МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

Кафедра математического анализа

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Задания к контрольной работе
для студентов заочного факультета
специальности Н.01.01.-«Математика»

Гомель 2002

[illegible] А.Н., доцент, к.ф.-м.н
КАЗИМИРОВ Г.Н., доцент, к.ф.-м.н
ЯШИНА Ж.Н

Рецензенты

МИРОНЕНКО В.И., профессор, к.ф.-м.н.
СЕМЕНЧУК В.Н., профессор, д.ф.-м.н.

Рекомендованы к изданию научно-методическим советом Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины

Задания к контрольной работе составлены в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта специальности Н.01.01.-«Математика» и адресованы студентам 3-4 курсов заочного факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория функции комплексной переменной (ТФКП) в рамках университетской программы является продолжением математического анализа. Её идеи и результаты проникли во многие другие математические дисциплины (алгебраическую топологию, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения математической физики, функциональный анализ, теорию вероятностей, вычислительную математику и др.). Данное обстоятельство определило обязательность изучения курса ТФКП на всех естественно- математических факультетах университетов.

Согласно программе курса "ТФКП" студент-заочник должен выполнить контрольную работу, тематика которой охватывает все основные разделы дисциплины. Помочь студенту успешно справиться с этой задачей -основная цель, которую ставили перед собой авторы этого пособия.

Пособие разбито на семь самостоятельных частей, каждая из которых посвящена целостному разделу курса. Каждая часть содержит перечень понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения соответствующего раздела курса. Приводятся типичные задачи, снабжённые подробными решениями. Мы надеемся, что они будут использованы студентами для самопроверки готовности к выполнению контрольных заданий. В каждом разделе приведены ссылки на учебные пособия с точностью до страницы. С целью облегчения усвоения материала и подготовки к экзамену в пособии приводится программа по ТФКП, причём каждый вопрос снабжён ссылкой на наиболее доступные для студентов-заочников учебники.

Процесс изучения ТФКП на заочном факультете состоит из следующих основных этапов:

1) самостоятельная работа над учебником и учебными пособиями;

2) посещение проработка установочных и обзорных лекций;

3) работа на практических занятиях;

4) выполнение контрольной работы;

5) сдача зачётов и экзаменов.

При этом в силу специфики заочного обучения, на наш взгляд, основными в этом процессе являются 1) и 4) этапы. Хочется думать, что данное пособие поможет Вам как в самостоятельной работе над учебником, так и в овладении практическими навыками решения задач функций комплексной переменной.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие правила:

1) контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поле для замечаний рецензента;

2) условия задач своего варианта должны быть полностью переписаны;

3) решения задач и используемые формулы должны сопровождаться краткими и ясными пояснениями;

4) в контрольной работе следует указать учебники и параграфы, которыми следует пользоваться при решении задач;

5) текст контрольной работы должен быть внимательно вычитан студентом с целью устранения описок и арифметических ошибок (при рецензировании учитываются все ошибки, допущенные в работе);

6) на титульном листе указывается наименование дисциплины, по которой производиться контрольная работа, номер варианта, факультет, курс и номер группы, фамилия и инициалы студента, домашний адрес.

Контрольные работы, представленные без соблюдения указанных правил оформления, а также работы, выполненные не по своему варианту не засчитываются. Вариант задания каждому студенту даётся преподавателем по его усмотрению. Для удобства после каждого раздела приводится десять вариантов заданий.

При повторном рецензировании обязательно представить работу с первой рецензией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Привалов И.И. Ведение в теорию функций комплексного переменного.-М.:1977.
2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций.-М.:1966.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.-М.:1973.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций.-М.:1967.Т.1-2.
5. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.-М.:1989.
6. Евграфов М..А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций.-М.:1972.
7. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Арамонович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.-М.:1975.
8. Балк М.Б., Петров В.А., Полухин А.А. Задачник практикум по теории аналитических функций.
9. Грищенко А.Е. и др. Теория функций комплексного переменного (решение задач).- Киев: Вища школа, 1986.

Дополнительная литература

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.-М.:1972.
2. Гончаров В.Л. Теория функций комплексного переменного.-М.:1955.
3. Гурвиц А.,Курант Р. Теория функции. М.:1968.
4. Картан А. Элементарная теория функций одного и нескольких комплексных переменных. М.:1963.
5. Свешников А.Г., [illegible] Теория функций комплексной переменной.-М.:1974.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- М.:1974.-Т.3.ч.2.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.- М.:1967,1976.

ПРОГРАММА

1.Предмет теории аналитических функций и роль этой теории в математике и её приложениях.	[2] Введение.
2.Комплексные числа и их геометрическое представление на плоскости и сфере Римана. Теория пределов и топология комплексной плоскости.	[1] Гл.1 §1,2 [3], [5] Гл.1
3.Функции комплексного переменного Непрерывность, равномерная непрерывность.	[1] Гл.2 §1 [2] Гл.2 §1-4 [5] Гл.1 §4.
4.Производная. Условия Коши-Римана	[1] Гл.2 §4 п.1-4 [5] Гл.2 §7.
5.Геометрический смысл дифференцируемости Конформные отображения. Угол с вершиной в бесконечно удалённой точке.	[2] Гл.2 §8-11 [5] Гл.2 §8.
6.Аналитические функции. Вещественная и мнимая части аналитической функции как сопряжённые гармонические функции. Гидро-механическое истолкование аналитической функции.	[2] Гл.2 §13,14.

7.Элементарные функции. Линейная и дробно линейная функции. Основные свойства дробно линейной функции	[2] Гл.3 §4-9 [1] Гл.3 §1 п.1-10 [5] Гл.6 §34
8.Показательная функция и логарифм Степень с произвольным комплексным показателем. Функция Жуковского. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции	[2] Гл.3 §1-3,10-21 [1] Гл.3 §3 [5] Гл.4 §21,23.
9.Интеграл от функции комплексной переменной -	[2] Гл.5 §1-3 [1] Гл.4 §1 п.1-2 [5] Гл.1 §5.
10.Интегральная теорема Коши. Выражение определённого интеграла через первообразную функцию. Интеграл в многосвязной области.	[2] Гл.5 §4-10 [5] Гл.2 §9.
11.Интеграл и интегральная формула Коши	[1] Гл.4 §3 п.1-2 [5] Гл.2 §10.
12.Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.	[1] Гл.4 §3 п.3,4,7.
13.Обращение интегральной теоремы Коши	[1] Гл.4 §3 п.5 [2] Гл.6 §5.
14.Ряды с комплексными членами. Абсолютно сходящиеся ряды. Степенные ряды. Круг сходимости и радиус сходимости	[1] Гл.1 §5 Гл.2 §3.
15.Теоремы о равномерно сходящихся рядах аналитических функций	[1] Гл.2 §2 [2] Гл.5 §1.
16.Разложение аналитических функций в степенной ряд. Неравенство Коши для коэффициентов. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Лиувилля	[1] Гл.5 §2 п.1-3,8,9 [2] Гл.6 §2 Гл.9 §6
17.Действия над степенными рядами Метод неопределённых коэффициентов.	[2] Гл.6 §11-13.
18.Теорема единственности для аналитических функций. Нули аналитических функций. Порядок нуля.	[3] Гл.1 §5 п.20 [2] Гл.6 §8-10
19.Приближение аналитических функций полиномами. Теорема Рунге.	[4] Т.1 Гл.4 §2 п.2.3
20.Ряд Лорана	[2] Гл 7 §1,2 [5] Гл.3 §17
21.Изолированные особые точки однозначного характера. Теорема Ю.В.Сохоцкого.	[2] Гл.7 §4,3,6
22.Вычеты. Основная теорема о вычетах.	[2] Гл.8 §1,3 [5] Гл.5 §28
23.Применение теории вычетов к вычислению интегралов.	[3] Гл.5 §2 п.73,74 [5] Гл.5 §29

24.Логарифмический вычет. [illegible] §2
Принцип аргумента. Теорема Руше — [5] Гл.5 §30

25.Локальное обращение аналитической функции. Принцип сохранения области — [2] Гл.10 §1-5

26.Принцип максимума модуля. — [1] Гл.5 §2 п.5

27.Аналитическое продолжение. Общее понятие римановой поверхности — [2] Гл.10 §1-4,6

28.Принцип симметрии. — [2] Гл.9 § 5; [3] Гл.2 §3 п.36

29.Особые точки многозначного характера. — [2] Гл.9 §9

30.Лемма Шварца. Понятие о теореме существования конформного отображения. — [2] Гл.10 §2,6

31.Соответствие границ при конформном отображении. — [2] Гл.10 §7

1.КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА: МОДУЛЬ, АРГУМЕНТ, РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.

1^0.<u>Основные понятия и теоремы:</u> *алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы представления комплексных чисел, геометрическое изображение комплексных чисел, сопряжённые комплексные числа, формула корня n-ой степени, комплексная плоскость как метрическое пространство.*

2^0. ЛИТЕРАТУРА: [9] стр.3-6, [5] стр.7-18, [3] стр.12-17, [8] стр.8-18.

3^0. ЗАДАЧИ.

