

О минимальных несверхразрешимых формациях

В.М. СЕЛЬКИН, И.В. БЛИЗНЕЦ

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Формация F называется минимальной τ -замкнутой ω -локальной, не H -формацией, если $F \not\subseteq H$, но в классе групп H содержится всякая собственная τ -замкнутая ω -локальная подформация из F . В данной работе описываются минимальные τ -замкнутые ω -локальные несверхразрешимые формации.

Ключевые слова: формация, минимальная τ -замкнутая ω -локальная не H -формация, формация всех сверхразрешимых групп, $\bar{\tau}$ -минимальная не H -группа.

All groups considered are finite. Formation F is a minimal τ -closed ω -local non H -formation, if $F \not\subseteq H$, but all proper τ -closed ω -local subformations of F belong to H . In this article we study a minimal τ -closed ω -local non H -formation.

Keywords: formation, minimal τ -closed ω -local non H -formation, formation of supersolvable finite groups, a τ -minimal non H -group.

Введение. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Пусть Θ – некоторая непустая совокупность формаций. Формации, принадлежащие Θ , называются Θ -формациями. Θ -формация F называется H_Θ -критической формацией [1] или минимальной не H_Θ -формацией [2], если $F \not\subseteq H$, но в классе групп H содержится всякая собственная Θ -подформация из F . Если Θ -формации F и H такие, что $F \not\subseteq H$, тогда, в большинстве случаев, можно показать, что F содержит, по крайней мере, одну H_Θ -критическую подформацию. Этот факт указывает на важность изучения критических формаций. Общая проблема изучения H_Θ -критических формаций впервые была поставлена Л.А. Шеметковым [2]. В случае, когда $\Theta = I$ является классом всех локальных формаций, данная проблема была решена А.Н. Скибой [3]. Описание H_Θ -критических формаций, в случае, когда Θ является классом наследственных локальных формаций, представлено в [4]. Основные результаты исследований, проводимых в данном направлении, представлены в книгах Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [5], [6], Венбин Го [7]. Существенный вклад в теорию критических формаций внесли К.П. Шам и Венбин Го [8], где были описаны минимальные тотально локальные не-нильпотентные формации. После выхода работы Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [9] начались исследования минимальных ω -локальных не H -формаций [10]–[12]. Используя основные результаты работы [13], мы опишем минимальные τ -замкнутые ω -локальные несверхразрешимые формации.

Теорема 1. Пусть H — формация всех сверхразрешимых групп. Тогда и только тогда формация F является минимальной τ -замкнутой ω -локальной несверхразрешимой формацией, когда $F = t^w \text{form}(G)$, где G — такая $\bar{\tau}$ -минимальная несверхразрешимая группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^H$, и если $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то выполняется одно из следующих условий:

- 1) P — неабелева группа и G — $\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_q A(q-1))$ -группа с монолитом $P = G^{N_q A(q-1)}$ для всякого простого числа $q \in \pi$;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — абелева p -группа и H — монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов: а) H —

$\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_p A(p-1))$ -группа с монолитом $Q = H^{N_p A(p-1)} \not\subseteq \Phi(H)$; б) H – группа кватернионов порядка 8, 4 делит $p-1$; в) H – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q , делящей $p-1$; г) H – примарная циклическая группа порядка q^n , $(q^n, p-1) = q^{n-1}$.

