Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 519.2

Критерий эргодичности для одного класса цепей Маркова с непрерывным временем

Ю.В. Малинковский

Статья посвящена доказательству эргодической теоремы для одного класса цепей Маркова с достаточно общим инфинитезимальным оператором. Цепи такого вида встречаются при исследовании систем массового обслуживания. Например, можно рассмотреть цепь, описывающую состояния однолинейной системы с групповым поступлением отрицательных заявок с возможностью вычеркивания целой группы.
Ключевые слова: цепь Маркова, эргодичность, стационарное распределение, консервативная цепь, неприводимая цепь.

The paper deals with prove of ergodic theorem for Markov chain class with very total infinitesimal generator. Such chains appear in queueing system studies. For example we can consider the chain which describes the one-line queueing system with negative customer batch arrivals. All quality of customers can be deleted.
Keywords: Markov chain, ergodicity, stationary distribution, conservative chain, irreducible chain.

Во многих приложениях, в частности, в теории массового обслуживания крайне важно выяснить при каких условиях цепи Маркова определенного вида являются эргодическими [1]–[6]. Происхождение рассматриваемого класса цепей тесно связано с системами массового обслуживания, представляющими изолированные узлы сети из статьи [5]. Пусть $\lambda^+, \mu, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_T^-$ – строго положительные постоянные, T – натуральное число. Рассмотрим консервативную цепь Маркова $n(t)$ с непрерывным временем и счетным фазовым пространством $Z_+ = \{0,1,\ldots\}$. Интенсивности ее переходов для $m,n \in Z_+$ зададим следующим образом:

$$q(n,n+1) = \lambda^+,\ q(n,m) = 0 \quad \text{для} \quad m > .n+1,$$
$$q(n,n-1) = \mu + \lambda_1^-,\ q(n,n-2) = \lambda_2^-, q(n,n-3) = \lambda_3^-, \ldots, q(n,n-T) = \lambda_T^- \quad \text{для} \quad \mathrm{n} \ge T,$$
$$q(n,n-1) = \mu + \lambda_1^-, q(n,n-2) = \lambda_2^-, q(n,n-3) = \lambda_3^-, \ldots, q(n,n-T+1) = \lambda_{T-1}^-, ,$$
$$q(n,0) = \lambda_n^- + \lambda_{n+1}^- + \ldots + \lambda_T^- \quad \text{для} \quad \mathrm{n} < T.$$

Если стационарное распределение $\{p(n), n \in Z_+\}$ цепи Маркова $n(t)$ существует, то оно удовлетворяет системе уравнений равновесия

$$p(0)\ \lambda^+ = (\mu + \lambda_1^- + \ldots + \lambda_T^-)p(1) + (\lambda_2^- + \ldots + \lambda_T^-)p(2) + \ (\lambda_3^- + \ldots + \lambda_T^-)p(3) + \lambda_T^- p(T),$$
$$p(n)(\lambda^+ + \mu + \lambda_1^- + \lambda_2^- + \ldots + \lambda_T^-) = p(n-1)\lambda^+ + p(n+1)(\mu + \lambda_1^-) + p(n+2)\lambda_2^- +$$
$$+ \ldots + p(n+T)\lambda_T^-, \quad n = 1,2,\ldots \quad .$$

Она эквивалентна системе уравнений равновесия для вертикальных сечений графа переходов

$$\lambda^+ p(n) = (\mu + \lambda_1^- + \ldots + \lambda_T^-)p(n+1) + (\lambda_2^- + \ldots + \lambda_T^-)p(n+2) + (\lambda_3^- + \ldots + \lambda_T^-)p(n+3) +$$
$$+ \ldots + \lambda_T^- p(n+T), \quad n \in Z_+. \tag{1}$$

Это однородное линейное разностное уравнение порядка T. Частное решение (1) ищем в виде $p(n) = z^n$. Подставляя его в (1), получим характеристическое уравнение

$$g(z) = \sum_{l=1}^{T} z^l \sum_{s=l}^{T} \lambda_s^- + \mu z - \lambda^+ = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{t=1}^{s} z^l + \mu z - \lambda^+ = 0. \tag{2}$$

В силу ограниченности интенсивностей выхода цепи Маркова из состояний она является регулярной.