1. Упростить данное выражение. Полученное комплексное число записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах

№	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5
	$\frac{6-2i}{1-2i}$	$\frac{\sqrt{3}-i}{-i}$	$\frac{1}{1+i}$	$\frac{i+\sqrt{3}}{3i}$	$\frac{-10-2i}{2+3i}$
№	1.1.6	1.1.7	1.1.8	1.1.9	1.1.10
	$\frac{9+3i}{i-2}$	$\frac{2-2i}{1+i}$	$\frac{3i-\sqrt{3}}{i}$	$\frac{8i-4\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$	$\frac{7+2i}{4-14i}$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$$\frac{-1+5i}{3-2i}$$

Упростим данное выражение:

$$\frac{-1+5i}{3-2i}=\frac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-3-2i+15i-10}{9+4}=\frac{-13+13i}{13}=-1+i$$

Получили число

$$z=-1+i, a=-1, b=1; |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

Так как $a<0, b>0$, то

$$\arg z = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg(-1) + \pi = (-\frac{\pi}{4}) + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

Запишем число z в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z) = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})).$$

Запишем число $z = |z|e^{i\arg z} = \sqrt{2}e^{(\frac{3\pi}{4})i}$

2.Решить уравнение $z^n + a = 0$. Изобразить на плоскости все решения.

№	1.2.1	1.2.2	1.2.3	1.2.4	1.2.5
n	3	4	2	3	4
a	$-i$	$2i$	$(3+i)(-2+2i)$	$8i$	$-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
№	1.2.6	1.2.7	1.2.8	1.2.9	1.2.10
n	6	2	3	4	5
a	1	$\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$	$1-i\sqrt{3}$	$2+i2\sqrt{3}$	i

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ

$n = 4, a = i\sqrt{8} - \sqrt{8}$.

Решим уравнение:

$z^4 + i\sqrt{8} - \sqrt{8} = 0,\ z^4 = \sqrt{8} - i\sqrt{8},\ z = \sqrt[4]{\sqrt{8} - i\sqrt{8}}$.

Воспользуемся формулой n-ой степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, k = 0,1,\dots,n-1.$$

В данном случае $|\sqrt{8} - i\sqrt{8}| = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$.

$$\arg(\sqrt{8} - i\sqrt{8}) = arctg\frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Данное уравнение имеет 4 корня:

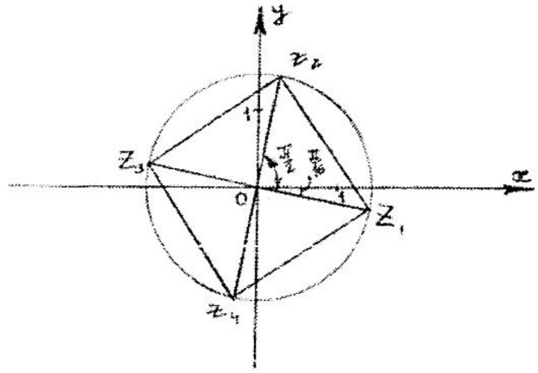
$$z_1 = \sqrt[4]{4}e^{i(-\frac{\pi}{4})/4} = \sqrt[4]{4}e^{(-\frac{\pi}{16})i},$$

$$z_2 = \sqrt[4]{4}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi)/4} = \sqrt[4]{4}e^{(\frac{7\pi}{16})i},$$

$$z_3 = \sqrt[4]{4}e^{i(-\frac{\pi}{4}+4\pi)/4} = \sqrt[4]{4}e^{(\frac{15\pi}{16})i},$$

$$z_4 = \sqrt[4]{4}e^{i(-\frac{\pi}{4}+6\pi)/4} = \sqrt[4]{4}e^{(\frac{23\pi}{16})i},$$

Изобразим все корни уравнения на плоскости



3.Дано число z. Изобразить на комплексной плоскости число $\bar{z}$.

№	1.3.1	1.3.2	1.3.3
	$\frac{(i-1)(3+i)}{i}$	$(1+i)^3$	$\frac{10i}{1-3i}$

№	1.3.4	1.3.5
	$[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}]^5$	$\left[\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^7$

№	1.3.6	1.3.7	1.3.8
	$(1-i)^5$	$\frac{(2+2i)(1-2i)}{1+i}$	$[\frac{\sqrt{2}}{-2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}]^4$

№	1.3.9	1.3.10
	$\frac{(1+i)(3-4i)}{1-i}$	$\frac{(24-8i)(1+2i)}{10i}$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$z=(1-i)^5$.

Воспользуемся формулой $z^n=|z|^n e^{in\arg z}$.

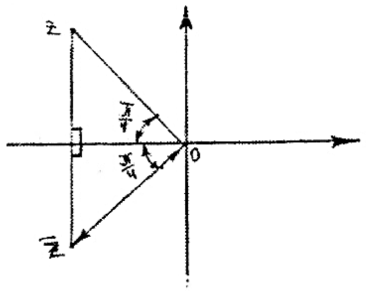
Найдём модуль и аргумент числа $1-i$.

$$|1-i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}, \arg(1-i)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Значит,

$z=(1-i)^5=[\sqrt{2}]^5 e^{i(-\frac{5\pi}{4})}=4\sqrt{2}e^{(-\frac{5\pi}{4})i}$. Тогда

$\bar{z}=4\sqrt{2}e^{(\frac{5\pi}{4})i}$. Изобразим число $\bar{z}$ на комплексной плоскости:



4.Изобразить на комплексной плоскости множества, заданные соотношениями:

№	1.3.1	1.3.2	1.3.3
	а) $1<\lvert z-3+2i\rvert<2$ б) $0<\operatorname{Im}(iz)<1$	а) $2\le\lvert z-2i\rvert\le 4$ б) $\operatorname{Re}(2iz-1)>1$	а) $\lvert z+i-1\rvert\ge 1$ б) $\operatorname{Im}(iz+2i)<0$

№	1.3.4	1.3.5
	а) $\lvert z+2-i\rvert\le 1$ б) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$	а) $\frac{1}{2}\le\lvert z+1+i\rvert\le\frac{3}{2}$ б) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=2$

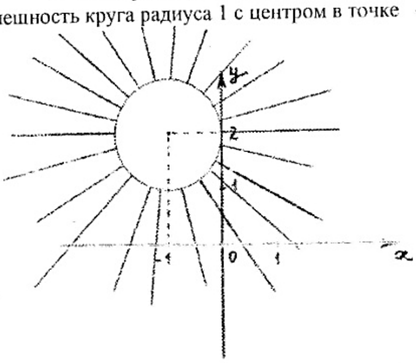
№	1.3.6	1.3.7	1.3.8
	а) $\lvert z-1-i\rvert>2$ б) $\operatorname{Im}\frac{z-2}{z+1}=0$	а) $\lvert z+4-i\rvert<1$ б) $\operatorname{Re}\frac{z-2}{z+2}=0$	а) $\lvert z+3i-2\rvert=1$ б) $\operatorname{Re}z^2=1$

№	1.3.9	1.3.10
	а) $\lvert z+2-2i\rvert=2$ б) $\operatorname{Im}z^2=1$	а) $1<\lvert z-2+2i\rvert\le 2$ б) $z^2+z^{-2}=1$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

а) $|z+1-2i|\ge 1$.

Так как $|z-(-1+2i)|$ есть расстояние между точками z и $-1+2i$, то данному неравенству удовлетворяют все точки плоскости, находящиеся от точки $-1+2i$ на расстоянии большем либо равном 1. Значит, искомое множество – внешность круга радиуса 1 с центром в точке $-1+2i$.



б) $\mathrm{Im}\,\bar{z}^2 = 2$. Пусть $z = x+iy$. Тогда $\bar{z}^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$.
$\mathrm{Im}\,\bar{z}^2 = -2xy$. Значит, равенство $\mathrm{Im}\,\bar{z}^2 = 2$ определяет гиперболу $-2xy = 2$, т.е.
$y = (-1/x)$.

Варианты контрольных заданий.

Вариант 1 : 1.1.1, 1.2.2, 1.3.3, 1.4.4;
Вариант 2 : 1.1.2, 1.2.3, 1.3.4, 1.4.5;
Вариант 3 : 1.1.3, 1.2.4, 1.3.5, 1.4.6;
Вариант 4 : 1.1.4, 1.2.5, 1.3.6, 1.4.7;
Вариант 5 : 1.1.5, 1.2.6, 1.3.7, 1.4.8;
Вариант 6 : 1.1.6, 1.2.7, 1.3.8, 1.4.9;
Вариант 7 : 1.1.7, 1.2.8, 1.3.9, 1.4.10;
Вариант 8 : 1.1.8, 1.2.9, 1.3.10, 1.4.3;
Вариант 9 : 1.1.9, 1.2.1, 1.3.1, 1.4.2;
Вариант 10 : 1.1.10, 1.2.10, 1.3.2, 1.4.1;2

2.ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1^0.Основные понятия и теоремы: *функция комплексного переменного, дифференцируемые функции комплексного переменного, условия Коши-Римана, критерий дифференцируемости в точке, аналитические (голоморфные) функции комплексного переменного, критерий аналитичности функции в области, гармонические функции.*

2^0. ЛИТЕРАТУРА: [3] стр.19-24; [5] стр. 57-63; [9] стр.40-41;[8] стр.25-34, 38-48.

3^0. ЗАДАЧИ

1.Найти $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$.

№	2.1.1	2.1.2	2.1.3	2.1.4	2.1.5
f	$\dfrac{\mathrm{Re}\, z}{z}$	$\dfrac{z}{\lvert z\rvert}$	$\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{z}$	$z\,\mathrm{Re}\, z$	$z+\dfrac{1}{z}$
№	2.1.6	2.1.7	2.1.8	2.1.9	2.1.10
f	$\dfrac{\mathrm{Im}\, z}{z}$	$\dfrac{\mathrm{Im}(z^2)}{z}$	$z\,\mathrm{Im}\, z$	e^{z}	z^2+zi

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z) = z^2 - 3iz + 4$.