Определения и некоторые предварительные результаты. В группе G выберем некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Следуя выводам А.Н. Скибы [6], τ называется подгрупповым функтором, если выполняются следующие условия:

- 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G ,
- 2) для любого эпиморфизма и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация F называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \cap F$ для любой группы $G \in F$. Для подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G . Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если всегда из того, что $T \in \tau(H)$, $H \in \tau(G)$, следует, что $T \in \tau(G)$. Символом $\bar{\tau}$ обозначается наименьший замкнутый подгрупповой функтор со свойством $\tau \leq \bar{\tau}$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{\text{формации групп}\}$$

называется ω -локальным спутником [9]. Если все значения ω -локального спутника f являются τ -замкнутыми формациями, то f называется τ -замкнутым ω -локальным спутником. Символом $LF_\omega < f >$ обозначим класс групп $(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$, для любого произвольного ω -локального спутника f . Пусть $F = LF_\omega < f >$, то говорим, что f — ω -локальный V -спутник формации F . В этом случае, мы называем F ω -локальной формацией. Если при этом все значения f лежат в F , то f будем называть внутренним ω -локальным V -спутником формации F .

Пусть X — произвольная совокупность групп, p — простое число. Тогда полагают

$$X(F_p) = \begin{cases} \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in X), & \text{для всех } p \in \pi(X); \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi(X). \end{cases}$$

Если формация F такая, что $F = LF_\omega < f >$, где $F(\omega') = F$ и $F(p) = N_p F(F_p)$ для всех $p \in \omega$, тогда спутник F называется каноническим ω -локальным V -спутником формации F . Символом $\tau^\omega \text{form}(X)$ обозначаем пересечение всех τ -замкнутых ω -локальных формаций содержащих непустое множество групп X . V -спутник формации F называется минимальным τ -значным ω -локальным V -спутником формации F , если $f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in F)$ и $f(p) = \text{form}(F(F_p))$ для всех простых $p \in \omega$. Формация F называется формацией классического типа, если у нее имеется такой ω -локальный V -спутник f , где ω является множеством всех простых чисел, все неабелевы значения которого ω -локальны.

Сформулируем в виде леммы основной результат работ [13].

Лемма 1. Пусть H – формация классического типа, и H – ее канонический V -спутник. Формация F в том и только в том случае является минимальной τ -замкнутой ω -локальной не H -формацией, когда $F = t^\omega \text{form}(G)$, где G – такая $\bar{\tau}$ -минимальная не H -группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^H$ и либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$, либо $\pi \neq \emptyset$ и выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка $p \notin \pi(H)$;

2) P – неабелева группа, G – $\bar{\tau}$ -минимальная не $(H(q))$ -группа с монолитом $P = G^{H(q)}$ для всякого простого числа $q \in \pi$;

3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и H – монолитическая группа с нефраттиневым монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов:

а) H – $\bar{\tau}$ -минимальная не $(H(p))$ -группа с монолитом $Q = H^{H(p)}$; б) H – минимальная не $(H(p))$ -группа, причем H либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q , либо циклическая q -группа.

Лемма 2 (теорема 1 [9]). Пусть F – формация. Тогда следующие условия равносильны:

1) формация F ω -локальна;

2) $N_p F(F_p) \subseteq F$ для всех $p \in \omega$;

3) $F = LF_\omega < f >$, где $f(\omega') = F$ и $f(p) = N_p F(F_p)$ для всех $p \in \omega$.

Формация всех сверхразрешимых групп H имеет, как известно, такой канонический P -локальный V -спутник t , что $t(p) = N_p A(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$, для все простых чисел p . Значит, H — формация классического типа. Ввиду леммы 2, формация H имеет такой канонический ω -локальный V -спутник N , что $H(p) = t(p) = N_p A(p-1)$ для всех простых $p \in \omega$ и $H(\omega') = H$.

Доказательство теоремы. Необходимость. Ввиду леммы 1 $F = t^w \text{form}(G)$, где G — такая $\bar{\tau}$ -минимальная не H -группа с нефраттиневым монолитом $P = G^H$ и если $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то выполняется одно из следующих условий:

1) $G = P$ – группа простого порядка $p \notin \pi(H)$;

2) P – неабелева группа, G – $\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_q A(q-1))$ -группа с монолитом $P = G^{N_q A(q-1)}$ для всякого простого числа $q \in \pi$;

3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и H – монолитическая группа с нефраттиневым монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов:

а) H – $\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_p A(p-1))$ -группа с монолитом $Q = H^{N_p A(p-1)}$; б) H – минимальная не $(N_p A(p-1))$ -группа, причем H либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q , либо циклическая q -группа.