Эргодическая теорема. *Цепь Маркова $n(t)$ регулярна. Для ее эргодичности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\rho = \frac{\lambda^+}{\mu + \rho\sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-} < 1. \qquad (3)$$

Доказательство. Докажем достаточность (3) для эргодичности цепи $n(t)$. Используем теорему Декарта [7]. В уравнении (2) ровно одна перемена знака при переходе от первой степени к нулевой. При этом $g(0) = -\lambda^+ < 0$ и, в силу (3), $g(1) > 0$. Поэтому этот корень $z_0 \in (0,1)$. Следовательно, уравнения (1) имеет решение $p(n) = Cz_0^n$,, причем из условия нормировки $C = 1 - z_0$, т. е. совпадает с геометрическим распределением:

$$p(n) = (1 - z_0)z_0^n, \quad n = 0,1,\ldots. \qquad (4)$$

Далее используем следующий вариант эргодической теоремы Фостера [8]. Для того, чтобы неприводимая консервативная регулярная цепь Маркова была эргодична, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений равновесия имела нетривиальное решение такое, что $\sum_{n=0}^{\infty} | p(n) | < \infty$. Неприводимость цепи очевидна. Консервативность выполнена по постановке задачи. Регулярность также выполнена. При выполнении условия (3) уравнение (2), как мы убедились, имеет корень $z_0 \in (0,1)$. Следовательно, (4) – нетривиальное решение системы уравнений равновесия, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} | p(n) |$ сходится как сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $z_0 \in (0,1)$. Значит, условие (3) достаточно для эргодичности цепи Маркова $n(t)$.

Для доказательства необходимости неравенства (3) для эргодичности цепи фактически надо показать, что если $\rho \geq 1$, т. е. $\lambda^+ \geq \mu + \rho\sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-$, то цепь $n(t)$ не является эргодической. Сначала покажем, что при выполнении последнего неравенства все корни характеристического уравнения (2) не попадают в круг $| z | < 1$.

Лемма 1. 1. *Если $\rho > 1$, то все корни характеристического уравнения* (2) *по модулю строго больше единицы.*

2. *Если $\rho = 1$, то на окружности $| z | = 1$ характеристическое уравнение)* (2) *имеет единственный корень $z = 1$, причем простой, а остальные корни* (2) *по модулю строго больше единицы.*

Доказательство. Введем функции комплексной переменной

$$h(z) = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} z^l + \mu z, \quad f(z) = -\lambda^+,$$

тогда характеристическое уравнение (2) запишется как $g(z) = h(z) + f(z) = 0$.

1. В случае $\rho > 1$, т. е. $\lambda^+ > \mu + \rho\sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-$ введенные функции $h(z)$ и $f(z)$ аналитичны в замкнутом круге $| z | \leq 1$, причем на его границе $| z | = 1$ выполняется неравенство

$$| h(z) | \leq \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^- + \mu < \lambda^+ = | f(z) |.$$

По теореме Руше функции $h(z) + f(z)$ и $f(z)$ имеют одинаковое число нулей в открытом круге $| z | < 1$, значит, $g(z) = h(z) + f(z)$ не имеет нулей в круге $| z | < 1$. На границе $| z | = 1$ характеристическое уравнение (2) также не имеет корней, поскольку, предположив, что $z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$ – корень уравнения (2), получим

$$\operatorname{Re} g(z)=\sum_{s=1}^{T}\lambda_s^-\sum_{l=1}^{s}\cos l\varphi+\mu\cos\varphi-\lambda^+=0.$$

Но

$$\left|\sum_{s=1}^{T}\lambda_s^-\sum_{l=1}^{s}\cos l\varphi+\mu\cos\varphi\right|\le\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^-+\mu<\lambda^+,$$

что противоречит предыдущему равенству. Поэтому все корни (2) по модулю строго больше единицы.

2. Остается рассмотреть более сложный случай $\rho=1$, т. е. $\lambda^+=\mu+\rho\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^-$, для которого можно воспользоваться следующей модификацией теоремы Руше, предложенной В.И. Клименок [9] и весьма полезной для исследования условий эргодичности процессов массового обслуживания.

Пусть функции $h(z)$ *и* $f(z)$ *аналитичны в открытом круге* $|z|<1$, *непрерывны на границе* $|z|=1$ *и выполнены следующие условия*:

$$|f(z)|_{|z|=1,\,z\ne1}>|h(z)|_{|z|=1,\,z\ne1}, \tag{5}$$

$$f(1)=-h(1)\ne0. \tag{6}$$

Пусть также функции $f(z)$ *и* $h(z)$ *имеют производные в точке* $z=1$ *и*

$$\frac{f'(1)+h'(1)}{f(1)}<0. \tag{7}$$

Тогда функции $f+h$ *и* f *имеют одинаковое число нулей в круге* $|z|<1$.