Пусть $z = x+iy$. Тогда

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 - 3i(x+iy) + 4 =$$
$$= x^2 + 2xyi - y^2 - 3xi + 3y + 4 = (x^2 - y^2 + 3y + 4) + i(2xy - 3x)$$

Итак, $\mathrm{Re}\, f = x^2 - y^2 + 3y + 4$, $\quad \mathrm{Im}\, f = 2xy - 3x$.

2. Найти множество точек на плоскости, в которых данная функция является дифференцируемой, аналитической

№	2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.2.4	2.2.5
f	z^2	e^{zi}	iz^2+2z	$\dfrac{z-i}{1+iz}$	$z^2+\bar{z}$
№	2.2.6	2.2.7	2.2.8	2.2.9	2.2.10
f	$3\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$	$z+i\lvert z\rvert$	$\lvert z\rvert^2+2z$	$\cos z$	$\sin(zi)$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z)=z^2+2(\operatorname{Im} z)^2$.

Выделим $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$f(x+iy)=(x+iy)^2+2y^2=x^2+2xyi-y^2+2y^2=x^2+y^2+2xyi$;

$\operatorname{Re} f=u=x^2+y^2$, $\operatorname{Im} f=v=2xy$.

Функции u и v дифференцируемы во всей комплексной плоскости **C**. Проверим выполнение условий Коши-Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=-2y;$$

Ясно, что условия Коши-Римана выполняются в точках вида $z=x+i0, x\in R$.

Значит, $f(z)$ дифференцируема в точках $z\in R$.

Функция $f(z)$ не является аналитичной ни в одной точке из **C**, так как ни для одной точки из **C** не существует ни одной окрестности этой точки, в которой бы выполнялись условия Коши-Римана.

3.Восстановить аналитическую функцию по её мнимой или действительной части, если её значение в точке $z_0=w_0$

№	2.3.1	2.3.2	2.3.3
z_0	1	0	i
w_0	$4i$	$4i$	$-i$
	$u(x,y)=$ $=3x^2y-y^3$	$u(x,y)=$ $=\sin xshy$	$v(x,y)=$ $=x^2-y^2$

№	2.3.4	2.3.5
z_0	i	$2\pi i$
w_0	$-1+2i$	0
	$u(x,y)=$ $=x^2-y^2+2x$	$v(x,y)=$ $=e^x\sin y$

№	2.3.6	2.3.7	2.3.8
z_0	$1+i$	$-\pi i$	$1+i$
w_0	$2+7i$	$-1+3i$	$2-2i$
	$v(x,y)=$ $=x+3y-i$	$u(x,y)=$ $=e^x\cos y$	$u(x,y)=$ $=y^2-x^2+2y$

№	2.3.9	2.3.10
z_0	$1-i$	0
w_0	$6+5i$	$2+i$
	$v(x,y)=$ $=4x-y+1$	$v(x,y)=$ $=\cos xchy$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$u(x,y)=2x+3y-4$, $z_0=i$, $w_0=4i-6$.

Так как искомая функция аналитическая, то для нее должны выполняться условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=3.$$

Проинтегрировав 1-ое равенство системы по y, получим $v=2y+c(x)$. Продифференцируем это равенство по x :

$$\frac{\partial v}{\partial x}=c'(x).$$

Учитывая 2-ое равенство системы, получим:

$c'(x)=-3$, $c(x)=-3x+c$.

Значит, $v=2y-3x+c$ Получили, что $f(x,y)=2x+3y-4+i(2y-3x+c)$.

По условию, $f(i)=4i-6$. Подставим в выражение для

$f(x, y)$ значения $x = 0, y = 1$, получим.

$$f(i) = 3i - 4 + i(2i + c) = 3i - 4 - 2 + ic = -6 + (3 + c)i,$$

$$-6 + (3 + c)i = 4i - 6$$

$$3 + c = 4$$

$$c = 1.$$

Итак, $f(x, y) = 2x + 3y - 4 + i(2y - 3x + 1)$.

Варианты контрольных заданий:

Вариант 1 : 2.1.1, 2.2.2, 2.3.3;
Вариант 2 : 2.1.2, 2.2.3, 2.3.4;
Вариант 3 : 2.1.3, 2.2.4, 2.3.5;
Вариант 4 : 2.1.4, 2.2.5, 2.3.6;
Вариант 5 : 2.1.5, 2.2.6, 2.3.7;
Вариант 6 : 2.1.6, 2.2.7, 2.3.8;
Вариант 7 : 2.1.7, 2.2.8, 2.3.9;
Вариант 8 : 2.1.8, 2.2.9, 2.3.10;
Вариант 9 : 2.1.9, 2.2.1, 2.3.2;
Вариант 10 : 2.1.10, 2.2.10, 2.3.10

3. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1^0. Основные понятия и теоремы: *конформное отображение, дробно-линейная функция, конформные отображения, даваемые элементарными функциями.*

2^0. ЛИТЕРАТУРА: [1] стр.96-104, 107-117, 135-141; [5] стр.70-74, 273-312.

3^0. ЗАДАЧИ.

1. Для отображения $w = f(z)$ найти:1) точки комплексной плоскости С, в которых отображение является конформным, 2) угол поворота a и коэффициент растяжения k в точке z_0.

№	3.1.1	3.1.2	3.1.3	3.1.4	3.1.5
$f(z)$	z^2	z^3	z^2+1	z^2+2z	iz^2
z_0	1	i	$-i$	i	$-i$
№	3.1.6	3.1.7	3.1.8	3.1.9	3.1.10
$f(z)$	e^z	e^{2z}	e^z+1	e^z+z	$e^{2z}-z$
z_0	i	$-i$	-1	i	$-i$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z) = ze^z$, $z_0 = i$.

Функция $f(z) = ze^z$ является аналитической во всей плоскости и задаёт конформное отображение во всех точках z плоскости С, где $f'(z)$ не равно нулю (см. [1] стр.99). $f'(z) = e^z(1+z)$. Поскольку e^z не равно нулю, то $f'(z) = 0$ только если z= -1. Итак, отображение $w = ze^z$ является конформным во всех точках комплексной плоскости С, кроме точки z= -1. Угол поворота a и коэффициент растяжения в точке $f(z) = ze^z$ при отображении $f(z)$ находится соответственно по формулам:

$a = \arg f'(z_0)$, $k = |f'(z_0)|$. В нашем случае [illegible] $= \sqrt{2}e^{i(\ldots\pi/4)}$.

Поэтому $a = 1 + (\pi/4), k = \sqrt{2}.$

2.Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, переводящую точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3 и найти, во что переходит при этом отображение область D.

№	3.2.1	3.2.2	3.2.3	3.2.4
z_1, z_2, z_3	$-1, 0, i$	$-i, 0, 1$	$-i, 1, 1-i$	$-1, \infty, -i$
w_1, w_2, w_3	$0, 2i, 1+i$	$i, \infty, 1$	$1, \infty, -i$	$\infty, 1, i$
D	$\operatorname{Re} z > 0$	$\operatorname{Im} z > 0$	$\operatorname{Re} z > 1$	$\operatorname{Im} z < 0$
№	3.2.5	3.2.6	3.2.7	3.2.8
z_1, z_2, z_3	$1, 0, i$	$i, -1, \infty$	$0, 1, i$	$2, 0, -2$
w_1, w_2, w_3	$i, 1, -1$	$\infty, 1, i$	$-1, i, 1$	$\infty, 1, 0$
D	$\operatorname{Re} z > -1$	$\|z\| < 1$	$\|z-1\| < 2$	$\|z+1\| < 1$
№	3.2.9		3.2.10	
z_1, z_2, z_3	$i, \infty, -1$		$i, 0, 1$	
w_1, w_2, w_3	$1, \infty, 0$		$0, 1, \infty$	
D	$\|z\| > 1$		$\|z-1\| > 1$	

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1, w_1 = \infty, w_2 = 1, w_3 = 0, D : \operatorname{Re} z < 1.$

Дробно-линейное преобразование , переводящее точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3 однозначно определяется формулой:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (*)$$

Поскольку $w_1 = \infty$, то переходя , к пределу при w_1, стремящемся к ∞ в формуле (*), получим

$$\frac{w_3 - w_1}{\ldots} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Подставляя указанные точки, имеем

$$\frac{-1}{w-1} = \frac{z+1}{z}\frac{1}{2} \text{ или } w - 1 = \frac{-2z}{z+1}, w = 1 - \frac{2z}{z+1} = \frac{-z+1}{z+1}.$$

В силу конформности во всей расширенной плоскости дробно-линейной функции (см. [5] стр.280) и принципа соответствия границ при конформном отображении (см. [5] стр.276) дробно-линейная функция $w = \frac{-z+1}{z+1}$ взаимно однозначно отображает границу области D на границу области w(D). Границей D является прямая Rez=1. Найдём образ границы. В силу кругового свойства дробно-линейного отображения (см.[5] стр.281) образом любой окружности или прямой является окружность или прямая. Возьмём три различные точки прямой

$\operatorname{Re} z = 1 : z_1 = 1, z_2 = 1 - i, z_3 = 1 + i$.Тогда

$w_1 = w(z_1) = 0, w_2 = w(z\ ) = (-1/5) + i(2/5)$,.