Легко видеть, что в рассматриваемой нами ситуации случай 1) невозможен.

Пусть теперь P – p -группа. Поскольку $G/P \square H$ и $P = G^H$, то H – сверхразрешимая группа. Пусть H – минимальная не $(N_p A(p-1))$ -группа, M – собственная в H подгруппа наибольшей возможной экспоненты. Тогда $M \in N_p A(p-1)$. Так как $P = C_G(P)$, то $O_p(H) = 1$. Значит, $M \in A(p-1)$. Таким образом, $|M|$ делит $p-1$. Следовательно, H удовлетворяет одному из условий теоремы.

Достаточность. Легко видеть, что группа G удовлетворяет условиям леммы 1. Значит, достаточность вытекает из леммы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть H – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда и только тогда формация F является минимальной наследственной ω -локальной несверхразрешимой формацией, когда $F = t^w \text{form}(G)$, где G – такая минимальная несверхразрешимая группа с нефраттиневым монолитом $P = G^H$ и если $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то выполняется одно из следующих условий:

1) P – неабелева группа, G – минимальная не $(N_p A(p-1))$ -группа с монолитом $P = G^{N_p A(p-1)}$, где $\{p\} = \pi$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и либо H – группа Шмидта порядка qt , где q и t делят $p-1$, либо примарная циклическая группа порядка q^n и $(q^n, p-1) = q^{n-1}$, либо группа кватернионов порядка 8 и 4 делит $p-1$, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q , делящей $p-1$.

Следствие 2. Пусть H – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда формация F в том и только в том случае является минимальной τ -замкнутой наследственной локальной несверхразрешимой формацией, когда $F = t^l \text{form}(G)$, где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная несверхразрешимая группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^H$ и выполняется одно из следующих условий:

1) P – неабелева группа, G – $\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_q A(q-1))$ -группа с монолитом $P = G^{N_q A(q-1)}$ для всякого простого числа $q \in \pi$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и H – монолитическая группа с монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов: а) H – $\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_p A(p-1))$ -группа с монолитом $Q = H^{N_p A(p-1)} \not\subseteq \Phi(H)$; б) H – группа кватернионов порядка 8, 4 делит $p-1$; в) H – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q , делящей $p-1$; г) H – примарная циклическая группа порядка q^n , $(q^n, p-1) = q^{n-1}$.

Литература

1. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 780–782.
2. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев, 1980. – С. 37–50.
3. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 258–268.
4. Селькин, В. М. О наследственных критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Сибирский мат. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1145–1153.
5. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // -Москва : Наука, 1989. – 253 с.
6. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба // Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
7. Wenbin Guo, *The Theory of Classes of Groups* / Wenbin Guo // Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers – 2000. – 275 p.
8. Wenbin Guo, On totally local formations of groups / Wenbin Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra, – 2002. – №5 – P. 2117–2131.
9. Shemetkov, L.A. Multiply ω -local formations and Fitting classes of finete groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Matem. Trudy. – 1999. – №2 – P. 114–147.
10. Сафонова, И.Н. О минимальных ω -локальных не- L -формациях / И.Н. Сафонова // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2 – С. 23–27.
11. Селькин, В.М. Минимальные наследственные ω -локальные формации / В.М. Селькин // Укр. Мат. журнал. – 2002. – № 3 – С. 460–469.
12. Селькин, В.М. Об одной проблеме теории ω -локальных формаций / В.М. Селькин // Доклады НАН Беларусі. – 2001. – № 5 – С. 9–11.
13. Selkin, V.M. On minimal τ -closed ω -local non H -formation / V.M. Selkin // Algebra Colloquim. – 2012. – V. 19, № 4. – P. 1155–1165.