В рассматриваемом случае $z=1$ – корень характеристического уравнения (2). Этот корень простой, поскольку $g'(1)\ge\mu>0$. Покажем, что других корней, равных по модулю единице, нет. Так как $g(-1)\le-\mu-\lambda^+<0$ то $z=-1$ не является корнем (2). Пусть $z=e^{i\varphi}$ – корень (2). Тогда

$$\operatorname{Re} g(z)=\sum_{s=1}^{T}\lambda_s^-\sum_{t=1}^{s}\cos l\phi+\mu\cos\phi-\lambda^+=0. \tag{8}$$

Так как на полном обороте $0\le\varphi<2\pi$ для $\varphi\ne0,\varphi\ne\pi$

$$\left|\sum_{s=1}^{T}\lambda_s^-\sum_{l=1}^{s}\cos l\varphi+\mu\cos\varphi\right|\le\sum_{s=1}^{T}\lambda_s^-\sum_{l=1}^{s}\left|\cos l\varphi\right|+\mu\left|\cos\varphi\right|<\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^-+\mu=\lambda^+,$$

то (8) нарушается. Итак, $z=1$ является единственным, притом простым корнем характеристического уравнения (2) на окружности $|z|=1$.

При $z=e^{i\varphi}$, $\varphi\ne0$, (т. е. $|z|=1,\quad z\ne1$)

$$|h(z)|=\left|\sum_{s=1}^{T}\lambda_s^-\sum_{l=1}^{s}e^{il\phi}+\mu e^{i\phi}\right|<\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^-+\mu=\lambda^+=|f(z)|,$$

поскольку модуль суммы комплексных чисел с аргументами, кратными $\varphi\ne0$, строго меньше их модулей. Следовательно, (5) выполняется. Далее,

$$f(1)=-\lambda^+=-\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^--\mu=-h(1)<0,$$

т. е. справедливо (6). Наконец, выполняется (7), так как

$$\frac{f'(1)+h'(1)}{f(1)}=\frac{h'(1)}{f(1)}=-\frac{1}{\lambda^+}\left(\sum_{s=1}^{T}\frac{s(s+1)}{2}\lambda_s^-+\mu\right)<0.$$

Таким образом, выполнены все условия модифицированной В.И. Клименок теоремы Руше. Поэтому характеристическое уравнение (2) имеет единственный притом простой корень $z=1$ на границе $|z|=1$, остальные корни (2) по модулю строго больше единицы. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $Q_j(n)$ *– некоторые многочлены от* n, $0 \le \varphi < 2\pi$, *причем* $\varphi_j \ne \varphi_m$ *при* $j \ne m (j,m = 1,2,\dots,k)$ *и*

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(n) e^{in\varphi_j} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то $Q_j(n) \equiv 0 \quad (j = 1,2,\dots,k)$.

Доказательство. Обозначим $A = \max_{1 \le j \le k} \deg Q_j(n)$,

тогда

$$n^A \sum_{j=1}^{k} \frac{Q_j(n)}{n^A} e^{in\varphi_j} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Найдется постоянная C_j такая, что

$$\frac{Q_j(n)}{n^A} \to C_j, \quad j = 1,2,\dots,k. \tag{9}$$

Тогда, $n^A \left(\sum_{j=1}^{k} C_j e^{in\varphi_j} + o(1) \right) \to 0$, а так как $A \ge 0$, то тем более $\sum_{j=1}^{k} C_j e^{in\varphi_j} + o(1) \to 0$, откуда $\varepsilon_n = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{in\varphi_j} + o(1) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N_\varepsilon$ такой, что для всех $n \ge N$ будет $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. По введенному выше обозначению для ε_n имеем

$$\begin{cases} \varepsilon_N = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{iN\phi_j} \\ \varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{i(N+1)\phi_j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{N+k-1} = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{i(N+k-1)\phi_j} \end{cases}.$$

Модуль определителя этой системы линейных относительно $C_1, C_2, \dots, C_k$ уравнений, являющегося определителем Вандермонда,