$w_3 = w(z_3) = (-1/5) - i(2/5)$

Точки w_1, w_2, w_3 не лежат на одной прямой Re z=1 является окружность, проходящая через точки w_1, w_2, w_3

Уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) радиуса R имеет вид : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Подставляя в это уравнение координаты точек w_1, w_2, w_3., получим систему:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = R^2 \\ ((-1/5) - x_0)^2 + ((2/5) - y_0)^2 = R^2 \quad \text{или} \\ ((-1/5) - x_0)^2 + ((2/5) + y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

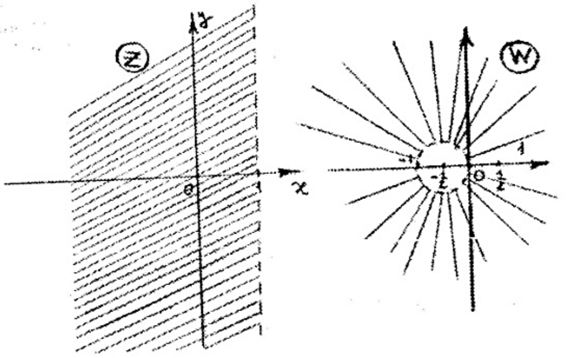
$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = R^2 \\ ((-1/5) - x_0)^2 + ((2/5) - y_0)^2 = R^2 \\ ((2/5) + y_0)^2 - ((2/5) - y_0)^2 = R^2\ . \end{cases} \text{ или } \begin{cases} R = (1/2) \\ x_0 = (-1/2) \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Итак, образом прямой Re z=1 является окружность $|z - z_0| = (1/2)$, где $z_0 = (-1/2)$. Пользуясь принципом взаимно-однозначного соответствия (см., например [1] стр.349), заключаем, что образом области D(Re z<1) будет внутренность или внешность круга $|z+(1/2)|\le(1/2)$.

Возьмём точку

$z'=0\in D$. Тогда $w(z')=1$ принадлежит внешности круга $|z+(1/2)|\le(1/2)$.

Следовательно, при отображении $w=\dfrac{-z+1}{z+1}$ область D перейдёт во внешность круга $|z+(1/2)|\le(1/2)$. (т.е. в область $|z+(1/2)|>(1/2)$.)



3. Найти отображение $w=f(z)$, которое взаимно однозначно и конформно отображает область D в плоскость z на область G в плоскость w.

№	3.3.1	3.3.2	3.3.3
D	$0<\operatorname{Re} z<1$	$0<\operatorname{Im} z<2$	$\operatorname{Im} z>0$
G	$0<\operatorname{Im} w<1$	$0<\operatorname{Im} w<2\pi$	$\operatorname{Im} w>0$

№	3.3.4	3.3.5
D	$\operatorname{Im} z<0$	$\operatorname{Im} z>0$
G	$\operatorname{Im} w>0$	$\operatorname{Re} w>0$

№	3.3.6	3.3.7	3.3.8
D	$\operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0$	$|z|<1$	$0<\operatorname{Im} z<\pi$
G	$\operatorname{Re} w>0$	$\operatorname{Re} w>0$	$\operatorname{Im} w>0$

№	3.3.9	3.3.10
D	$\operatorname{Re} z>0$	$\operatorname{Re} z>0$
G	$\operatorname{Im} w>0, \operatorname{Re} w>0$	$0<\operatorname{Im} w<2\pi$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$D:(-\pi/2)<\operatorname{Im} z<(\pi/2), G:|w|<1$.

Отобразим сначала полосу : $(-\pi/2)<\operatorname{Im} z<(\pi/2)$ на правую полуплоскость. Для этого рассмотрим отображение $w^1(z)=e^z$. Границей области D являются прямые $\operatorname{Im} z=\pm(\pi/2)$. На прямой $\operatorname{Im} z=(\pi/2)$ $z=x+i(\pi/2)$. На образе прямой $\operatorname{Im} z=(\pi/2)$ имеем $w^1(z)=e^{x+i(\pi/2)}=e^x e^{i(\pi/2)}, -\infty<x<+\infty$. Т.е. образом прямой $\operatorname{Im} z=(\pi/2)$ является луч $\{\operatorname{Re} w^1=0, \operatorname{Im} w^1>0\}$. Аналогично получаем что образом прямой $\operatorname{Im} z=-(\pi/2)$ является луч $\{\operatorname{Re} w^1=0, \operatorname{Im} w^1<0\}$. Отсюда заключаем, что образом границы (в расширенной комплексной плоскости) области D является мнимая ось. Считая, что граница области D ориентирована так, что при её обходе область D остаётся слева, в силу критерия однолистности функции в области (см. [5] стр.276) заключаем, что функция $w^1(z)=e^z$. взаимно-однозначно и конформно отображает область D в правую полуплоскость.

Для отображения правой полуплоскости $\operatorname{Re} w^1>0$ на круг $|w|<1$ воспользуемся дробно-линейным отображением. Возьмём три различные точки прямой

$\operatorname{Re} w^1=0: w_1^1=1, w_2^1=0, w_3^1=-1$ и три различные точки окружности

$|w|=1: w_1=1, w_2=i, w_3=-1$. Дробно-линейное отображение переводящее точки w_1^1, w_2^1, w_3^1 соответственно в точки w_1, w_2, w_3 будет иметь вид:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{w^1-w_1^1}{w^1-w_2}:\frac{w_3^1-w_1^1}{w_3^1-w_2^1},\ \text{или}$$

$$\frac{w-1}{w-i}:\frac{-1-1}{-1-i}=\frac{w^1-1}{w^1-0}:\frac{-1-1}{-1-0},\ \text{или}$$

$$\frac{w-1}{w-i}:\frac{1+i}{2}=\frac{w^1-1}{2w^1},\ \text{или}$$

$$(w-1)(1+i)w^1=(w^1-1)(w-i),\ \text{или}$$

$$w((1+i)w^1-(w^1-1))=-i(w^1-1)+(1+i)w^1,\ \text{или}\ w=\frac{w^1+i}{iw^1+1}.$$

Опять в силу критерия однолистности функция $w(w^1)=\dfrac{w^1+i}{iw^1+1}$ отображает взаимно-однозначно конформно область $\operatorname{Re} w^1>0$ на область $|w|<1$. Искомое отображение $w(z)$ есть композиция отображений $w^1(z)$ и $w(w^1)$, т.е.

$$w(z)=\frac{e^z+i}{ie^z+1}.$$

Варианты контрольных заданий:

Вариант 1 : 3.1.1, 3.2.2, 3.3.3;
Вариант 2 : 3.1.2, 3.2.3, 3.3.4;
Вариант 3 : 3.1.3, 3.2.4, 3.3.5;
Вариант 4 : 3.1.4, 3.2.5, 3.3.6;
Вариант 5 : 3.1.5, 3.2.6, 3.3.7;
Вариант 6 : 3.1.6, 3.2.7, 3.3.8;
Вариант 7 : 3.1.7, 3.2.8, 3.3.9;
Вариант 8 : 3.1.3, 3.2.3, 3.3.10;
Вариант 9 : 3.1.9, 3.2.1, 3.3.2;
Вариант 10 : 3.1.10, 3.2.10, 3.3.10.

4.ИНТЕГРАЛ. ТЕОРЕМА КОШИ. ФОРМУЛА КОШИ. ФОРМУЛА КОШИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ.

1^0. Основные понятия и теоремы: *интегралы по комплексному переменному, интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши, интеграл Коши..*

2^0. ЛИТЕРАТУРА: [1] стр.143-175, [5] стр.44-49,75-86,91-93.

3^0. ЗАДАЧИ.

1.Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma f(z)dz$ от заданной функции $f(z)$ по указанной кривой γ.

№	4.1.1	4.1.2	4.1.3
f	$\operatorname{Re} z$	$\operatorname{Im} z$	$\lvert z\rvert$
γ	Радиус-вектор точки $z=2+i$	Радиус-Вектор Точки $z=2-i$	$\lvert z\rvert=2$ $0\le\arg z\le\pi$ начало: $z=2$

№	4.1.4	4.1.5
f	$\lvert z\rvert^2$	$\overline{z}$
γ	$\lvert z\rvert=1$ $-\pi/2\le$ $\le\arg z\le\pi/2$ начало: $z=-i$	$\lvert z\rvert=3$ $\operatorname{Im} z\le 0$ начало: $z=-3$

№	4.1.6	4.1.7	4.1.8
f	$z\overline{z}$	$\lvert z\rvert^2\,\overline{z}$	$\dfrac{1}{\lvert z\rvert}$
γ	$\lvert z\rvert=2$ $-\pi<\arg z\le\pi$	$\lvert z\rvert=1$ $-\pi<\arg z\le\pi$	$\lvert z\rvert=2$ $\operatorname{Im} z\le 0$ начало: $z=-2$

№	4.1.9	4.1.10
f	$z\lvert z\rvert$	$e^{\bar{z}}$
γ	$\lvert z\rvert=1$ $\operatorname{Re} z \le 0$ начало: $z=-i$	Ломаная, Соединяющая Точки $0,1,1+i$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z)=\lvert z\rvert\quad \bar{z}_\gamma : \lvert z\rvert = 4, \operatorname{Re} z \ge 0$, начало: $z=-4$.

Если уравнение линии C имеет вид

$z=z(t)\quad (\alpha \le t \le \beta)$,

то $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$ (1) (см. [1] стр.144).

