpha}}{(1-t)^{\alpha}}\left(f(t)+\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\alpha\pi\int_0^1\frac{f(u)}{t-u}du\right).$$

Подберем число α_0, $0<\operatorname{Re}\alpha_0<1,$ так, что $\operatorname{tg}\alpha_0\pi=\lambda\pi.$ Умножая обе части (3.1) на $t^{\alpha_0}(1-t)^{-\alpha_0}\,\pi\operatorname{ctg}\alpha_0\pi,$ получим

$$f(t)\bullet\frac{t^{\alpha_0-1}}{(1-t)^{\alpha_0}}=g(t)\frac{t^{\alpha_0}}{(1-t)^{\alpha_0}}\pi\operatorname{ctg}\alpha_0\pi\ .$$

Применение теоремы 2.1 к последнему соотношению дает

$$Sf(s)\left(S\frac{t^{\alpha_0-1}}{(1-t)^{\alpha_0}}\right)(s)=\pi\operatorname{ctg}\alpha_0\pi\left(S\frac{g(t)t^{\alpha_0}}{(1-t)^{\alpha_0}}\right)(s).$$

Но равенство (3.2) показывает, что (ниже положено $y=1/s$)

$$\left(S\frac{t^{\alpha_0-1}}{(1-t)^{\alpha_0}}\right)(s)=y\int_0^1\frac{t^{\alpha_0-1}(1-t)^{-\alpha_0}}{y-t}dt=$$

$$=\frac{-\pi y}{\sin\alpha_0\pi(1-y)}\left|\frac{-y}{1-y}\right|^{\alpha_0-1}=\frac{\pi}{\sin\alpha_0\pi}\left(\frac{1}{1-s}\right)^{\alpha_0}.$$

Значит,

$$Sf(s)=(1-s)^{\alpha_0}\cos\alpha_0\pi\left(S\frac{g(t)t^{\alpha_0}}{(1-t)^{\alpha_0}}\right)(s).$$

Используя теперь теорему 1.3, имеем окончательно

$$f(t)=\frac{\cos\alpha_0\pi}{\pi^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-s)^{\alpha_0}}{1-ts}S\left(g(x)x^{\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_0}\right)(s)\,ds.$$

Мы получили решение уравнения (3.1) в форме, отличной от данной в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миротин*, *А.Р.* Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А.Р. Миротин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

2. *Вячеславов*, *Н.С.* Рациональные приближения функций типа Маркова – Стилтьеса / Н.С. Вячеславов, Е.П. Мочалина // Вестник МГУ, Серия 1. Математика-механика. – 2008. – № 4. – С. 3–13.

3. *Хиршман*, *И.И.* Преобразования типа свертки / И.И. Хиршман, Д.В. Уиддер. – М. : ИЛ, 1958. – 309 с.

4. *Srivastava*, *H.M.* A new convolution theorem for the Stieltjes transform and its application to a class of singular integral equations / H.M. Srivastava, Vu Kim Tuan // Archiv der Mathematik. – 1995. – Vol. 64, № 2. – P. 144–149.

5. *King*, *F.W.* Hilbert transforms: in 2 Vol. / F.W. King. – Cambridge University Press, 2009. – Vol. 1. – 858 p.

6. *Pichorides*, *S.K.* On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund, and Kolmogorov / S.K. Pichorides // Studia Math. – 1972. – Vol. 44, № 2. – P. 165–169.

7. *Гахов*, *Ф.Д.* Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1977. – 640 с.

8. *Прудников*, *А.П.* Интегралы и ряды: в 3 т. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – 2-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Т. 1: Элементарные функции. – 632 с.

Поступила в редакцию 13.06.13.