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} e^{iN\varphi_1} & e^{iN\varphi_2} & \dots & e^{iN\varphi_k} \\ e^{i(N+1)\varphi_1} & e^{i(N+1)\varphi_2} & \dots & e^{i(N+1)\varphi_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i(N+k-1)\varphi_1} & e^{i(N+k-1)\varphi_2} & \dots & e^{i(N+k-1)\varphi_k} \end{vmatrix} = \left| \prod_{j<k} (e^{i\varphi_j} - e^{i\varphi_k}) \right| \ne 0,$$

поскольку $\varphi_j \ne \varphi_k$ при $k \ne j$. Раскладывая определитель

$$|\Delta_m| = \begin{vmatrix} e^{iN\phi_1} & e^{iN\phi_2} & \dots & \varepsilon_N & \dots & e^{iN\phi_k} \\ e^{i(N+1)\phi_1} & e^{i(N+1)\phi_2} & \dots & \varepsilon_{N+1} & \dots & e^{i(N+1)\phi_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i(N+k-1)\phi_1} & e^{i(N+k-1)\phi_2} & \dots & \varepsilon_{N+k-1} & \dots & e^{i(N+k-1)\phi_k} \end{vmatrix},$$

по столбцу свободных членов системы линейных уравнений $(\varepsilon_N, \varepsilon_{N+1}, \dots, \varepsilon_{N+k-1})^T$, получим $|\Delta_m| \le \max_{N \le l \le N+k-1} \varepsilon_l \cdot C < C\varepsilon$, где C – некоторая константа, не зависящая от ε. По правилу Крамера

$$|C_m| = \frac{|\Delta_m|}{|\Delta|} < \frac{C}{|\Delta|} \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует, что $C_m = 0, \quad m = 1,2,\ldots,k.$ Теперь из (9) следует, что $Q_j(n) \to 0,$ при $n \to \infty$, а так как $Q_j(n)$ – многочлен от n, то $Q_j(n) \equiv 0, \quad j = 1,2,\ldots,k.$ Лемма 2 доказана.

1. Пусть $\lambda^+ > \mu + \sum_{s=1}^{T} s\lambda_s^-.$ По лемме 1 все корни характеристического уравнения по модулю строго больше единицы. Покажем, что в этом случае не существует стационарного распределения, следовательно, цепь Маркова $n(t)$ не является эргодической. Общее решение разностного уравнения (1) имеет вид

$$p(n) = \sum_{j=1}^{l} Q_j(n) z_j^n, \tag{10}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_l$ – все различные корни характеристического уравнения (2), $Q_1(n), Q_2(n), \ldots, Q_l(n)$ – многочлены от n степеней, на единицу меньших кратностей корней $z_1, z_2, \ldots, z_l$ соответственно. Не ограничивая общности, можно считать $1 <| z_1 |\le| z_2 |\le \ldots \le| z_l |$. Разобьем все корни на группы корней с равными модулями:

$$| z_1 |=| z_2 |= \ldots =| z_{l_1} |= r_1 <| z_{l_1+1} |=| z_{l_1+2} |= \ldots =| z_{l_2} |= r_2 <| z_{l_2+1} |=| z_{l_{12}+2} |= \ldots =| z_{l_3} |= r_3 < \ldots <$$
$$< \ldots <| z_{l_p+1} |=| z_{l_p+2} |= \ldots =| z_l |= r_{p+1}.$$

Тогда (10) запишется как

$$p(n) = \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) z_j^n + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) z_j^n + \ldots + \sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) z_j^n. \tag{11}$$

Представляя корни характеристического уравнения в показательной форме $z_k =| z_k | e^{i\varphi_k}$, $0 \le \varphi_k < 2\pi,$ запишем (11) как

$$p(n) = r_1^n \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + r_1^n \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \ldots + r_1^n \sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) e^{in\varphi_j} = r_{p+1}^n \left[\left(\frac{r_1}{r_{p+1}}\right)^n \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{r_1}{r_{p+1}}\right)^n \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \ldots + \left(\frac{r_1}{r_{p+1}}\right)^n \sum_{j=l_{p-1}+1}^{l_p} Q_j(n) e^{in\varphi_j} + \left(\frac{r_1}{r_{p+1}}\right)^n \sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) e^{in\varphi_j} \right], \tag{12}$$