В рассматриваемом случае уравнение кривой γ имеет вид

$z=4e^{it}\quad (-\pi/2 \le t \le \pi/2)$.

Поэтому

$$\int\limits_\gamma \lvert z\rvert \bar{z}\, dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 16e^{-it} 4ie^{it} dt = 64\pi i.$$

2.С помощью интегральной формулы Коши вычислить $\oint\limits_C f(z)dz$ по замкнутому контуру С в положительном направлении.

№	4.2.1	4.2.2	4.2.3.	4.2.4
$f(z)$	$\frac{1}{z-1}$	$\frac{1}{z+i}$	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{1+z^2}$
C	$\lvert z-1\rvert=1/2$	$\lvert z+i\rvert=1$	$\lvert z-1\rvert=2$	$\lvert z-i\rvert=1/2$
№	4.2.5	4.2.6	4.2.7	4.2.8
$f(z)$	$\frac{z^3}{z-i}$	$\frac{z^2}{z+i}$	$\frac{\sin z}{z}$	$\frac{\cos z}{z-\pi}$
C	$\lvert z\rvert=2$	$\lvert z\rvert=2$	$\lvert z-1\rvert=2$	$\lvert z-2\rvert=2$

№	4.2.9	4.2.10
$f(z)$	$\frac{z}{z^2-1}$	$\frac{z}{z^2+1}$
C	$\lvert z-(1/2)\rvert=1$	$\lvert z+i\rvert=1$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)(z-i)}, C: \lvert z-i\rvert=1$

Представим подынтегральную функцию в следующем виде

$\dfrac{e^z}{(z+1)(z-i)} = \dfrac{\frac{e^z}{z+1}}{z-i} = \dfrac{h(z)}{z-i}$, где $h(z)=\dfrac{e^z}{z+1}$ аналитична внутри и на окружности $\lvert z-i\rvert=1$, а

точка i находиться внутри круга $\lvert z-i\rvert<1$. По интегральной формуле Коши (см.[1] стр. 166),

$$\oint \frac{e^z}{(z+1)(z-i)}dz = h(i)2\pi i = \frac{e^i}{i+1}2\pi i = \frac{(\cos 1 + i\sin 1)}{2}(1-i)2\pi i =$$
$$= (\cos 1 + i\sin 1)(1-i)\pi i = \pi(\cos 1 + i\sin 1) + i\pi(\cos 1 + i\sin 1) =$$
$$= \pi(\cos 1 - \sin 1) + i\pi(\cos 1 + \sin 1)$$

3. Применяя интегральную формулу Коши для производных аналитической функции, вычислить интеграл $\oint\limits_C g(z)dz$ по замкнутому контуру C, проходимому в положительном направлении.

№	4.3.1	4.3.2	4.3.3.
g(z)	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{\sin z}{(z+\pi)^3}$	$\frac{z^2}{z(z-i)^2}$
C	$\lvert z\rvert=2$	$\lvert z+(\pi/2)\rvert=3$	$\lvert z-i\rvert=1/2$

№	4.3.4		4.3.5
G(z)	$\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^4}$		$\dfrac{tgz}{z(z+\pi)^2}$
C	$\|z\|=4$		$\|z+\pi\|=1$

№	4.3.6	4.3.7	4.3.8
G(z)	$\dfrac{\cos z}{z^2(z+2)^2}$	$\dfrac{\sin z}{z(z+2)^2}$	$\dfrac{shz}{z^3}$
C	$\|z\|=1$	$\|z+4\|=3$	$\|z\|=1$

№	4.3.9	4.3.10
G(z)	$\dfrac{chz}{(z-1)^2}$	$\dfrac{\ln z}{(z+2i)^3}$
C	$\|z-1\|=1/2$	$\|z+3i\|=2$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$$g(z)=\frac{e^z}{(z-1)^4},\ C:|z|=2$$

Применим формулу:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \text{ (см.[1] стр.173)}$$

Положим $f(z)=e^z$. Тогда f(z) аналитична внутри и на окружности $|z|=2$ и точка $z=1$ лежит внутри $|z|=2$. Имеем $n=3$ и

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}f^{(3)}(1)=\frac{2\pi i}{3!}e=\frac{\pi e i}{3}.$$

Варианты контрольных заданий:

Вариант1 : 4.1.1, 4.2.2, 4.3.3;
Вариант2 : 4.1.2, 4.2.3, 4.3.4;
Вариант3 : 4.1.3, 4.2.4, 4.3.5;
Вариант4 : 4.1.4, 4.2.5, 4.3.6;
Вариант5 : 4.1.5, 4.2.6, 4.3.7;
Вариант6 : 4.1.6, 4.2.7, 4.3.8;
Вариант7 : 4.1.7, 4.2.8, 4.3.9;
Вариант8 : 4.1.8, 4.2.9, 4.3.1;
Вариант9 : 4.1.9, 4.2.1, 4.3.2;
Вариант10 : 4.1.10, 4.2.10, 4.3.10.

5.РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ.

1⁰. <u>Основные понятия и теоремы:</u> *степенные ряды, область сходимости степенного ряда, ряд Тейлора, ряд Лорана, теорема Тейлора, теорема Лорана, неравенство Коши для коэффициентов рядов Тейлора и Лорана, теорема единственности для аналитических функций.*

2⁰. ЛИТЕРАТУРА:[1] стр. 57-68, 196-200;
[5] стр. 86-96, 121-126, 107-109

3⁰ ЗАДАЧИ

1. Указанные функции разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ и найти радиус сходимости полученного степенного ряда.

№	5.1.1	5.1.2	5.1.3	5.1.4
a	1	1	1	0
f(z)	$\frac{z}{z+2}$	$\frac{z}{(z+2)^2}$	$\frac{z^2}{(z+1)^2}$	$\sin^2 z$
№	5.1.5	5.1.6	5.1.7	5.1.8
a	0	1	-1	0
f(z)	$\frac{1}{(z+5)^2}$	$\frac{1}{(z+2)^2}$	e^{2z}	$\cos(3z-i)$
№	5.1.9		5.1.10	
a	0		0	
f(z)	$\frac{z^2}{(1-z^3)^2}$		$\ln(1+z)$	

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$$a+i;\ f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1+i+z-i}=\frac{1}{(1+i)\left[1+\frac{z-i}{1+i}\right]}.$$

В окрестности точки $z_0=i$ $u(i,\sqrt{2})=\left\{z:|z-i|<\sqrt{2}\right\}$ имеем $\left|\frac{z-i}{1+i}\right|<1$. Поэтому получим

разложение $\frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{z-i}{1+i}\right]^n$, в котором ряд в

правой части равномерно сходиться в указанном круге

$u(i,\sqrt{2})$ Отсюда $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$. В силу

равномерной сходимости ряда его можно почленно дифференцировать:

$g'(z)=\frac{-1}{(1+z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}$. Тогда

$$f(z)=\frac{z}{(1+z)^2}=\frac{z-i}{(1+z)^2}+\frac{i}{(1+z)^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}in}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i(n+1)}{(1+i)^{n+2}}(z-i)^n=$$

$$=\frac{i}{(1+i)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\left[(-1)^{n+1}n+\frac{(-1)^n i(n+1)}{1+i}\right](z-i)^n.$$

Отсюда радиус сходимости равен

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\left[n+\frac{i}{1+i}(n+1)\right]\right|}}=\sqrt{2}.$$

2. Найти кру[illegible] ряда и в этом круге просуммировать данный степенной ряд.

5.2.1	5.2.2	5.2.3
$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n}$
5.2.4	5.2.5	5.2.6
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$
5.2.7	5.2.8	5.2.9
$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^n$. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. Его радиус сходимости совпадает с радиусом сходимости данного степенного ряда и равен R=1 (доказать!). В круге сходимости ряда имеет место равенство $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$ и ряд можно почленно дифференцировать. Поэтому

$\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\frac{1}{(1-z)^2}$. Умножая на z обе части равенства, а затем подставляя в него вместо z число $-z$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^n=\frac{-z}{(1+z)^2}.$$

3. Разложить указанную функцию f в ряд Лорана в кольце K и окрестности точки $z_0=\infty$.

№	5.3.1	5.3.2	5.3.3
f	$\frac{z+1}{z(1-z)^2}$	$\frac{1}{(z^2+1)^2}$	$\frac{1}{(z^2-1)^2}$
K	$\{0<\|z-1\|<2\}$	$\{0<\|z-i\|<2\}$	$\{0<\|z+1\|<2\}$

№	5.3.4	5.3.5
f	$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$	$\frac{z^2}{z(z-4)}$
K	$\{0<\|z-2\|<\sqrt{5}\}$	$\{1<\|z-1\|<3\}$

№	5.3.6	5.3.7	5.3.8
f	$\frac{z}{z^2(1+z^2)}$	$\frac{z}{z^2+1}$	$\frac{1}{(1+z^2)^2}$
K	$\{1<\|z-2i\|<2\}$	$\{1<\|z+2i\|<3\}$	$\{<\|z\|<\infty\}$

№	5.3.9	5.3.10
f	$\frac{1}{z(1-z)}$	$\frac{z}{(z-i)(z+3)}$
K	$\{0<\|z\|<1\}$	$\{1<\|z\|<3\}$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)},\ K=\{2<|z+1|<3\}$

Представим f(z) в виде

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$. Далее, имеем

$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+1-2}=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}$ в указанном кольце

$|2/(z+1)|<1$. Поэтому в силу известного разложения

$\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{z+1}\right]^n$. Тогда

$\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n}$. Аналогично, получим

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z+1-3}=\frac{-1}{3}\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}}=\left[\left|\frac{z+1}{3}\right|<1\right]=$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z+1}{3}\right]^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2^{n-1}}(z+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n$$ при

$z \in \{z : 2 < |z+1| < 3\}$. Для получения разложения в окрестности точки $z_0 = \infty$ произведём замену $z = 1/\xi$.

$$f(1/\xi) = \frac{1}{\frac{1}{\xi^2} - 3\frac{1}{\xi} + 2} = \frac{\xi^2}{2\xi^2 - 3\xi + 1} = \frac{\xi^2}{2(\xi-1)(\xi-(1/2))} =$$

$$= \xi^2\left[\frac{1}{\xi-1} - \frac{1}{\xi-(1/2)}\right]$$ В окрестности

$\xi_0 = 0$ $\{\xi : |\xi| < 1/2\}$ получим :

$$\frac{1}{\xi-1} = -\frac{1}{1-\xi} = -\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n, \quad \frac{1}{\xi-(1/2)} = \frac{-2}{1-2\xi} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(2\xi)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\xi^n.$$ Тогда

$$f(1/\xi) = \xi^2\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n + \sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\xi^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\xi^{n+2}.$$

Возвращаясь к исходной замене, получим искомое разложение в окрестности точки $z_0 = \infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\frac{1}{z^{n+2}}.$$

4. Существует ли аналитическая функция f в круге $u = \{z : |z| < 2\}$ с заданными условиями

5.4.1	5.4.2
$f(1/n) = \begin{cases} 1/n^2, n \neq 1, \\ 0, \quad n = 1, n \in N \end{cases}$	$f(1/n) = \sin^2(n\pi/2), n \in N$

5.4.3	5.4.4
$f(1/n) = (1/n^2)\cos^2(n\pi/2)$, $n \in N$	$f(1/n) = \begin{cases} 1/2n, n \neq 1, \\ 0, \quad n = 1, n \in N \end{cases}$
5.4.5	5.4.6
$f(1/n) = \frac{n}{n+1}; n \in N$	$f(1/n) = \frac{1}{n + \cos^2(n\pi/2)}$; $n \in N$
5.4.7	5.4.8
$f(1/n) = f(2z); z \in u$	$f(1/n) = \sin^2(n\pi/2), n \in N$
5.4.9	
$f(1/n) = (1/n^2)\cos^2(n\pi/2); n \in N$	

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(1/n) = (1/n)\cos n\pi = (-1)^n/n$. Рассмотрим множества $E_1 = \{1/2N\}_{N=1}^{\infty}$ u $E_2 = \{1/(2n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ из U. Они имеют в U предельную точку $z_0 = 0$.

f(1/2n)=1/2n=g(1/2n) , где g(z)=z.

Так как на E_1 $f(z) \equiv g(z)$, то по теореме единственности $f(z) \equiv g(z)$ и на U, т.е. $f(z) \equiv g(z)$ при $z \in U$. Аналогично $f(1/(2n+1)) = (-1/(2n+1)) = h(z)$, где $h(z) = -z$.

По теореме единственности получим, что $f(z) = h(z) = -z$ при $z \in U$. Итак, $f(z)$ одновременно равна z и -z в U, если предположить, что она существует и удовлетворяет данным условиям. Следовательно, функция f , удовлетворяющая условиям, не существует.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ:

Вариант 1: 5.1.1, 5.2.2, 5.3.3, 5.4.4;
Вариант 2: 5.1.2, 5.2.3, 5.3.4, 5.4.5;
Вариант 3: 5.1.3, 5.2.4, 5.3.5, 5.4.6;
Вариант 4: 5.1.4, 5.2.5, 5.3.6, 5.4.7;
Вариант 5: 5.1.5, 5.2.6, 5.3.7, 5.4.8;
Вариант 6: 5.1.6, 5.2.7, 5.3.8, 5.4.9;
Вариант 7: 5.1.7, 5.2.8, 5.3.9, 5.4.1;
Вариант 8: 5.1.8, 5.2.9, 5.3.10, 5.4.2;
Вариант 9: 5.1.9, 5.2.1, 5.3.1, 5.4.3;
Вариант 10: 5.1.10, 5.2.2, 5.3.2, 5.4.4;

6.КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ВЫЧЕТЫ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЕЧЕТАХ.

1^0. Основные понятия и теоремы: *классификация особых точек однозначной функции; вычет функции относительно изолированной особой точки; основная теорема о вычетах.*

2^0. ЛИТЕРАТУРА [1] стр. 216-224, 238-256;
[5] стр. 126-136, 218-252.

3^0. ЗАДАЧИ.

1. Найти особые точки функции $f(z)$, определить их характер и исследовать поведение на бесконечности.

№	6.1.1	6.1.2	6.1.3	6.1.4	6.1.5
$f(z)$	$\frac{1}{z^2+1}$	$\frac{z^3}{1-z^3}$	$\frac{z^6}{(z-1)^5}$	$\frac{e^{2z}}{1+z^4}$	$\frac{z+1}{e^z}$
№	6.1.6	6.1.7	6.1.8	6.1.9	6.1.10
$f(z)$	$\frac{1}{z(e^z-1)}$	z^3e^{1/z^2}	$\frac{\sin z}{z}$	$\sin(1/z)$	$e^{\frac{\sin z}{z}}$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z)=\frac{1-\cos z}{z(1-z)}$. Функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости С, кроме точек $z=0$ и z=1. Найдём разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. Имеем при

$$0<|z|<1\ f(z)=(1-\cos z)\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}=\left[1-\left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right]\right]\cdot\frac{1}{z}\cdot$$
$$\cdot(1+z+z^2+\dots)=$$
$$=\left[\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}+\cdots\right](1+z+z^2+\dots)=\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{2!}+z^3\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right]+\dots$$

Это разложение не содержит отрицательных степеней z. Значит (см. [1] стр.216) точка z=0 устранимая особая точка

Пусть $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{z(1-z)}{1-\cos z}$. Тогда $\varphi(1)=0$,

$$\varphi'(z)=\frac{(1-2z)(1-\cos z)-z(1-z)\sin z}{(1-\cos z)^2},\ \varphi'(1)=\frac{1}{\cos 1-1}\neq 0.$$

Следовательно точка z=1 является нулём первого порядка функции $\varphi(z)$. А значит F(z) имеет в точке z=1 полюс первого порядка(см. [1] стр219). Рассмотрим точку $z=\infty$. Введём замену переменной $z=1/\xi$ и рассмотрим функцию $\varphi(z)=f(1/\xi)$. Напишем разложение в ряд Лорана функции $\varphi(\xi)$ в точке $\xi_0=0$.

Имеем $\varphi(\xi)=\dfrac{1-\cos(1/\xi)}{(1/\xi)(1-(1/\xi))}=\dfrac{\xi^2(1-\cos(1/\xi))}{\xi-1}=$

$$=\xi^2\left[\frac{1}{2!\xi^2}-\frac{1}{4!\xi^2}+\dots\right]\frac{-1}{1-\xi}=\left[\frac{-1}{2!!}+\frac{1}{4!\xi^2}-\dots\right]\frac{1}{1-\xi}.$$

Если $0<|\xi|<1$, то

$$\varphi(\xi)=\left[\frac{-1}{2!}+\frac{1}{4!\xi^2}-\dots\right]\left[1+\xi+\xi^2+\dots\right]=\dots+$$

$$+\frac{1}{\xi^n}\left[\frac{-1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\dots\right]+\dots+\frac{1}{\xi}\left[\frac{-1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\dots\right]+$$

$$+\left[\frac{-1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\dots\right]+\xi\left[\frac{-1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\dots\right]+\dots+$$

$$+\xi^n\left[\frac{-1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\dots\right]+\dots=(\cos 1-1)\times$$

$$\times\left[\dots+\frac{1}{\xi^n}+\dots+\frac{1}{\xi}+1+\xi+\dots+\xi^n+\dots\right].$$

Это разложение содержит бесконечное число отрицательных степеней ξ. Следовательно точка $\xi_0=0$ является существенно особой точкой для функции $\varphi(\xi)$. А поэтому точка $z=\infty$ является существенно особой для функции f(z).

Замечание. То, что $z=\infty$ является существенно особой точкой следует также из того, что не существует предела f(z) при z стремящейся к ∞. В самом деле.Т. к.

f(z)=$\dfrac{1-\cos z}{z(1-z)}=\dfrac{2-e^{iz}-e^{-iz}}{2z(1-z)}$, то полагая z=iy имеем

$$f(iy)=\frac{2-e^{-y}-e^{y}}{2iy(1-iy)}=\frac{2-e^{-y}-e^{y}}{2y^2+2iy}=\frac{2-e^{-y}-e^{y}}{2y(y+i)}=$$

$$=\frac{(y-i)(2-e^{-y}-e^{y})}{2y(y^2+1)}=\frac{2-e^{-y}-e^{y}}{2(y^2+1)}-i\frac{2-e^{-y}-e^{y}}{2y(y^2+1)}.$$ Поэтому

$f(iy)\to\infty$ при $y\to\infty$. А при z=x $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x(1-x)}\to 0$ при $x\to\infty$.