причем $1 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{p+1}$. Если предположить, что стационарное распределение существует, то $p(n) \to 0$ при $n \to \infty.$. Так как $r_{p+1} > 1,$ то выражение в квадратных скобках (12) тем более будет стремиться к нулю. Все члены (12), кроме, быть может, последнего, стремятся к 0, поскольку $| e^{in\varphi_j} |= 1,$ а многочлены $Q_j(n),$ если они не нулевой степени, стремятся к бесконечности гораздо медленнее, чем $\left(\frac{r_j}{r_{p+1}}\right)^n \to 0,$ когда $n \to \infty$ (если $Q_j(n)$ – многочлен нулевой степени, то это утверждение очевидно). Следовательно, последний член в квадратных скобках (12) также стремится к нулю, т. е. $\sum_{j=l_p+1}^{l} Q_j(n) e^{in\varphi_j} \to 0$ при $n \to \infty.$

Без ограничения общности считаем, что все $\varphi_j \in [0,2\pi)$ и что $\varphi_j \ne \varphi_m$ при $j \ne m.$ По лемме 2 отсюда следует, что $Q_j(n) \equiv 0$ при $l_p + 1 \le j \le l.$

Таким образом (11) принимает форму

$$p(n) = \sum_{j=1}^{l_1} Q_j(n) z_j^n + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} Q_j(n) z_j^n + \ldots + \sum_{j=l_{p-1}+1}^{l_p} Q_j(n) z_j^n. \tag{13}$$

Вынося теперь в этом выражении за скобку r_p^n, аналогичным способом докажем, что в последней сумме формулы (13) все $Q_j(n)\equiv 0$ (т. е. для $l_{p-1}+1\le j\le l_p$). По индукции отсюда вытекает, что во всех суммах в (13) $Q_j(n)\equiv 0$, т. е. что $p(n)\equiv 0$. Значит, не существует нетривиального решения уравнений равновесия (1) такого, что $p(n)\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. не существует стационарного распределения. Поэтому цепь Маркова $n(t)$ не эргодична.

2. Пусть теперь $\lambda^+=\mu+\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^-$. По лемме 1 характеристическое уравнение (2) имеет один простой корень $z=1$, остальные корни по модулю строго больше единицы. Общее решение разностного уравнения (1) будет отличаться от (10) наличием дополнительного постоянного члена:

$$p(n)=C+\sum_{j=1}^{l}Q_j(n)z_j^n,$$

где $z_1,z_2,\ldots,z_l$ – все различные корни характеристического уравнения (2) кроме простого корня $z=1$, $Q_1(n),Q_2(n),\ldots,Q_l(n)$ – многочлены от n степеней, на единицу меньших кратностей корней $z_1,z_2,\ldots,z_l$ соответственно. Доказательство того, что если $p(n)\to 0$ при $n\to\infty$, то $p(n)\equiv 0$, полностью повторяет доказательство пункта 1 за исключением того, что доказывая последовательно равенство нулю многочленов $Q_j(n)$, в конце концов придем к тому, что $p(n)\equiv C$. Следовательно, $p(n)\equiv 0$. Поэтому и в этом случае не существует стационарного распределения, значит, цепь Маркова $n(t)$ не является эргодичной.

Литература

1. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М. : ЛКИ, 2013. – Изд. 6. – 400 с.

2. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : РУДН, 1995. – 529 с.

3. Malinkovski, Yu. Stationary Distribution of the Queueing Networks with Batch Negative Customer Arrivals / Yu. Malinkovski // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. – Switzerland : Springer Internetional Publishing, 2015. – V. 564. – P. 53–63.

4. Malinkovski, Yu. Stationary Distribution of the Exponential Queueing Networks with Countable Set of Types of Batch Negative Customer Arrival Flows / Yu. Malinkovski // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. – Switzerland : Springer International Publishing, 2016. – V. 638. – P. 447–455.

5. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания / Ю. В. Малинковский, Н. Н. Бородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 64–68.

6. Gelenbe, E. Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – V. 28. – P. 656–663.

7. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1965. – 431 с.

8. Foster, F. G. On Stochastic Matrices Assosiated with Certain Queueing Process / F. G. Foster // Ann.Math.Statist. – 1953. – V. 24, № 2. – P. 355–360.

9. Klimenok, V. On the Modification of Rouche's Theorem for the Queueing Theory Problems / V. Klimenok // Queueing Systems. – 2001. – V. 38. – P. 431–434.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 11.06.2020