2. Классифицировать изолированные особые точки функции f(z) и найти в них вычеты

№	6.2.1	6.2.2	6.2.3	6.2.4	6.2.5
F(z)	$\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$	$\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}$	$\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^2}$	$\dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^2}$	$\dfrac{z^2}{e^z-1}$
№	6.2.6	6.2.7	6.2.8	6.2.9	6.2.10
F(z)	zsin(1/z)	$z^2e^{1/z}$	$\dfrac{z^3}{e^z-1}$	$\dfrac{\sin^2 z}{z^2}$	$\dfrac{1}{\sin^2 z}$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

Пусть f(z)=$\dfrac{\cos\pi z}{(z+1)^2}$. Функция f(z) аналитична во всей плоскости C, кроме точки z= -1.Функция

$\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{(z+1)^2}{\cos\pi z}$ имеет в точке z= -1 нуль второго порядка , поскольку

$$\frac{1}{f(-1)}=0,\ \left[\frac{1}{f(z)}\right]'=\frac{2(z+1)co\pi z+(z+1)^2\pi\sin\pi z}{\cos^2\pi z},$$

$$\left[\frac{1}{f(z)}\right]_{z=-1}=0,\left[\frac{1}{f(z)}\right]'=\frac{\left[2cs\pi z+\pi^2(z+1)^2\cos\pi z\right]\cos^2\pi z}{\cos^4\pi z}+$$

$$+\frac{\left[2(z+1)\cos\pi z+(z+1)^2\pi\sin\pi z\right]2\pi\cos\pi z\sin\pi z}{\cos^4\pi z},$$

$$\left[\frac{1}{f(z)}\right]''_{z=-1}=-2\neq 0.$$

Вычет функции f(z) относительно полюса a порядка n вычисляется по формуле:

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(n-1)!!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

В нашем случае при n=2 имеем

$$\underset{z=-1}{res}\, f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}(\cos\pi z)=$$

$$=\lim_{z\to -1}(-\pi sn\pi z)=-\pi\sin(-\pi)=0.$$

Рассмотрим точку z=∞. Это изолированная особая точка. Для нахождения вычета в этой точке разложим функцию f(z) в ряд Лорана в окрестности z=∞. Разложим функцию $\varphi(z)=f(1/\xi)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\xi=0$. Имеем

$\varphi(\xi)=\cos(\pi/\xi)\dfrac{\xi^2}{(1+\xi)^2}$. Если

$$|\xi|<1, \text{то}\ \varphi(\xi)=\left[1-\frac{\pi^2}{2!\xi^2}+\frac{\pi^4}{4!\xi^4}-\ldots\right]\xi^2\left[1-\xi+\xi^2-\xi^3+\ldots\right]^2=$$

$$=\left[\xi^2-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!\xi^2}-\ldots\right]\left[1-2\xi+3\xi^2-4\xi^3+\ldots\right]=$$

$$=\ldots+\left[\frac{-\pi^2}{2!}+\frac{3\pi^4}{4!}-\frac{5\lambda^6}{6!}+\ldots\right]+\xi\left[\frac{2\pi^2}{2!}-\frac{4\pi^4}{4!}+\frac{6\pi^6}{6!}-\ldots\right]$$

Поэтому разложение в ряд Лорана функции f(z) в окрестности точки z=∞ имеет вид f(z)=…+

$$+\left[\frac{2\pi^2}{2!}-\frac{4\pi^4}{4!}+\frac{6\pi^6}{6!}-\ \right]\frac{1}{z}+\left[\frac{-\pi^2}{2!}+\frac{3\pi^4}{4!}-\frac{5\pi^6}{6!}+\ \right]+$$

Отсюда $c_{-1}=\dfrac{2\pi^2}{2!}-\dfrac{4\pi^4}{4!}+\dfrac{6\pi^6}{6!}-..=\pi^2-\dfrac{\pi^4}{3!}+\dfrac{\pi^5}{5!}-$

$$-\ldots=\pi(\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\ldots)=\pi\sin\pi=0.$$

Вычет в точке z=∞ равен $-c_{-1}$ (см.[1], стр242). Следовательно $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=0.$

ЗАМЕЧАНИЕ: Вычет функции f(z) в точке z=∞ можно было бы найти с помощью следствия из основной теоремы о вычетах о том, что: если f(z) регулярна во всей расширенной плоскости , за исключением конечного числа особых точек, тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая вычет в точке $z=\infty$, равна нулю, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{Z=z_k}{res}\, f(z)+\underset{Z=\infty}{res}\, f(z)=0$, где $z_k(k=1,2,\ldots,n)$ - все конечные особые точки функции $f(z)$, а точка $z=\infty$ является либо особой точкой , либо точкой регулярности функции $f(z)$. В нашем случае $z=\infty$ является существенно особой точкой функции $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{(z+1)^2}$, поскольку не существует $\lim\limits_{Z\to\infty}\dfrac{\cos\pi z}{(z+1)^2}$

$\left[\lim\limits_{X\to\infty}\dfrac{\cos\pi x}{(x+1)^2}=0, x\in R, \lim\limits_{Y\to\infty}\dfrac{\cos\pi iy}{(iy+1)^2}=\lim\limits_{Y\to\infty}\dfrac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{(iy+1)^2}=\infty\right]$. На основании следствия имеем

$\underset{Z=-1}{res}\, f(z)+\underset{Z=\infty}{res}\, f(z)=0$. Поскольку $\underset{Z=-1}{res}\, f(z)=0$, то и $\underset{Z=\infty}{res}\, f(z)=0$.

3. Вычислить $\oint\limits_C f(z)dz$ с помощью вычетов

№	[illegible]	[illegible]	6.3.3	6.3.4
$f(z)$	$\frac{\cos z}{z^4}$	$\frac{\sin z}{z^3}$	$z^2 e^{(1/z)}$	$\frac{3}{z-1} - e^{z}$
C	$\lvert z-1\rvert = 2$	$\lvert z\rvert = 2$	$\lvert z+1\rvert = 3$	$\lvert z\rvert = 2$
№	6.3.5	6.3.6	6.3.7	6.3.8
$f(z)$	$z^2 \sin(1/z)$	$\frac{z^2}{\sin z}$	$\frac{1}{(z^2+1)^2}$	$\frac{1}{\sin^2 z}$
C	$\lvert z+1\rvert = 2$	$\lvert z-6\rvert = 5$	$\lvert z+2i\rvert = 2$	$\lvert z\rvert = 3$
№	6.3.9		6.3.10	
$f(z)$	$\frac{1}{z^{10}+1}$		$\frac{z^3 e^{(1/z)}}{(z^2+4)^2}$	
C	$\lvert z\rvert = (1/2)$		$\lvert z\rvert = 3$	

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z) = \frac{z^3}{\cos z}, C\ |z-3| = 4$. Функция $f(z)$ является аналитической во всей плоскости C, за исключением точек $z = (\pi/2) + \pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Внутри контура $C: |z-3| = 4$ содержится две особые точки : $a_1 = \pi/2, a_2 = 3\pi/2$ и контур C содержится в области $C: |z-3| < 4{,}5$, в которой функция

$f(z) = \frac{z^3}{\cos z}$ является голоморфной, кроме точек a_1 и a_2. По основной теореме о вычетах

(см. [1], стр.239)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-3|=4} \frac{z^3}{\cos z}dz = \sum_{i=1}^{2} \underset{Z=a_i}{res} \frac{z^3}{\cos z}.$$ Поскольку

$f(z) = \frac{z^3}{\cos z} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,

где $\varphi(z) = z^3, \psi(z) = \cos z, \varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точках a_1 и a_2, причём

$\varphi(a_1) \neq 0, \varphi(a_2) \neq 0, \psi(a_1) = 0, \psi(a_2) = 0, \psi'(a_1) \neq 0, \psi'(a_2) \neq 0$, то точки a_1 и a_2 являются простыми полюсами функции $f(z)$ (см. [5], стр.219) и

$$\underset{Z=a_i}{res} f(z) = \frac{\varphi(a_i)}{\psi'(a_i)} \text{ или } \underset{Z=\pi/2}{res} \frac{z^3}{\cos z} = \frac{(\pi/2)^3}{-\sin(\pi/2)} = \frac{-\pi^3}{8},$$

$$\underset{Z=3\pi/2}{res} \frac{z^3}{\cos z} = \frac{(3\pi/2)^3}{-\sin(2\pi/2)} = \frac{27}{8}\pi^3.$$ Поэтому

$$\oint_{|z-3|=4} \frac{z^3}{\cos z}dz = 2\pi i\left[\frac{27}{8}\pi^3 - \frac{\pi^3}{8}\right] = \frac{13}{2}\pi^4 i.$$

4. С помощью теории вычетов вычислить указанные интегралы:

№	6.4.1	6.4.2	6.4.3
	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+2}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4)^2}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$
№	6.4.4	6.4.5	
	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$	$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 dx$	
№	6.4.6	6.4.7	6.4.8
	$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin x + 2}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 xdx}{x^4+1}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xdx}{x^4-2x+2}$
№	6.4.9	6.4.10	
	$\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin xdx}{(x^4+1)^2}$	$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos 2xdx}{x^4+4}$	

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. Так как подынтегральная функция чётная и

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. сходится как несобственный, то

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. Рассматривая подынтегральную функцию как функцию комплексного переменного, заключаем, что $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ голоморфна всюду в верхней полуплоскости, включая действительную ось, кроме точек $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ [т.к. $z^4+1=0$, если $z^4=-1$ или $z = \sqrt[4]{-1} = e^{i(\pi+2\pi k)/4}, k = 0,1,2,3;$ или $z_1 = e^{i\pi/4}, z_2 = e^{i3\pi/4}, z_3 = e^{i5\pi/4}, z_4 = e^{i7\pi/4}$]. В этих точках она имеет простые полюсы с вычетами:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z^2+1}{(z^4+1)'}\Big|_{z=z_1} = \frac{z_1^2+1}{4z_1^3} = \frac{e^{i\pi/2}}{4e^{i3\pi/4}} =$$

$$(i+1)\frac{e^{-i3\pi/4}}{4} = \frac{1}{4}(i+1)\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}\right](1+i) = \frac{-\sqrt{2}}{8}(1+i)^2,$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z_2^2+1}{4z_2^3} = \frac{e^{i3\pi/2}+1}{4e^{i9\pi/4}} = (1-i)\frac{e^{-i\pi/4}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)^2.$$

В бесконечности функция $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ имеет нуль второго порядка, поскольку $f(1/z) = \frac{(z^2+1)z^2}{z^4+1}$ имеет в точке $z=0$ нуль второго порядка [$f(1/z) = z^2h(z)$, *где* $h(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ регулярна в точке z=0 и $h(0) = 1 \neq 0$ (см. [5], стр.100)].

Поэтому, применяя формулу

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum\limits_{i=1}^{2} \operatorname*{res}_{z=z_i} f(z)$ (см. [1], стр. 248),

имеем $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}2\pi i\left[\frac{-\sqrt{2}}{8}(1+i)^2 + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)^2\right] =$

$$= \pi i\frac{\sqrt{2}}{8}\left[(1-i)^2 - (1+i)^2\right] = \pi i\frac{\sqrt{2}}{8}(-2i)2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Варианты контрольных заданий

Вариант 1: 6.1.1, 6.2.2, 6.3.3, 6.4.4;
Вариант 2: 6.1.2, 6.2.3, 6.3.4, 6.4.5;
Вариант 3: 6.1.3, 6.2.4, 6.3.5, 6.4.6;
Вариант 4: 6.1.4, 6.2.5, 6.3.6, 6.4.7;
Вариант 5: 6.1.5, 6.2.6, 6.3.7, 6.4.8;
Вариант 6: 6.1.6, 6.2.7, 6.3.8, 6.4.9;
Вариант 7: 6.1.7, 6.2.8, 6.3.9, 6.4.1;
Вариант 8: 6.1.8, 6.2.9,6.3.10, 6.4.2;
Вариант 9: 6.1.9, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.3;
Вариант 10: 6.1.10, 6.2.2, 6.3.2, 6.4.4;

7. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА. ТЕОРЕМА РУШЕ.

1^0. Основные понятия и теоремы: логарифмический вычет, принцип аргумента, теорема Руше.

2^0. ЛИТЕРАТУРА: [1] СТР. 243-248; [5] СТР. 252-256.

3^0. ЗАДАЧИ.

1. Найти число корней уравнения $f(z)=0$ в области D:

	7.1.1		7.1.2
f	$z^4-8z+10$	f	$z^4-8z+10$
D	$\{z:\lvert z\rvert<1\}$	D	$\{z:\lvert z\rvert<3\}$
	7.1.3		7.1.4
f	z^4-5z+1	f	z^4-5z+1
D	$\{z:\lvert z\rvert<1\}$	D	$\{z:1<\lvert z\rvert<2\}$
	7.1.5		7.1.6
f	e^z-4z^n+1	f	$z^7-5z^4+z^2-2$
D	$\{z:\lvert z\rvert<1\}$	D	$\{z:\lvert z\rvert<1\}$
	7.1.7		7.1.8
f	$z^8+15z-1$	f	$z^8-15z+1$
D	$\{z:\lvert z\rvert<2\}$	D	$\{z:1<\lvert z\rvert<2\}$
	7.1.9		7.1.10
f	$z^4+100z-2$	f	z^5-z+10
D	$\{z:1<\lvert z\rvert<2\}$	D	$\{z:1<\lvert z\rvert<2\}$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

$f(z)=z^3+50z-1;\ D=\{z;1<|z|<2\}$ Искомое уравнение имеет вид $z^3+50z-1=0$ Найдём число корней данного уравнения в круге $\{z:|z<2|\}$. Для этого положим $\psi(z)=50z,\ \varphi(z)=z^3-1$. Тогда для всех $z,\ |z|=2$ имеем

$|\psi(z)|=|50z|=100>8+1\geq|\varphi(z)|$. Следовательно, по теореме Руше (функции ψ и φ удовлетворяют всем условиям теоремы!) функция $\psi(z)+\varphi(z)$ имеет в круге $\{z:|z<2|\}$ столько нулей, сколько и функция $\psi(z)=50z$. Последняя имеет ровно один нуль.

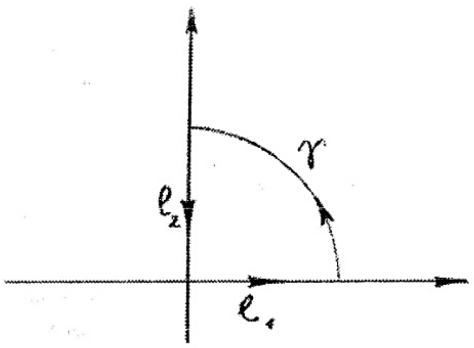
Найдём число нулей уравнения в круге $\{z:|z|<1\}$ (на окружности $|z|=1$ корней исходного уравнения нет, так как $|50z|\neq|1-z^3|$ при $|z|=1$) Возьмём $\psi(z)=50z,\ \varphi(z)=z^3-1$.; тогда $|\psi(z)|=50>1+1\geq|z^3-1|=|\varphi(z)|$ при всех $z,\ |z|=1$. По теореме Руше число нулей функции $\psi(z)+\varphi(z)$ равно числу нулей функции $\psi(z)$, т.е. одному. Итак, в кольце D корней исходного уравнения нет.

2. Как расположены по квадрантам корни уравнения $f(z)=0$

7.2.1	z^6+z+4	7.2.2	z^8+z+3
7.2.3	z^6+z+5	7.2.4	z^4+z+5
7.2.5	$z^{10}+z+5$	7.2.6 √	$2z^4-3z^3+3z^2-z+1$
7.2.7	z^6+z+6	7.2.8	z^4+z+5
7.2.9	z^6+z+10	7.2.10	$z^4+z^3+4z^2+2z+3$

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ:

Рассмотрим уравнение z^6+z+3. При всех $x\in[0,+\infty)$ $x^6+x+3>0$ и $x^6-x+3>0$. Отсюда следует, что данное уравнение не имеет вещественных корней. Не имеет оно и чисто мнимых корней , т.е. вида z=iy, ибо при одном $y\in R$ выражение $-y^6+iy+3$ обращаться в нуль не может. Подсчитаем количество корней данного уравнения, расположенных в первом квадрате. Для этого воспользуемся принципом аргумента. Пусть $R>0$ - достаточно большое число и $C_R=l_1\cup\gamma\cup l_2$ контур, указанный на рисунке.



Поскольку на l_1 $z^6+z+3>0$, то $\underset{l_1}{Var}\,Arg\left(z^6+z+3\right)=0$ для $\forall R>0$. Если $R\to\infty$, то $\underset{\gamma}{Var}\,Arg\,R^6e^{6i\varphi}\left(1+R^{-5}e^{-5i\varphi}+3R^{-6}e^{-6i\varphi}\right)\to 3\pi$. Для подсчёта $\lim\limits_{R\to\infty}\underset{l_2}{Var}\,Arg\left(z^6+z+3\right)$ проследим за изменением функции $\pi+arctg\dfrac{y}{3-y^6}$ при уменьшении y от $+\infty$ к $\sqrt[6]{3}$ и затем за изменением функции $arctg\dfrac{y}{3-y^6}$ при уменьшении y от $\sqrt[6]{3}$ к 0. После этого заключаем, что $\lim\limits_{R\to\infty}\underset{l_2}{Var}\,Arg\left(z^6+z+3\right)=-\pi$. Следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\underset{C_R}{Var}\,Arg\left(z^6+z+3\right)=2\pi$, и поэтому в первом квадранте согласно принципу аргумента уравнение имеет только один корень.

Поскольку уравнение имеет вещественные коэффициенты, то его корни попарно сопряжены. Поэтому оно имеет один корень в четвёртом квадранте и по два во втором и третьем.

Варианты контрольных заданий:

Вариант 1: 7.1.1, 7.2.10;
Вариант 2: 7.1.2, 7.2.9;
Вариант 3: 7.1.3, 7.2.8;
Вари ант 4: 7.1.4, 7.2.7;
Вариант 5: 7.1.5, 7.2.6;
Вариант 6: 7.1.6, 7.2.5;
Вариант 7: 7.1.7, 7.2.4;
Вариант 8: 7.1.8, 7.2.3;
Вариант 9: 7.1.9, 7.2.2;
Вариант 10: 7.1.10, 7.2.1;

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

СТАРОВОЙТОВ Александр Павлович
КАЗИМИРОВ Григорий Николаевич
ЯШИНА Жанна Николаевна

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Задания к контрольной работе
для студентов заочного факультета
специальности Н.01.01.-«Математика»

Подписано в печать 14.03.02 Формат 60x84 1/16. Бумага писчая №1. Печать офсетная. Усл.п.л. 2,91 Уч.-изд.л. 1,79 Тираж 35 экз. Заказ 162

Лицензия ЛВ №357 от 12 февраля 1999 г.

Отпечатано на ризографе ГГУ им. Ф.Скорины.
246699, г Гомель, ул. Советская, 104